

等角投影变换原理 和BASIC程序

杨启和 编著



测绘出版社

等角投影变换原理 和 BASIC 程序

杨启和 编著

测绘出版社

内 容 简 介

本书系统地介绍了等角投影变换原理和 BASIC 程序。其内容包括：等角投影变换的理论和方法、等角投影的反解变换和正解变换、等角投影的常系数坐标变换、等角投影的数值变换和地形图图幅元素的 BASIC 程序。

本书突出特点是改变了传统的变系数计算方法，采用了适合于电算的常系数公式或常系数表进行等角投影的坐标变换。

本书可供测绘生产单位、科研单位和计算机地图制图单位的工程技术人员应用和参考，也可供测绘院校学生学习和参考。

本书提供的 BASIC 程序均在 PC-1500 袖珍计算机上实算通过。另备有本书全部程序的磁带，用户可向测绘出版社发行部联系购买，地址：北京复外三里河路 50 号。

等角投影变换原理和 BASIC 程序

杨启和 编著

*

测绘出版社出版

测绘出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

*

开本 850×1168 1/32 · 印张 7 · 字数 155 千字

1987 年 8 月第一版 · 1987 年 8 月第一次印刷

印数 0,001—3,200 册 · 定价 1.80 元

统一书号：15039 · 新 37P

前 言

地图投影变换是近些年发展起来的地图投影学的一个新的研究领域，它主要是研究从一种地图投影点的坐标变换为另一种地图投影点的坐标的理论和方法。地图投影变换在测量和计算机地图制图，以及地图点位信息处理、空间点位信息变换中均有广泛的应用，在航天遥感技术和某些空间科学方面也有应用。在地图投影变换理论和方法研究中，等角投影变换的研究尤为深刻。

等角投影是测量和地图制图中常用的一类地图投影，特别是广泛用作地图的数学基础。例如，国家基本比例尺地形图是采用的高斯-克吕格投影，1:100 万地形图是采用等角圆锥投影，而海图是采用墨卡托投影，航空图也是采用等角圆锥投影。

在大地测量和地图制图中经常要遇到高斯-克吕格投影正、反解坐标变换和邻带坐标变换问题。在编制各种类型地图中经常是利用上述地图作为基本资料，这就遇到不同等角投影坐标变换问题。另外在一种等角投影图上加绘另一种等角投影坐标线的问题，例如在墨卡托投影图上加绘高斯-克吕格投影坐标线，也属于等角投影坐标变换问题。

随着电子计算机，特别是微型机广泛用于测绘生产、教学和科研部门，研究和编制适用于电算的等角投影坐标变换的语言程序，并加以推广应用就显得日益重要和迫切，因为它对进一步发挥电子计算机的效益，避免不必要的重复劳动都将起到积极的作用。

《等角投影变换原理和 BASIC 程序》是在地图投影变换理论和方法研究的基础上，为适应 PC-1500 袖珍计算机应用的需要而编写的。该书由五章组成。第一章系统地讨论了等角投影变换

的理论和方法，它们是等角投影变换的理论基础。本章同时还给出了四种常用等角投影的坐标公式及其子程序和算例。第二章提供了四种常用等角投影反解变换公式及其子程序和算例，并且还讨论了其中两种等角投影的正解变换和邻带坐标变换，以及等角斜圆柱投影、等角斜圆锥投影正反解变换问题。它们属于变系数计算方法。以上两章中提供的几种常用等角投影正解变换的程序可供沿经线方向和沿纬线方向，以及沿大圆方向和沿小圆方向的制图区域进行数学基础设计和坐标计算之用。从第三章开始详细地讨论了等角投影常系数变换方法和程序。第三章给出了墨卡托投影、高斯-克吕格投影、1:100万地图用的等角圆锥投影相互间坐标变换的常系数表，高斯-克吕格投影正反解坐标变换和三度带、六度带邻带坐标变换的常系数表，以及利用常系数表或常系数公式进行坐标变换的 BASIC 程序和算例。第四章提供了任意两等角投影间数值变换和等角投影正反解数值变换，以及高斯-克吕格投影局部坐标系和国家坐标系间数值变换的 BASIC 程序和算例。第五章给出了计算系列比例尺（1:5千、1:1万和1:2.5万~1:50万）地形图图幅元素（包括图廓点坐标、图廓尺寸、图幅面积、子午线收敛角和图廓尺寸略图）的 BASIC 程序和算例，以及计算供展点仪展绘邻带方里线坐标的 BASIC 程序和算例。

