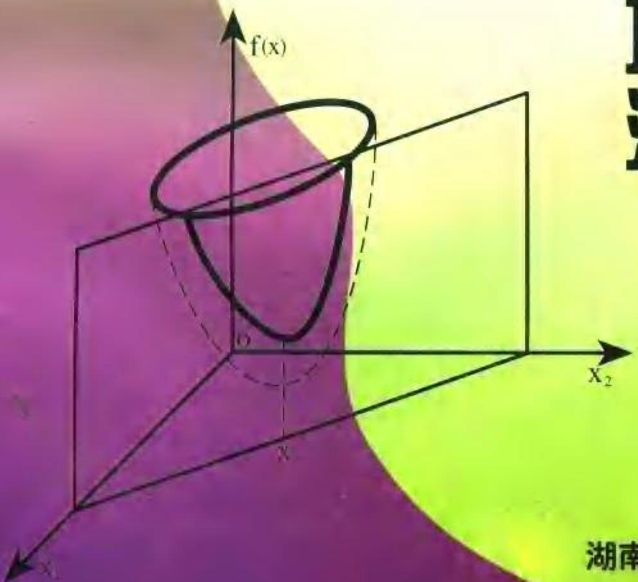
财经类高等数学系列教材

经济学科中的 5

李庆高 主编

数学原理与方法



湖南大学出版社

经济学科中的数学原理与方法

——Jingji Xueke Zhong de Shuxue Yuanli yu Fangfa

李 庆 高　主编

□责任编辑　张高明　雷晓峰
□装帧设计　吴颖辉
□出版发行　湖南大学出版社
　　　　　　社址　长沙市岳麓山　　邮码　410082
　　　　　　电话　0731－8821691　0731－8821315
□经　　销　湖南省新华书店
□印　　装　长沙交通学院印刷厂

□开本　850×1168　32 开　□印张　20.25　□字数　508 千
□版次　1998 年 8 月第 1 版　□1998 年 8 月第 1 次印刷
□印数　1—2 000 册
□书号　ISBN 7—81053—118—2/F・5
□定价　28.00 元

财经类高等数学系列教材

主　　编　郭青峰

副 主 编　李庆高　王明惠

　　　　　杨冬莲　熊福生

（第五分册）

经济学科中的
数学原理与方法

本册主编　李庆高

湖南大学出版社

前　言

自1838年古诺发表《财富理论的数学原理研究》一书以来，经济学便与数学结下了不解之缘。无论是瓦尔拉斯提出的一般经济均衡理论，或者是德布罗所创立的数理经济学，费瑞希与丁伯根创立的计量经济学，还是萨缪尔森所代表的西方经济学，都无一不是深深扎根于数学沃土之中。经济学的发展，至少是实证经济学的发展，已经与数学密不可分。因此，未来社会对高等财经人才的数学素质和数学水平的要求越来越高。为了适应这一发展趋势的需要，我们在出版了《财经类高等数学系列教材》的第一、二、三、四分册的基础上，编写了这本供财经类硕士研究生使用的第五分册《经济学科中的数学原理与方法》。

本书包括三篇。第一篇为投入产出方法。投入产出模型既能反映各部门经济的技术水平，又能揭示各部门经济之间技术经济的联系，是研究国民经济综合平衡和经济预测的重要科学方法之一。自1936年瓦西里·列昂捷夫首次提出以来，得到了很好的发展和应用。现在，几乎所有国家都编制了投入产出表。在我国不仅有全国性投入产出表，而且各省(自治区)乃至不少县(市)都编制了自己的投入产出表。利用投入产出技术进行经济管理与经济预测，已是高等财经人才必备的知识。因此，我们比较全面地介绍了全国性和地区性投入产出表，以及投入产出技术在物价与环保领域中的应用。为读者提供了投入产出模型的数学结构、原理、方法和实用范例。

第二篇为最优化方法，无论是在宏观经济领域还是在微观经济领域，数学都大有用武之地。但比较而言，数学还是在微观经济领域中应用得更为成功。而成熟的微观经济学是建立在“消费者追求最大效用，生产者追求最大利润”的最优化原理之上的

