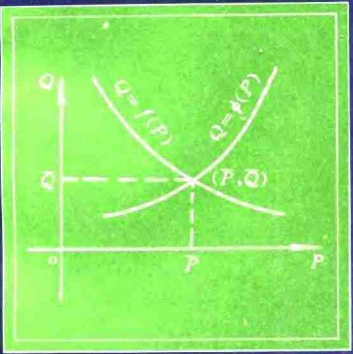
高等学校系列教材

经济应用数学(上)

微积分

主　编　安润秋　张文双



中国大地出版社

内容简介

本书内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、无穷级数、多元函数和常微分方程，配有节末练习题及章末习题，书末附有习题答案。

本书结构严谨，叙述清楚，可作为高等专科学校经济、管理和财贸等专业"微积分"课程教材，也可作为财经管理人员的自学用书。

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学：微积分/安润秋，张文双主编. -北京：中国大地出版社，1997.9

ISBN 7-80097-162-7

Ⅰ.经… Ⅱ.①安… ②张… Ⅲ.①经济数学-高等学校-教学参考资料②微积分-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (97) 第 17132 号

经济应用数学·微积分·

主　编　安润秋　张文双

责任编辑　申果元

中国大地出版社　出版发行

(100081　北京市海淀区大柳树落 21 号)

北京蓝空印刷厂印刷　　新华书店发行所经销

1997 年 9 月第 1 版　　1997 年 9 月北京第 1 次印刷

开本:850×1168　1/32　印张:12.375

字数:321.5 千字　　印数:0—5000 册

ISBN 7-80097-162-7/G·11

定价:15.00 元

大地版图书印、装错误可随时退换

前　言

《经济应用数学》是根据国家教委批准印发的《高等工程专科学校课程教学基本要求》编写的。

在编写中，力求贯彻“必需、够用”的原则，结合经济、教育体制改革的要求，尝试对教材进行改革。本书重视基本概念的讲述和基本技能的训练，重视培养学生运用数学知识解决实际问题的能力，而不拘泥于理论推导和繁杂的运算，在引例和应用诸方面尽可能多联系经济工作实际。

本套书分上、中、下三册出版。上册《微积分》介绍函数、极限与连续、导数与微分、不定积分、定积分、无穷级数、多元函数和常微分方程，中册《线性代数与线性规划》介绍行列式、矩阵、线性方程组和线性经济模型，下册《概率论与数理统计》介绍随机事件及概率、随机变量、随机变量的特征值、数理统计方法、参数估计、假设检验、区间估计、回归分析和正交试验法。

本套书教学参考时数约为 200 学时：上册《微积分》100 学时，中册《线性代数与线性规划》50 学时，下册《概率论与数理统计》50 学时。各节配有练习题，章末配有新题型习题，书末附有习题答案。本册书为上册《微积分》。

参加本册书编写的有：安润秋、张文双、王方华、吴树忠、孟贤玲、李振东、战久成。安润秋、张文双任主编，王方华、吴树忠任副主编，编写分工如下：第一、二章：安润秋，第三章：战久成，第四章：张文双，第五章：李振东，第六、七章：吴树忠，第八章：王方华，第九章：孟贤玲。全书由安润秋、张文双统稿。

本书由柴志勤先生主审，提出了不少修改意见，在此表示衷心感谢。

本书是《华北高等职业教育》编辑部组编的“高等学校系列教材”之一。编辑部安树一主任在组编、审校等方面做了不少工作。中国大地出版社编辑部申果元主任对此书的出版给予了指导。在此一并表示感谢。

限于编者水平，加上时间比较仓促，书难免有不妥之处，恳请专家读者批评指正。

编　者

一九九七年七月

目　录

第一章　函数

§1.1　函数的概念与性质

一、变量

1. 常量与变量

我们在观察各种自然现象或研究实际问题的时候，会遇到许多的量，这些量一般可分为两种：一种是在我们所考察的过程中保持不变的量，这种量称为常量. 另一种是在这一过程中起变化的量，称为变量. 例如，自由落体的下降时间和下降距离是变量，而落体的质量在这一过程中可以看为常量. 在数学中，我们常抽去变量或常量的具体意义来研究某一过程中这些量在数值上的关系.

这些量，例如时间、质量等，都可以用实数来表示，所以称它们为实变量或实常量. 本书的研究对象都是实变量和实常量，故简称变量和常量. 通常用字母 x、y、z、t 等表示变量，用字母 a、b、c 等表示常量.