本书突出的特点是改变了传统的变系数计算方法，采用了适合于电算的常系数公式或常系数表进行等角投影的坐标变换、高斯-克吕格投影正反解坐标变换和邻带坐标变换。常系数计算方法的优点是：计算公式通用性强，不同等角投影的坐标变换都可公用一个主程序，计算简便和节省电算时间。

本书的常系数表是按纬差四度分带计算的，适用的纬度范围是 $0^{\circ} \sim 60^{\circ}$ 。本书第三章提供了如下常系数表：

表 3-1 墨卡托投影到高斯-克吕格投影坐标变换系数表；

表 3-2 高斯-克吕格投影到墨卡托投影坐标变换系数表；

表 3-3 墨卡托投影到 1:100 万 地图用的等角圆锥投影坐标变换系数表;

表 3-4 1:100 万地图用的等角圆锥投影到墨卡托投影 坐标变换系数表;

表 3-5 高斯-克吕格投影到 1:100 万地图用的等角圆锥投影坐标变换系数表;

表 3-6 1:100 万地图用的等角圆锥投影到高斯-克吕格投影坐标变换系数表;

表 3-7 高斯-克吕格投影正解坐标变换系数表;

表 3-8 高斯-克吕格投影反解坐标变换系数表;

表 3-9 六度带高斯-克吕格坐标换带系数表;

表 3-10 三度带高斯-克吕格坐标换带系数表。

利用常系数表或常系数公式进行等角投影坐标变换能满足测量和制图的精度要求。例如表 3-1、表 3-2、表 3-7、表 3-9 和表 3-10 的坐标变换精度一般为 0.001 米,个别点在最不利情况下不超过 0.002 米,但表 3-2 在高纬度的坐标变换精度为 0.01 米。表 3-3、表 3-4、表 3-5 和表 3-6 的坐标变换精度为 0.001 厘米,个别点在最不利情况下不超过 0.002 厘米(化算为 1:100 万图上长)。表 3-8 坐标变换精度为 0.001"。

利用本书常系数表 3-7、表 3-8、表 3-9 和表 3-10 可以代替现行的“高斯-克吕格投影计算表”、“六度带高斯-克吕格坐标换带表”“三度带高斯-克吕格坐标换带表”。利用本书地形图图幅元素的 BASIC 程序可以代替现行的“高斯-克吕格坐标表”、“高斯投影图廓坐标表”和“高斯投影邻带方里线坐标变换表”。当然本书内容的应用范围远不止如此,其中等角投影数值变换的 BASIC 程序适用于局部坐标系和国家坐标系间的坐标变换以及任何两种等角投影间的坐标变换。

书中不当之处,欢迎读者批评指正。

编著者

目 录

第一章 等角投影变换的理论和方法	(1)
§ 1 等角投影的一般公式.....	(1)
§ 2 地理坐标和球面极坐标间的变换.....	(5)
§ 3 球面投影、墨卡托投影和等角圆锥投影.....	(11)
§ 4 高斯-克吕格投影	(18)
§ 5 等角投影变换的微分方程.....	(20)
§ 6 等距离纬度、等量纬度的反解变换.....	(24)
§ 7 等角投影的解析变换.....	(26)
§ 8 等角投影的数值变换.....	(33)
§ 9 等角投影的第三类坐标变换.....	(36)
第二章 等角投影的反解变换和正解变换	(48)
§ 1 球面投影的反解变换.....	(48)
§ 2 墨卡托投影的反解变换.....	(49)
§ 3 等角圆锥投影的反解变换.....	(50)
§ 4 高斯-克吕格投影的反解变换	(52)
§ 5 等角圆锥投影和墨卡托投影间的 正解变换.....	(53)
§ 6 等角圆锥投影、墨卡托投影的邻带 坐标变换.....	(55)
§ 7 等角斜圆柱投影、等角斜圆锥投影的正 反解变换.....	(59)
第三章 等角投影的常数系数坐标变换	(78)
§ 1 等角投影常数系数坐标变换的一般公式.....	(78)