理论。因此，最优化方法便成了研究微观经济学最理想的数学工具。最优化方法包含了运筹学中许多重要分支，这些方法从本世纪 30 年代开始陆续问世，在第二次世界大战中开始被应用，并在战后得到了迅速发展。特别是电子计算机的出现，使得最优化方法如虎添翼，给应用者带来了巨大的经济效益。尤其是在工业生产和通讯领域中，只要建立数学模型的数据真实可靠，利用最优化方法几乎都可以收到立竿见影的效果。由于篇幅所限，在本书中我们只介绍运筹学中的线性规划、整数规划、目标规划、非线性规划和动态规划中最基本的内容和常用方法。掌握并运用这些原理和方法处理经济管理中的日常工作，无疑是高等财经人才必备的能力。

第三篇为动态经济分析方法，任何经济活动都不是静止的，而是一个随着时间的推移不断变化的动态过程。因此，有必要用数学方法对经济活动进行动态分析。特别是在宏观经济领域中，用数学方法研究国民收入与消费、积累之间的关系，国民收入的增长速度与投资增长速度之间的关系，掌握国民经济的增长率与积累率、投资率之间的内在联系，以达到对经济过程的有效控制，使经济得到最优增长。而微分方程与差分方程的稳定性理论为刻划经济的增长性态提供了有效的数学工具；二阶及高阶微分方程与差分方程为经济活动的周期现象和波动现象提供了生动的数学描述；微分方程与差分方程的方程组系统则是经济控制论的数学基础。因此，我们对一阶、二阶、高阶微分方程与差分方程，以及微分方程组与差分方程组联立系统的基本理论、基本方法和在经济中的应用作了比较全面系统的介绍。

此外，由于任何经济活动都是在具有不确定性的环境中进行的，诸如市场价格、通货膨胀率、就业率、储蓄额、投资额等等都是随机变化的。要对经济活动进行随机分析，还有必要引进相应的数学工具。因此，我们在第十一章对随机过程作了比较系统

的介绍。

《财经类高等数学系列教材》由湖南财经学院党委书记兼院长郭青峰教授主编。本册由李庆高教授主编。其中袁桓教授编写第一篇(第1～3章);李庆高教授编写第二篇(第4～8章);苏醒教授编写第三篇中的第9～10章;郭青峰教授编写第11章。书中加星号的内容供读者参考。

本书的出版,得到了湖南财经学院科研研究生处、校产办和湖南大学出版社的大力支持,在此一并致以衷心的感谢。

编者

1997年10月

目　次

第一篇　投入产出方法

第二篇　最优化方法

第三篇 动态分析方法

第 11 章　随机过程初步

第一篇　投入产出方法

投入产出方法，是研究经济系统各个部门之间投入与产出的相互依存关系的经济数量分析方法，也即经济数学方法。它属于交叉科学或软科学。

本篇主要介绍投入产出方法中的经济数学模型，对其中的一些经济学科不作过多阐述。

第1章　全国性投入产出综合平衡模型

本章主要介绍全国性价值型投入产出综合平衡模型和实物型投入产出综合平衡模型。这是按计量单位不同而划分的。价值型投入产出表以货币单位作为计量单位，目前世界上所编制的，大部分都属于这种类型。实物型投入产出表中大多数部门是以实物度量单位为基础编制的。由于各种主要产品的实物量指标在国民经济计划中有很重要的地位，编制实物型投入产出表也非常重要。

1.1　全国价值型投入产出综合平衡模型

这种模型可以较全面系统地表现出国民经济各物质生产部门之间，在产品的生产和分配上存在着的相互依存、相互制约的

数量关系。它是建立在一张所谓投入产出表的基础之上的。由这张投入产出表得出各种线性方程组，即称之为投入产出模型。它是经济和数学的有机结合。

1.1.1 投入产出综合平衡模型的基本结构

首先建立投入产出平衡表，这是最基础、最重要，也是最难的工作。它的准确与否，直接关系到模型的使用价值及对实际计划工作产生的深远影响。

我们把整个国民经济的物质生产部门分为 n 个部门。它可能是冶金、机械、电力、种植、养殖、林业及服务于生产的邮电和运输业等等。

我们记

X_i ——第 i 个物质生产部门的年产品总量($i=1,2,\cdots,n$)；

Y_i ——第 i 个物质生产部门的年最终产品数量($i=1,2,\cdots,n$)；

X_{ij}——第 i 个物质生产部门在一年内分配给第 j 个物质生产部门消耗了的产品数量($i,j=1,2,\cdots,n$)；

d_j ——第 j 个物质生产部门一年的折旧额($j=1,2,\cdots,n$)；

v_j ——第 j 个物质生产部门劳动者在一年内必要劳动新创造的价值(劳动报酬)($j=1,2,\cdots,n$)；

m_j ——第 j 个物质生产部门劳动者在一年内为社会劳动新创造的价值，即纯收入(利润和税金)($j=1,2,\cdots,n$)。从而可得到如下的投入产出综合平衡表，即表 1.1.1。