2. 区间

变量的变化范围，常用区间表示. 设 a、b 是实数，且 $a<b$. 满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的 x 的全体组成一个闭区间，记为 $[a,b]$. 满足不等式 $a<x<b$ 的 x 的全体组成开区间 (a,b). 而满足不等式 $a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$ 的 x 的全体组成半开半闭的区间 $(a,b]$ 或 $[a,b)$. 以上区间都是有限区间. 满足 $a<x<+\infty$ 或 $a\leqslant x<+\infty$ 的 x 的全体，记为 $(a,+\infty)$ 或 $[a,+\infty)$. 满足 $-\infty<x<b$ 或 $-\infty<x\leqslant b$ 的 x 的全体，记为 $(-\infty,b)$ 或 $(-\infty,b]$. 如果变量 x 能够取全体实数，我们把它的变化范围记为 $(-\infty,+\infty)$. 这些区间都是无限区间.

3. 邻域

设 a 与 δ 是实数，且 $\delta>0$，称开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为点 a 的 δ 邻域，记为 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta,\delta>0\}$$

a 是邻域的中心，δ 是邻域的半径，如图 1-1 所示。在点 a 的 δ 邻域中去掉中心 a，即 $(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$，称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $U(\hat{a},\delta)$，即

$$U(\hat{a},\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta,\delta>0\}$$

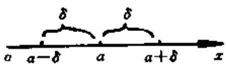


图 1-1

二、函数

在同一现象所涉及的各种变量中，通常并不都是独立变化的，某些变量之间存在依赖关系.

例 1 自由落体运动的公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

这里 s 表示下降距离，t 表示时间，g 是重力加速度. 这个公式指出在物体自由降落的过程中，距离 s 与时间 t 的依赖关系.

例 2 用一块边长为 a 的正方形铁皮作一个高为 x 的无盖小盒，如图 1-2. 于是这盒的容积 V 和高 x 存在着依赖关系：

$$V=x(a-2x)^2$$

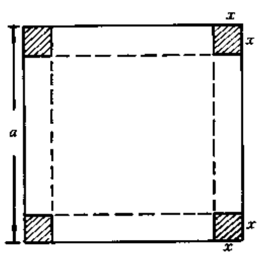


图 1-2

从以上这些依赖关系中，我

们可以看到一些共同的特征：

在这些变量中，有些量称为自变量，如时间 t，它有一定的变化范围. 如果我们把物体开始下落的时刻记为 $t=0$，把物体到达地面的时刻记为 $t=T$，那么时间 t 的变化范围是闭区间 $[0,T]$.

还有一些量是随着自变量的变化而起变化的，称为因变量，如落体下降距离 s 和盒的容积 V.

在某一过程中，哪个变量是自变量或因变量并不是绝对的. 例如在自由落体公式中，如果我们已知下降距离为 s，而要求出经过多少时间，这时，距离 s 就是自变量，而时间 $t=\sqrt{2s/g}$ 就成为因变量了.

对自变量范围内的每一个确定的值，通过依赖关系，能得到一个确定的并且唯一的因变量的值.

把这种特征抽象出来，便可得到函数的概念：

定义 1.1 若 D 是一个非空实数集合，设有一个对应规则 f，使每一个 $x\in D$，都有一个确定的实数 y 与之对应，则称这个对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数关系，或称变量 y 是变量 x 的函数，记为 $y=f(x)$，$x\in D$.

x 称为自变量，y 称为因变量.

称自变量的取值范围即集合 D 为函数的定义域，记作 $D(f)$.

对于任意一个值 $x_0\in D(f)$ 所对应的 y 值，记作 y_0、$f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$，称为当 $x=x_0$ 时函数 $y=f(x)$ 的函数值.

全体函数值的集合 $\{y|y=f(x),x\in D(f)\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的值域，记作 Z 或 $Z(f)$.

函数 $f(x)$ 中的 f 反映了自变量与因变量的对应规则. 对应规则也常用 g、h、F 等表示.

在平面直角坐标系中，点集 $\{(x,y)|y=f(x),x\in D(f)\}$ 为定义在 $D(f)$ 上的函数 $y=f(x)$ 的图形.

注意 函数的定义域和对应规则是确定函数关系的两个要素.

例 3 求函数 $y=\dfrac{\ln(3-x)}{\sqrt{x^2-x-2}}$ 的定义域.

解 函数的定义域为满足下列不等式的全部 x 值：

$$\begin{cases} x^2-x-2>0 & \Rightarrow x>2 \text{ 或 } x<-1 \\ 3-x>0 & \Rightarrow x<3 \end{cases}$$

故定义域为 $D=(-\infty,-1)\cup(2,3)$

例 4 设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数简称为 x 的取整函数，记作$[x]$.

例如 $[\pi]=3$ $[-1]=-1$ $[-3.5]=-4$ $[0]=0$

函数 $y=[x]$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为整数集，它的图形如图 1-3 所示，这图形称为阶梯曲线，在 x 为整数值处，图形发生跳跃.