§ 2	墨卡托投影和高斯-克吕格投影间的常系数坐标变换	(80)
§ 3	墨卡托投影和等角圆锥投影间的常系数坐标变换	(91)
§ 4	高斯-克吕格投影和等角圆锥投影间的常系数坐标变换	(97)
§ 5	高斯-克吕格投影常系数正反解坐标变换	(104)
§ 6	高斯-克吕格投影三度、六度带常系数邻带坐标变换	(113)
§ 7	等角投影常系数坐标变换的 BASIC 程序及其应用举例	(120)
第四章	等角投影的数值变换	(131)
§ 1	等角投影数值变换的一般方法	(131)
§ 2	主元素消去方法	(132)
§ 3	最小二乘方法	(134)
§ 4	任意两等角投影间的数值变换	(135)
§ 5	高斯-克吕格投影局部坐标系和国家坐标系间的数值变换	(141)
§ 6	高斯-克吕格投影三度、六度带邻带坐标的数值变换	(144)
§ 7	等角投影正反解坐标的数值变换	(148)
第五章	地形图图幅元素的 BASIC 程序	(153)
§ 1	地形图图幅元素的计算公式及其子程序	(153)
§ 2	地形图图幅经纬度的计算及其子程序	(157)
§ 3	应用举例	(160)
§ 4	地形图邻带方里线坐标变换的数学方法	(166)
§ 5	1:2.5 万、1:5 万和 1:10 万地形图邻带方里线的坐标变换	(168)

附录 等角投影坐标变换 (CPCT) 通用程序包

一、等角投影正反解坐标变换的 BASIC 程序	(181)
二、等角投影常数系数坐标变换的 BASIC 程序	(190)
三、等角投影数值变换的 BASIC 程序	(196)
四、地形图图幅元素的 BASIC 程序	(202)
五、等角斜圆柱投影、等角斜圆锥投影正反解坐标 变换的 BASIC 程序	(209)
参考文献	(217)

第一章 等角投影变换的 理论和方法

§ 1 等角投影的一般公式

由地图投影理论知道，地图投影的一般方程式为

$$x = f_1(B, l), \quad y = f_2(B, l) \quad (1-1)$$

式中：B、l 是地球椭球面上点的地理坐标。

将地球椭球面（或球面）投影于平面上可以得到各种不同性质的地图投影。其中等角投影是指原面上任意两方向夹角投影后保持相等，即角度不变形。保持投影等角的条件是：

$$\theta = 90^\circ \text{ 和 } m = n \quad (1-2)$$

即投影后经纬线夹角为 90° ，经纬线长度比保持相等。

由地图投影理论知道，在一点任意方位角 α 方向的长度比公式为

$$\mu^2 = m^2 \cos^2 \alpha + mn \cos \theta \sin 2\alpha + n^2 \sin^2 \alpha \quad (1-3)$$

在 (1-3) 式中引入 (1-2) 式条件后求得

$$\mu = m = n \quad (1-4)$$

即在等角投影中长度比与方向无关，而仅是点位的函数。这也就意味着，椭球面上一无穷小圆在投影面上仍描写为一无穷小圆，即保持无穷小图形相似。

在 (1-2) 式中引入用偏导数表示的量，并经简单变换后，可得到用偏导数表示的等角条件式为

$$\frac{\partial x}{\partial l} = -\frac{r}{M} \frac{\partial y}{\partial B}, \quad \frac{\partial y}{\partial l} = +\frac{r}{M} \frac{\partial x}{\partial B} \quad (1-5)$$

式中：r 是纬线半径，M 是经线曲率半径。

引入等量纬度 q , 即 $dq = \frac{M}{r} dB$, 则有

$$q = \int_0^B \frac{M}{r} dB = \ln U = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) \left(\frac{1 - e \sin B}{1 + e \sin B} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1-6)$$