表 1.1.1 用双线分割为四部分，称为一、二、三、四象限。

表 1.1.1　价值型投入产出综合平衡表

		中间产品					最终产品				总产出
		1	2	…	n	小计	基建大修理	积累	消费	小计	
物质消耗	1	X_{11}	X_{12}	…	X_{1n}	U_1	g_1	K_1	W_1	Y_1	X_1
	2	X_{21}	X_{22}	…	X_{2n}	U_2	g_2	K_2	W_2	Y_2	X_2
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	n	X_{n1}	X_{n2}	…	X_{nn}	U_n	g_n	K_n	W_n	Y_n	X_n
	小计	C_1	C_2	…	C_n	C	G	K	W	Y	X
	折旧	d_1	d_2	…	d_n	D					
活劳动消耗	劳动报酬	V_1	V_2	…	V_n	V					
	社会纯收入	m_1	m_2	…	m_n	M					
	小计	n_1	n_2	…	n_n	N					
总投入		X_1	X_2	…	X_n	X					

第一象限由 n 个物质生产部门纵横交叉组成。横行与纵列由同名称同顺序的生产部门组成，它反映了各部门之间的技术经济联系。这是投入产出表的核心部分。它为我们分析部门投入产出比例关系及运用数学工具进行平衡计算提供了客观基础。

第二象限反映了各物质生产部门的年总产品中，可供社会最终消费或使用的产品。它可以体现积累与消费的比例及构成，体现国民收入的实物构成。

第三象限主要反映各物质生产部门净产出价值，即新创造价值，反映国民收入的初次分配，及必要劳动与剩余劳动的比例。

第四象限从性质上讲主要反映国民收入的再分配过程。因目前对它的研究还很少，故一般在编制投入产出综合平衡模型时，常将其略去。

由表 1.1.1，可得到投入产出综合平衡模型。

分配方程组：

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} + Y_i = X_i \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \qquad (1.1.1)$$

式中的$\sum_{j=1}^{n} X_{ij}$是部门 i 的产品分配给各生产部门的生产性消耗总和，Y_i 是部门 i 的产品扣除生产性消耗后，用于最终消费的总量。这两者之和，恰好为部门 i 的总产出量 X_i。它说明各部门的总产品等于其中间产品与最终产品的价值之和。

生产方程组：

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} + d_j + v_j + m_j = X_j \qquad (j = 1,2,\cdots,n)$$

(1.1.2)

它说明各部门的产品的价值构成。式中的第一项$\sum_{i=1}^{n} X_{ij}$为第 j 个生产部门劳动对象的物质消耗总和，即物化劳动所创造的价值。d_j 为第 j 个生产部门折旧额，v_j 为第 j 个生产部门劳动者必要劳动所创造的价值，m_j 为第 j 个生产部门劳动者为社会劳动所创造的价值。(1.1.2)式表明了生产资料转移价值加上新创造价值，正好等于总产品价值。

表 1.1.1 存在如下平衡关系式。

1)当 $i_0=j_0$ 时，有

$$\sum_{j=1}^{n} X_{i_0 j} + Y_{i_0} = \sum_{i=1}^{n} X_{ij_0} + d_{j_0} + v_{j_0} + m_{j_0} \quad (1.1.3)$$

即第 i_0 个物质生产部门的总产出量应等于第 j_0 个物质生产部门的总产品价值.