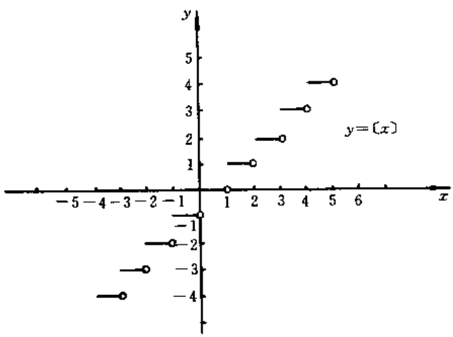


图 1-3

有些函数，对于其定义域内自变量 x 不同的值，不能用一个统一的数学表达式表示，而要用两个或两个以上的式子表示，这类函数称为分段函数.

例如 $y=|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$

是定义在$(-\infty,+\infty)$的分段函数.

例 5 货运站托运货物的运费规定为:货物重量不超过 50 千克,每千克 0.30 元;超过 50 千克,每千克 0.25 元.托运费 y 与货重 x 的函数关系为:

$$y=\begin{cases} 0.30x & 0\leq x\leq 50 \\ 0.25x & 50<x \end{cases}$$

注意 分段函数是用几个公式合起来表示一个函数,而不是表示几个函数.

如果自变量在定义域内任取一个数值时,对应的函数值只有一个,这种函数叫做单值函数.如果对应的函数值多于一个,则称为多值函数,例如:$y=\pm\sqrt{1-x^2}$对于任一$x\in[-1,1]$,都有两个 y 值与之对应.

以后凡是没有特别说明时,函数都是指单值函数.

有些函数的因变量是用自变量表达式表示出来的,称为显函数.例如:$y=x^2$,$y=\ln(2x+1)$等.而有些函数的因变量与自变量的对应规则是用一个方程 $F(x,y)=0$ 表示的,称为隐函数.例如:$x^2+y^2=r^2$,$xy=1$ 等.

三、函数的性质

1. 函数的奇偶性

定义 1.2 给定 $y=f(x)$

(1)如果对所有的 $x\in D(f)$,有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$为偶函数.

(2)如果对所有的 $x\in D(f)$,有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$为奇函数.

对于偶函数,因 $f(-x)=f(x)$,所以,若点 $P(x,f(x))$在图形上,则与它对称于 y 轴的点 $P'(-x,f(x))$也在图形上,因此偶函数的图形对称于 y 轴,如图 1-1.

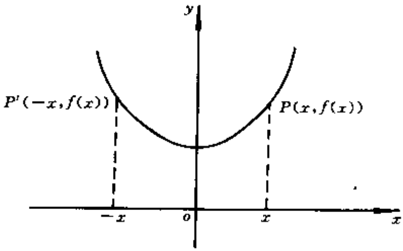


图 1-4

对于奇函数，因 $f(-x)=-f(x)$，所以若点 $Q(x,f(x))$ 在图形上，则与它对称于原点的点 $Q'(-x,-f(x))$ 也在图形上，因此奇函数的图形对称于原点，如图 1-5.

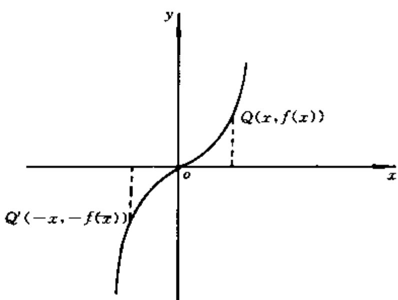


图 1-5

例 6　判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=x^4-x^2$　　(2) $y=\frac{1}{5x}$　　(3) $y=2x^3-7$

解　(1)因为　$f(-x)=(-x)^4-(-x)^2=x^4-x^2$

$$=f(x)$$

所以　$y=x^4-x^2$ 为偶函数.

(2)因为　$f(-x)=\frac{1}{-5x}=-\frac{1}{5x}$

$$=-f(x)$$

所以　$y=\frac{1}{5x}$ 为奇函数.

(3)因为　$f(-x)=2(-x)^3-7=-2x^3-7$

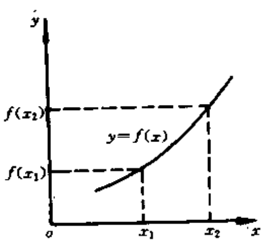
所以　函数 $y=2x^3-7$ 既非偶函数,也非奇函数.

2. 函数的单调性

定义 1.3　如果函数 $y=f(x)$ 对区间 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调增加的;当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称此函数在区间 (a,b) 内是单调减少的. 单调增加或单调减少的函数,统称为单调函数.

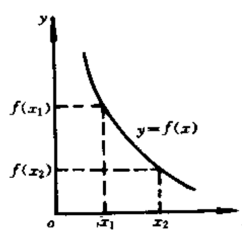
单调增加函数的图形沿 x 轴正向逐渐上升,如图 1-6.

单调减少函数的图形沿 x 轴正向逐渐下降,如图 1-7.