式中: e 是第一偏心率, $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$; a 、 b 是地球椭球的长短半轴。

于是 (1-5) 可写成

$$\frac{\partial x}{\partial l} = - \frac{\partial y}{\partial q}, \quad \frac{\partial y}{\partial l} = + \frac{\partial x}{\partial q} \quad (1-7)$$

称 (1-7) 式为柯西-黎曼 (Cauchy-Riemann) 方程。

上式第一式对 l 求导, 第二式对 q 求导, 并将其结果相加, 则有

$$\frac{\partial^2 x}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial l^2} = 0 \quad (1-8)$$

同样 (1-7) 式分别对 q 、 l 求导, 并将其结果相减, 则得到

$$\frac{\partial^2 y}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial l^2} = 0 \quad (1-9)$$

由此得到等角投影微分方程 (1-8)、(1-9) 式。它们是椭圆型的二阶偏微分方程, 称作拉普拉斯 (Laplace) 方程。

该方程的一般解是复变解析函数, 即

$$x + iy = f(q + il) \quad (1-10)$$

由 (1-10) 式可见, 等角投影的理论实质上是把一种等角投影 (例如墨卡托投影) 变换为另一种等角投影的理论。

引入复变量 $z = x + iy$, $\omega = q + il$, 则 (1-10) 式可写成

$$z = f(\omega) \quad (1-11)$$

而解析函数的导数为

$$\frac{dz}{d\omega} = x_q + iy_q = y_l - ix_l = x_q - ix_l = y_l + iy_q \quad (1-12)$$

(式中 x_q 、 y_q 、 x_l 、 y_l 为偏导数 $\frac{\partial x}{\partial q}$ 、 $\frac{\partial y}{\partial q}$ 、 $\frac{\partial x}{\partial l}$ 、 $\frac{\partial y}{\partial l}$ 的简写)。则导数的绝对值，即模等于

$$\left| \frac{dz}{d\omega} \right| = \sqrt{x_q^2 + y_q^2} = \sqrt{x_l^2 + y_l^2} = v \quad (1-13)$$

而幅角为

$$\arg \frac{dz}{d\omega} = \operatorname{arctg} \frac{y_q}{x_q} = \operatorname{arctg} \left(-\frac{x_l}{y_l} \right) \quad (1-14)$$

由地图投影理论知道，过一点的经线与纵坐标 x 正向夹角 γ 的计算公式为

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{y_l}{x_q} \quad (1-15)$$

注意到 (1-14) 式，则有

$$\arg \frac{dz}{d\omega} = \gamma \quad (1-16)$$

又等角投影的长度比公式为

$$\mu = m = n = \frac{1}{r} \sqrt{x_q^2 + y_q^2} = \frac{1}{r} \sqrt{x_l^2 + y_l^2} \quad (1-17)$$

$$\text{或} \quad mr = v \quad (1-18)$$

有了导数 $\frac{dz}{d\omega}$ 的绝对值 v 及其幅角后，可以写出

$$\frac{dz}{d\omega} = f'(\omega) = f'(q + il) = v(\cos \gamma + i \sin \gamma) = ve^{i\gamma}$$

$$\text{或} \quad \ln v + i\gamma = F(q + il) \quad (1-19)$$

据此柯西-黎曼 (Cauchy-Riemann) 方程式为

$$\frac{\partial \ln v}{\partial l} = -\frac{\partial \gamma}{\partial q}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial l} = \frac{\partial \ln v}{\partial q} \quad (1-20)$$

由此得到

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial l^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \ln v}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 \ln v}{\partial l^2} = 0 \quad (1-21)$$

由(1-8)、(1-9)和(1-21)式可知, x 、 y 和 $\ln v$ 、 γ 是变量 q 、 l 的调和函数。

地图投影反解变换的一般方程式为

$$q = f_1(x, y), \quad l = f_2(x, y) \quad (1-22)$$

此时等角投影的一般公式为

$$q + il = F(x + iy) \quad (1-23)$$

或

$$\omega = F(z) \quad (1-24)$$

同理可得到

$$\ln v + i\gamma = F(q + il) = \phi(x + iy) \quad (1-25)$$

由此有

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 l}{\partial y^2} = 0 \quad (1-26)$$

$$\frac{\partial^2 \ln v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ln v}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} = 0 \quad (1-27)$$

