高中数学
总复习

北京出版社

高中数学
总复习

高中数学总复习

北京市教育局教学研究部 编

北京出版社

高 中 数 学 总 复 习

北京市教育局教学研究部 编

*

北 京 出 版 社 出 版

（北京北三环中路6号）

新华书店北京发行所发行

北 京 印 刷 三 厂 印 刷

*

787×1092毫米 32开本 12.625印张 276,000字

1983年2月第1版 1990年8月第5版第10次印刷

印数 1,612,001—1,644,730

ISBN 7-200-00424-3/G·102

定 价：4.35元

修订再版编写说明

为了做好初、高中中学毕业生的总复习工作，我部在1983年约请了北京市部分有经验的中学教师，共同编写了中学语文、政治、历史、地理、数学、物理、化学、生物、英语、俄语等科的总复习教学参考书。经过中学几年使用后反映：这套总复习教学参考书符合教学大纲要求，能起到使学生牢固地掌握知识的作用。为了适应目前的教学要求，我部根据1987年国家教委制订的全日制中学各学科的教学大纲，按现行的使用课本，对原出版的中学各学科总复习教学参考书进行了全面的修订，加强了基本内容的系统性、综合性，有些学科增加了标准化试题和练习。为了在总复习中使学生更好地掌握、运用基础知识和基本技能，提高分析问题、解决问题的能力，书中精选了一定数量的例题、练习和习题，供复习时使用。

本书是《高中数学总复习》教学参考书。为了贯彻落实教育部提出的高中数学教学的两种要求，我们组织部分数学教师根据两种教学要求重新编写了这本书。本书内容由教育部颁发的“较高要求”的必学部分组成，其中“基本要求”内容是本书的主体，非基本要求部分用小号字排印。本书的编排顺序也是按教育部颁布的《高中数学教学纲要》的顺序编排的，内容分为代数、立体几何、平面解析几何。每部分按知识系统分为若干章。为了便于教学，每章又分若干单元，每个单元的开始简述了复习提要，然后，选配了适量的典型例题和练习题。书末附有各章练习题、习题和综合题的答案或提示。

参加本书编写的有：欧阳东方、贺信淳、李万钟、储瑞年、任光辉、臧龙光、冯士腾、陈俊辉、孔令颐、马国璋、王占元等同志。全书由北京市教育局教学研究部数学教研室统编，刘嘉琨、刘东同志审阅。

由于我们的水平有限，有错误和不妥之处，欢迎批评指正。

北京市教育局教学研究部

1988年6月

目　录

第一部分　代　数

第一章　幂函数、指数函数和对数函数……………… (1)
一、集合、映射…………………………………… (1)
二、函数…………………………………………… (11)
第二章　三角函数………………………………… (38)
一、任意角的三角函数…………………………… (38)
二、同角三角函数关系…………………………… (46)
第三章　两角和差的三角函数…………………… (60)
一、两角和差的三角函数………………………… (60)
二、三角函数的积化和差与和差化积…………… (69)
第四章　反三角函数和简单三角方程…………… (78)
一、反三角函数…………………………………… (78)
二、简单三角方程………………………………… (85)
第五章　数列与数学归纳法……………………… (97)
一、数列的一般概念……………………………… (97)
二、等差数列与等比数列………………………… (98)
三、数学归纳法…………………………………… (107)
第六章　不等式…………………………………… (116)
一、不等式的概念………………………………… (116)
二、不等式的性质………………………………… (117)
三、不等式(组)的解法…………………………… (117)

四、不等式的证明……………………………… (123)
第七章 行列式和线性方程组……………………… (135)
一、行列式……………………………………… (135)
二、线性方程组………………………………… (136)
第八章 复数……………………………………… (147)
一、复数的概念………………………………… (147)
二、复数的运算………………………………… (149)
第九章 排列、组合和二项式定理………………… (161)
一、排列与组合………………………………… (161)
二、二项式定理………………………………… (167)
第十章 概率……………………………………… (176)
一、随机事件的概率…………………………… (176)
二、等可能事件的概率(概率的古典定义)………… (177)
三、互斥事件有一个发生的概率………………… (177)
四、相互独立事件同时发生的概率……………… (177)
五、独立重复试验的概率………………………… (178)

第二部分 立体几何

第一章 直线和平面……………………………… (193)
一、公理………………………………………… (193)
二、空间的直线、平面之间的位置关系…………… (193)
三、定义和定理………………………………… (194)
四、关于角的概念……………………………… (197)
五、关于距离的概念…………………………… (198)
第二章 多面体和旋转体………………………… (223)
一、多面体……………………………………… (223)
二、旋转体……………………………………… (226)