2)
$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{j=1}^{n} (d_j + v_j + m_j) \qquad (1.1.4)$$

即对整个国民经济来讲，第二象限与第三象限在总量上相等。

1.1.2 直接消耗与间接消耗概念的引入

直接消耗系数反映某个生产部门在单位产品生产过程中对

各部门产品的直接消耗量。计算公式如下：

$$a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j} \qquad (i,j = 1,2,\cdots,n) \tag{1.1.5}$$

它表示生产单位 j 产品所消耗产品 i 的数量。注意：在计算 a_{ij} 时，所用的 X_{ij}是计算时期内部门 j 对部门 i 的实际消耗量，而不是在同一时期里部门 i 流入部门 j 的部门的流量。a_{ij}反映了部门 i,j 之间的生产技术性联系，故也称之为技术系数。直接消耗系数的数值大小，取决于如下的三个方面因素：第一，该部门的技术水平和管理水平；第二，该部门的产品结构，一个部门中包含很多种不同的产品，这些产品对原材料、辅助材料、燃料等的消耗水平相差很大。所以产品结构变动对部门的直接消耗系数的数值影响很大；第三，价格变动，各部门价格水平的相对变化对价值单位计量的直接消耗系数有重大影响，而以实物单位计量的直接消耗系数则不受价格变动的影响。

由(1.1.5)式可得

$$X_{ij} = a_{ij}X_j \qquad (i,j = 1,2,\cdots,n) \tag{1.1.6}$$

将(1.1.6)式代入(1.1.1)式，得

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j + Y_i = X_i \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{1.1.7}$$

将(1.1.7)式写成矩阵形式，可得矩阵形式的分配方程：

$$AX + Y = X \tag{1.1.8}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

A 称为直接消耗系数矩阵，X 称为总产品列向量，Y 称为最终产品列向量。

将(1.1.8)式写为

$$(I-A)X=Y \tag{1.1.9}$$

I 为 n 阶单位矩阵. 矩阵 A 为非负矩阵,且具有实际经济意义。可证明$(I-A)$为一非奇异矩阵,即$|I-A|\neq 0$,所以$(I-A)$的逆矩阵存在,从而可得

$$X=(I-A)^{-1}Y \tag{1.1.10}$$

由(1.1.10)式可知,当已知最终产品列向量 Y 以后,即可由此式求出各部门的总产品列向量 X。

投入产出平衡模型最早是由列昂捷夫提出来的,故$(I-A)^{-1}$也称之为列昂捷夫矩阵。方程(1.1.8)是投入产出模型中的基本平衡关系式,是进行一系列计算和分析的基础。

再将(1.1.6)式代入(1.1.2)式,可得:

$$\begin{cases} a_{11}X_1+a_{21}X_1+\cdots+a_{n1}X_1+d_1+v_1+m_1=X_1 \\ a_{12}X_2+a_{22}X_2+\cdots+a_{n2}X_2+d_2+v_2+m_2=X_2 \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ a_{1n}X_n+a_{2n}X_n+\cdots+a_{nn}X_n+d_n+v_n+m_n=X_n \end{cases} \tag{1.1.11}$$

我们用矩阵 C 表示如下的对角矩阵:

$$C=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^{n}a_{i2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{i=1}^{n}a_{in} \end{bmatrix}$$

它有重要的经济意义,可称为中间投入系数矩阵,或称劳动对象

投入系数矩阵。其主对角线上的元素$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}(j=1,2,\cdots,n)$，说明在第 j 个生产部门的产值中消耗的劳动对象(原材料、辅助材料、燃料、电力等)所占的比重，也即单位产品中物化劳动所占的比重。

用 D,V,M 分别表示各部门固定资产折旧列向量、劳动报酬列向量和社会纯收入列向量，即

$$D=\begin{bmatrix}d_1\\d_2\\\vdots\\d_n\end{bmatrix},V=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{bmatrix},M=\begin{bmatrix}m_1\\m_2\\\vdots\\m_n\end{bmatrix}$$

令 $Z=D+V+M$，(1.1.11)式可写为

$$CX+Z=X \tag{1.1.12}$$

即

$$(I-C)X=Z$$

可证$(I-C)^{-1}$存在，故有

$$X=(I-C)^{-1}Z \tag{1.1.13}$$

也可将(1.1.11)式写为

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}X_j+Z_j=X_j \quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{1.1.14}$$

其中 $Z_j=d_j+v_j+m_j(j=1,2,\cdots,n)$，而

$$Z=\begin{bmatrix}Z_1\\Z_2\\\vdots\\Z_n\end{bmatrix}$$

由(1.1.14)式可得