这样, q 、 l 和 $\ln v$ 、 γ 均是 x 、 y 的调和函数。

下面研究等角投影一般解(1-10)式的几个特例。

$$x + iy = c(q + il) \quad (1-28)$$

由此有

$$x = cq, \quad y = cl \quad (1-29)$$

(1-29)式就是墨卡托投影。

再来研究如下特例, 即

$$x + iy = (q + il)^n = P_n + iQ_n \quad (1-30)$$

按牛顿(Newton)二项式依次展开上式, 并将虚实部分分开后有

$$\begin{aligned}
P_0 &= 1, & Q_0 &= 0 \\
P_1 &= q, & Q_1 &= l \\
P_2 &= q^2 - l^2, & Q_2 &= 2ql \\
P_3 &= q^3 - 3ql^2, & Q_3 &= 3q^2l - l^3 \\
P_4 &= q^4 - 6q^2l^2 + l^4, & Q_4 &= 4q^3l - 4ql^3
\end{aligned} \tag{1-31}$$

多项式 P 和 Q 乃是拉普拉斯方程的解，并称之为齐次调和多项式。

我们有

$$\begin{aligned}
P_{n+1} + iQ_{n+1} &= (q + il)^{n+1} = (q + il)(q + il)^n \\
&= (q + il)(P_n + iQ_n)
\end{aligned}$$

$$\text{或 } P_{n+1} + iQ_{n+1} = qP_n + iP_n + iQ_n - lQ_n$$

由此得到计算调和多项式的递推公式为

$$\left. \begin{aligned}
P_{n+1} &= qP_n - lQ_n \\
Q_{n+1} &= lP_n + qQ_n
\end{aligned} \right\} \tag{1-32}$$

拉普拉斯方程是线性的和齐次的，因此等角投影的方程可以用调和多项式写成如下一般形式

$$\left. \begin{aligned}
x &= \sum_{k=0}^n (a_k P_k - b_k Q_k) \\
y &= \sum_{k=0}^n (b_k P_k + a_k Q_k)
\end{aligned} \right\} \tag{1-33}$$

§ 2 地理坐标和球面极坐标间的变换

方位、圆柱和圆锥投影有正轴、横轴和斜轴三种情形。对于方位投影来说，主要是应用斜方位投影。在讨论横轴、斜轴投影时，通常是把地球当作球，采用球面极坐标系来建立投影公式。

已知球面新极点 $Q(\varphi_0, \lambda_0)$ ，球面点 A 的地理坐标为 φ, λ ，而球面极坐标为 z, a 。下面讨论它们之间变换的数学模型。

一、由地理坐标 φ 、 λ 到球面极坐标 z 、 a 的变换
已知球面三角形 PQA(见图 1-1)。

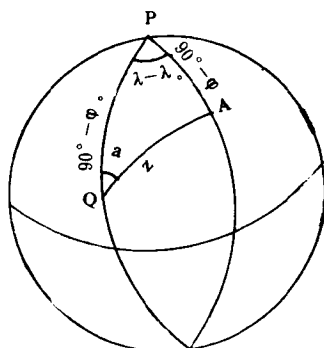


图 1-1

由余弦公式有

$$\cos z = \sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos(\lambda - \lambda_0)$$

由第一正余弦公式有

$$\sin z \cos a = \cos \varphi_0 \sin \varphi - \sin \varphi_0 \cos \varphi \cos(\lambda - \lambda_0)$$

由正弦公式有

$$\sin z \sin a = \cos \varphi \sin(\lambda - \lambda_0)$$

由此得到

$$\left. \begin{aligned} \cos z &= \sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos(\lambda - \lambda_0) \\ \operatorname{tg} a &= \frac{\cos \varphi \sin(\lambda - \lambda_0)}{\cos \varphi_0 \sin \varphi - \sin \varphi_0 \cos \varphi \cos(\lambda - \lambda_0)} \end{aligned} \right\} \quad (1-34)$$