第三部分　平面解析几何

第一章　曲线和方程……………………………………(255)
一、平面直角坐标系………………………………(255)
二、基本公式………………………………………(255)
三、曲线和方程……………………………………(259)
第二章　直线………………………………………(268)
一、直线的倾斜角和斜率…………………………(268)
二、直线的方程……………………………………(269)
三、两条直线的位置关系…………………………(270)
四、点到直线的距离………………………………(271)
第三章　圆锥曲线…………………………………(282)
一、圆………………………………………………(282)
二、椭圆……………………………………………(290)
三、双曲线…………………………………………(297)
四、抛物线…………………………………………(302)
五、坐标轴的平移…………………………………(309)
第四章　参数方程和极坐标………………………(324)
一、参数方程………………………………………(324)
二、极坐标…………………………………………(337)
综合题………………………………………………(357)
练习、习题和综合题答案…………………………(368)

第一部分　代　数

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

一、集合、映射

1. 集合

集合(简称集)，是指具有某种属性的对象的全体．集合里的各个对象叫做这个集合的元素．

集合具有如下三个特征：

确定性——对于任何一个对象，都能够确定它是不是某一给定集合的元素．

元素互异性——一个给定集合中所含的任何两个元素都是不同的对象．即集合里的元素没有重复现象．

元素无序性——对于一个集合，通常不考虑它的元素之间的顺序．两个集合只要它们所含的元素完全相同，就是同一个集合．

不含任何元素的集合叫做空集，记作 ϕ．

集合的常用表示方法：

(1) 把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法，叫做列举法．

(2) 把集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号

内表示集合的方法，叫做描述法.

自然数集，记作N；整数集，记作Z；有理数集，记作Q；实数集，记作R；复数集，记作C.

2. 子集、交集、并集、补集

(1) 子集：对于两个集合A与B，如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素，那么集合A叫做集合B的子集，记作

$$A\subseteq B \text{ 或 } B\supseteq A.$$

如果A是B的子集，并且B中至少有一个元素不属于A，那么集合A叫做集合B的真子集，记作

$$A\subset B \text{ 或 } B\supset A.$$

对于两个集合A、B，如果$A\subseteq B$，同时$B\subseteq A$，那么集合A与集合B叫做相等，记作

$$A=B.$$

任何一个集合是它本身的子集；空集是任何集合的子集；空集是任何非空集合的真子集.

对于集合A，B，C.

① 如果$A\subseteq B$，$B\subseteq C$，那么$A\subseteq C$；

② 如果$A\subset B$，$B\subset C$，那么$A\subset C$.

(2) 交集：由所有属于集合A且属于集合B的元素所组成的集合，叫做A，B的交集，记作

$$A\cap B.$$

即 $$A\cap B=\{x\,|\,x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

对于任何集合A，B，有

$$A\cap A=A,\quad A\cap\phi=\phi,\quad A\cap B=B\cap A.$$

(3) 并集：由所有属于集合A或属于集合B的元素所组

成的集合，叫做 A，B 的并集，记作

$$A\cup B$$

即 $$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

对于任何集合 A，B，有

$$A\cup A=A,\quad A\cup\phi=A,\quad A\cup B=B\cup A.$$

(4) 补集：在研究集合与集合之间的关系时，在某些情况下，这些集合都是某一个给定的集合的子集，这个给定的集合可以看作一个全集，用符号 I 表示．也就是说，全集含有所要研究的各个集合的全部元素．

已知全集 I，集合 $A\subseteq I$，由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做集合 A 在集合 I 中的补集，记作
$\overline{A}$，即

$$\overline{A}=\{x\mid x\in I \text{ 且 } x\notin A\}.$$

对于任何集合 A，有

$$A\cup\overline{A}=I,\quad A\cap\overline{A}=\phi,\quad \overline{\overline{A}}=A,$$

其中 $\overline{\overline{A}}=(\overline{\overline{A}})$ 表示 $\overline{A}$ 在 I 中的补集．

3．映射、一一映射、逆映射

(1) 映射：设 A，B 是两个集合，如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中的任何一个元素，在集合 B 中都有唯一的元素和它对应，这样的对应（包括集合 A，B 及从 A 到 B 的对应法则 f）叫做从集合 A 到集合 B 的映射，记作

$$f: A\to B.$$

如果给定一个从集合 A 到集合 B 的映射，那么，和 A 中的元素 a 对应的 B 中的元素 b 叫做 a 的象，a 叫做 b 的原象．

如果 $a\in A$，$b\in B$，f 使 a 映射到 b，记作 $f: a\to b$，或

$b=f(a)$.

(2) 一一映射：设 A，B 是两个集合，$f:A\to B$ 是从集合 A 到集合 B 的映射，如果在这个映射的作用下，对于集合 A 中的不同元素，在集合 B 中有不同的象，而且 B 中每一个元素都有原象，那么这个映射就叫做 A 到 B 上的一一映射.