二、由球面极坐标 z 、 a 到地理坐标 φ 、 λ 的变换

同样对于球面三角形 PQA, 由余弦公式有

$$\sin \varphi = \sin \varphi_0 \cos z + \cos \varphi_0 \sin z \cos a$$

由第一正余弦公式有

$$\cos \varphi \cos(\lambda - \lambda_0) = \cos \varphi_0 \cos z - \sin \varphi_0 \sin z \cos a$$

由正弦公式有

$$\cos \varphi \sin(\lambda - \lambda_0) = \sin z \sin a$$

由此得到

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi &= \sin \varphi_0 \cos z + \cos \varphi_0 \sin z \cos a \\ \operatorname{tg}(\lambda - \lambda_0) &= \frac{\sin z \sin a}{\cos \varphi_0 \cos z - \sin \varphi_0 \sin z \cos a} \end{aligned} \right\} \quad (1-35)$$

三、程序设计和应用举例

在 $\varphi, \lambda \rightarrow z, a$ 程序设计中, (1-34) 式第二式分析如下:

$$\operatorname{tg} a = \frac{\cos \varphi \sin(\lambda - \lambda_0)}{\cos \varphi_0 \sin \varphi - \sin \varphi_0 \cos \varphi \cos(\lambda - \lambda_0)} = \frac{C}{D}$$

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = 0 \begin{cases} \varphi - \varphi_0 > 0, a = 0 \\ \varphi - \varphi_0 = 0, a \text{ 不定} \\ \varphi - \varphi_0 < 0, a = 180^\circ \end{cases}$$

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 > 0 \begin{cases} D > 0, 0^\circ < a < 90^\circ \\ D = 0, a = 90^\circ \\ D < 0, 90^\circ < a < 180^\circ \end{cases}$$

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 < 0 \begin{cases} D < 0, 180^\circ < a < 270^\circ \\ D = 0, a = 270^\circ \\ D > 0, 270^\circ < a < 360^\circ \end{cases}$$

1. $\varphi, \lambda \rightarrow z, \alpha$ 子程序

```

570: CZ=SIN (B)*SIN      SIN (B0)*COS (
      (B0)+COS (B)*      DL)
      COS (B0)*COS (    590: IF DL<0 THEN 59
      L-L0)              8
572: Z=ACS (CZ).          592: IF D=0 LET A=PI/
      RETURN            2: GOTO 604
574: DL=L-L0: DB=B-B     594: IF D>0 LET A=
      0                 ATN (C/D): GOTO
576: IF DL<>0 GOTO 5      604
      84
578: IF DB=0 LET A=0      596: A=ATN (C/D)+PI:
      : GOTO 604         GOTO 604
580: IF DB>0 LET A=0     598: IF D=0 LET A=3*
      : GOTO 604         PI/2: GOTO 604
582: A=PI: GOTO 604      600: IF D<0 LET A=
584: C=COS (B)*SIN      ATN (C/D)+PI:
      (DL)              GOTO 604
586: D=SIN (B)*COS      602: A=ATN (C/D)+2*
      (B0)-COS (B)*      PI
                        604: RETURN

```

(1-1)

【算 例】

主程序

```

610: RADIAN : INPUT      ;",": "L =" : L
      "B0="; B0, "B0="  624: B=DEG (B)*PI/18
      : L0              0: L=DEG (L)*PI/
612: LPRINT "B0="; B    180
      0; ",": "L0="; L0  626: GOSUB 570
614: INPUT "N1="; N1    628: Z=2*180/PI: T=
      : LPRINT "N1=";   DMS (Z)
      N1               630: GOSUB 574
616: B0=DEG (B0)*PI/    632: A=A*180/PI: T1=
      180: L0=DEG (L0   DMS (A)
      )*PI/180          634: LPRINT "Z="; T
618: FOR I=1 TO N1      636: LPRINT "A="; T1
620: INPUT "B =" ; B    638: NEXT I
      "L =" ; L         640: END
622: LPRINT "B =" ; B

```

(1-2)