(3) 逆映射：设 $f:A\to B$ 是集合 A 到集合 B 上的一一映射，如果对于 B 中的每一个元素 b，使 b 在 A 中的原象 a 和它对应，这样所得的映射叫做映射 $f:A\to B$ 的逆映射，记作 $f^{-1}:B\to A$.

显然 $f:A\to B$ 也是映射 $f^{-1}:B\to A$ 的逆映射.

4. 在两个有因果关系的事件 A 和 B 之间的充要条件

(1) 如果 $A\Rightarrow B$，那么 A 是 B 成立的充分条件.

(2) 如果 $B\Rightarrow A$，那么 A 是 B 成立的必要条件.

(3) 如果 A 既是 B 成立的充分条件，又是 B 成立的必要条件，那么 A 是 B 成立的充要条件.

例 1 用列举法表示下列各集合：

(1) {不大于 5 的自然数}；

(2) $\{x\mid x^2-2x-8<0,\ x\in Z\}$；

(3) $\{(x,y)\mid x+2y=7,\ x、y\in N\}$.

解 (1) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$；

(2) $\{x\mid -2<x<4,\ x\in Z\}=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$；

(3) $\{(1, 3), (3, 2), (5, 1)\}$.

例 2 用描述法表示下列集合：

(1) 所有的 10 的整数次幂；

(2) $\{1, -3, 5, -7, 9, -11, \cdots\cdots\}$.

解 (1) $\{x\mid x=10^n,\ n\in Z\}$；

(2) $\{x\,|\,x=(-1)^{n+1}(2n-1),\ n\in N\}$.

例 3 若 $A=\{x\,|\,x=2n,\ n\in Z\}$,

$B=\{x\,|\,x=2n+1,\ n\in Z\}$,

用“$\in$”、“$\overline{\in}$”、“$\subset$”等符号填空:

(1) $\{2,8\}\underline{\quad}A$; (2) $107\underline{\quad}A$; (3) $A\underline{\quad}Z$;

(4) $\phi\underline{\quad}B$; (5) $0\underline{\quad}N$; (6) $\{0\}\underline{\quad}A$;

(7) $A\cap B\underline{\quad}\{0\}$; (8) $A\cup B\underline{\quad}N$; (9) $0\underline{\quad}\{0\}$.

解 (1) $\{2,8\}\subseteq A$; (2) $107\,\overline{\in}\,A$; (3) $A\subseteq Z$;
(4) $\phi\subseteq B$; (5) $0\,\overline{\in}\,N$; (6) $\{0\}\subseteq A$;
(7) $A\cap B\subseteq\{0\}$; (8) $A\cup B\supseteq N$; (9) $0\in\{0\}$.

例 4 设 $I=\{1,2,3,4,5,6\}$, $\overline{A}=\{1,3,4\}$, $\overline{B}=\{2,4,5\}$. 求 A; B; $A\cup B$; $A\cap B$; $\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}$; $\overline{A\cup\overline{B}}$; $A\cap\overline{(A\cup\overline{B})}$; $\overline{\phi}$.

解 $A=\{2,5,6\}$; $B=\{1,3,6\}$; $A\cup B=\{1,2,3,5,6\}$; $A\cap B=\{6\}$; $\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}=\{1,2,3,5,6\}$; $\overline{A\cup\overline{B}}=\{1,3\}$; $A\cap\overline{(A\cup\overline{B})}=\phi$; $\overline{\phi}=I$.

例 5 已知集合 $A=\left\{x\,|\,x\in R \text{ 且 } x\neq\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4},\ n\in Z\right\}$, $B=\{y\,|\,y\in R\}$,集合 A 中的元素按对应关系 $f:x\longrightarrow y=\text{tg}2x$ 和 B 中的元素对应.

(1) 求 A 的元素 $\frac{\pi}{6}$ 和arctg2 的象;

(2) 求 B 的元素 3 的原象;

(3) 上述对应 f 是否为一一映射? 为什么?

解 (1) $\because$ A 中的元素 $x=\frac{\pi}{6}$,

$\therefore$ $y=\text{tg}\,2x=\text{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$,

即　A中的元素$\frac{\pi}{6}$的象为$\sqrt{3}$；

$\because$　A 中的元素 $x=\operatorname{arctg} 2$，$\therefore \operatorname{tg} x=2$。

$\therefore$　A 中的元素 arctg 2 的象为：

$$y=\operatorname{tg} 2(\operatorname{arctg} 2)=\operatorname{tg} 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}=-\frac{4}{3}.$$

(2) $\because$　$y=3$，即 $\operatorname{tg} 2x=3$，

$\therefore 2x=k\pi+\operatorname{arctg} 3$，$(k\in Z)$。

即　$x=\frac{1}{2}k\pi+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 3$，$(k\in Z)$。

$\therefore$　B中的元素 3 的原象为：

$$x=\frac{1}{2}k\pi+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 3,\ (k\in Z).$$

(3) 上述对应 f 不是一一映射.

因为集合 A 中的不同元素在集合 B 中有相同的象，如

$$x=\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 3\longrightarrow y=3,$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 3\longrightarrow y=3.$$

练　习　一

1．说出下面集合中的元素：

(1) {它的 5 倍比它的 3 倍多 8 的数}；

(2) {平方后比原数多 2 的数}；

(3) {绝对值小于 4 的自然数}。

2．用列举法表示下列各集合：

(1) 大于 2 小于 12 的所有偶数的集合；

(2) 8 的所有约数的集合；

(3) 一元二次方程 $x^2-6x+1=0$ 的所有解的集合；

(4) 不等式 $x^2-x-6<0$ 的整数解的集合；

(5) $\left\{x \mid x=\dfrac{m}{n},\ m\in Z,\ |m|<2,\ n\in N,\ n\leqslant 3\right\}$；

(6) $\{(x,y) \mid x\in N,\ y\in N,\ x+y=6\}$。

3. 用描述法表示下列集合：

(1) 全体奇数；

(2) $\{2,4,8,16,32,64\}$；

(3) 不等式组 $\begin{cases} x^2-2x-3<0, \\ x+1\geqslant 0 \end{cases}$ 的整数解的集合；

(4) $\left\{\dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{4}{5},\ \dfrac{5}{6},\ \dfrac{6}{7},\ \cdots\cdots\right\}$。

4. 设 $I=\{0,1,2,3,4,5\}$，$A=\{0,1,2,3\}$，

$B=\{1,2,3\}$，$C=\{0\}$，指出下列式子是否正确.

(1) $0\in A$；　(2) $\{0\}\in A$；(3) $\{0\}\subset A$；(4) $0\subset C$；

(5) $B\subset A$；　(6) $\phi\in A$；　(7) $\phi\subset B$；　(8) $\phi=C$；

(9) $\overline{A}\in\overline{B}$；(10) $C\subset\overline{B}$；(11) $A\cup B=A$；

(12) $A\cap B=C$。

5. 填空：

(1) $\{a,b,\_\_\}\cap\{c,d,\_\_\}=\{b,c\}$；

(2) $\{a,b,\_\_\}\cup\{b,d,e\}=\{a,b,c,d,\_\_\}$；

(3) $\{a,d,\_\_,\ \_\_\}\cap\{d,c,e,\_\_,\ \_\_\}=\{a,b,\ e,\_\_\}$。

6. 填空：

(1) $A=\{(x^2-y^2)(2x+y)$ 所含一次因式$\}$，

$B=\{(4x^2-y^2)(x+y)$ 所含一次因式$\}$。

则 $A\cup B=$______；$A\cap B=$______；

(2) 若 $A\cup B=I$，$B\subset A$，则 $\overline{A}=$______；

(3) 若 $I=R$，则 $\overline{Q}=$______，$Q\cap\overline{Q}=$______；

(4) 对于集合 A 与 B，如果 $A\subset B$，则 $A\cap B=$______，$\overline{A\cup B}=$______，$A\cup(A\cap B)=$______，$A\cap(A\cup B)=$______。

7. 已知 $I=\{x\mid 0<x<11,\ x\in N\}$，$A=\{x\mid x=2n,\ n\in N,\ 0<n<6\}$，$B=\{x\mid 3<x<9,\ x\in N\}$，$C=\{x\mid x=2n-1,\ n\in N,\ 0<n<6\}$。则

(1) $A\cap B=$____；　(2) $A\cap C=$____；

(3) $B\cap C=$____；　(4) $A\cup B=$____；

(5) $B\cup C=$____；　(6) $\overline{A}=$____；

(7) $\overline{A\cup C}=$____；　(8) $\overline{A}\cap\overline{C}=$____；

(9) $\overline{A}\cup\overline{C}=$____；　(10) $\overline{A\cap C}=$____；

(11) $\overline{\phi}$____。

8. 如图1-1，1-2中 A、B、C 表示集合，用 A、B、C之间的关系表示阴影部分所示的集合。

(1) 令$A\cup B=I$　　(2) 令$A\cup B\cup C=I$

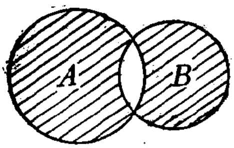

图 1-1

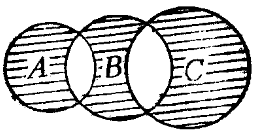

图 1-2

9. 如果 I 表示全集，用交集、并集、补集的记号将图 1-3，1-4，1-5 中，阴影部分用集合 A、B、C 表示出来。

10. 如图 1-6，1-7 中，I 是全集，把阴影部分用 A、B、C 表示出来。