单调增加

图 1-6



单调减少

图 1-7

判断一个函数的单调性，可以利用单调函数的定义进行判断，但这样做往往比较繁琐．在本书第四章导数的应用中，将给出判断函数是否单调的一种相当有效而又简便的方法．

3．函数的周期性

定义 1.4　对于函数 $y=f(x)$，如果存在不为零的常数 a 使得 $f(x)=f(x+a)$ 恒成立，则称此函数为周期函数．满足这个等式的最小正数 a，称为函数的周期．

例如　$y=\sin x$ 就是周期函数，周期为 2π．

4．函数的有界性

定义 1.5　$y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，((a,b) 可以是函数 $f(x)$ 的整个定义域，也可以是定义域的一部分)．如果存在一个正数 M，对于所有的 $x\in(a,b)$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是有界的．如果不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是无界的．

例如　函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为对任何实数 x，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$．这里 $M=1$（当然也可以取大于 1 的任何数作为 M，而 $|\sin x|\leqslant M$ 成立)，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,2)$ 上是无界的，在 $[1,+\infty)$ 上是有界的．

习　题　1.1

1．下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$　$g(x)=x+1$

(2) $f(x)=\lg x^2$　$g(x)=2\lg x$

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$　$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$

2．求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$　　　　(2) $y=\sqrt{4-x^2}$

(3) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{2x+1}$　　　　(4) $y=\frac{\ln(3-x)}{\sqrt{x^2-x-6}}$

3. 已知 $f(x)=x^2-2x+3$，求下列函数值：

(1) $f(0)$　　　(2) $f(1)$　　　(3) $f(-1)$

(4) $f(\frac{1}{x})$　　　(5) $f(x+1)$　　　(6) $f(-x)$

4. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x| & |x|<\frac{\pi}{3}\\ 0 & |x|\geq\frac{\pi}{3}\end{cases}$

求 (1) $\varphi(\frac{\pi}{6})$　(2) $\varphi(-\frac{\pi}{2})$　(3) $\varphi(-2)$　(4) $\varphi(-\frac{\pi}{4})$

5. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=3x+2$　　　　(2) $y=1-2x^2$

(3) $y=x(x-1)(x+1)$　　　(4) $y=\sin x-\cos x+1$

(5) $y=x+\lg x$　　　　(6) $y=\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$

6. 判断下列函数的单调性：

(1) $y=\ln x$　　(2) $y=1+x^2$　　(3) $y=(\frac{1}{3})^x$

7. 函数 $y=\cos(2x+1)$ 的周期是多少？

§1.2　反函数　复合函数

一、反函数

定义 1.6　设 $y=f(x)$ 是定义在 $D(f)$ 上的一个函数，值域为 $Z(f)$. 如果对每一个 $y\in Z(f)$ 有一个确定的且满足 $y=f(x)$ 的 $x\in D(f)$ 与之对应，其对应规则记作 f^{-1}. 这个定义在 $Z(f)$ 上的函数 $x=f^{-1}(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的反函数，或称它们互为反函数.

函数 $y=f(x)$，x 为自变量，y 为因变量，定义域为 $D(f)$，值域为 $Z(f)$.

函数 $x=f^{-1}(y)$，y 为自变量，x 为因变量，定义域为 $Z(f)$，值域为 $D(f)$.

习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量. 因此，我们将

$x=f^{-1}(y)$改写为以 x 为自变量，以 y 为因变量的函数关系 $y=f^{-1}(x)$，这时我们说 $y=f^{-1}(x)$是 $y=f(x)$的反函数.

$y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$的关系是 x 与 y 互换，所以它们的图形是对称于直线 $y=x$ 的，如图 1-8.

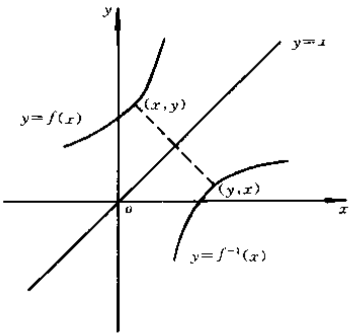


图 1-8

例 1　求 $y=3x-1$ 的反函数.

解　由 $y=f(x)=3x-1$ 可以求出

$$x=f^{-1}(y)=\frac{y+1}{3}$$

因此，$y=3x-1$ 的反函数是 $y=\frac{x+1}{3}$，如图 1-9.

一个函数如果有反函数，它必定是一一对应的函数关系.

例如　在$(-\infty,+\infty)$内，$y=x^2$ 不是一一对应的函数关系，所以它没有反函数；而在$(0,+\infty)$内，$y=x^2$ 有反函数 $y=\sqrt{x}$；在$(-\infty,0)$内，$y=x^2$ 有反函数 $y=-\sqrt{x}$.

二、复合函数

先看一个例子，设 $y=\sqrt{u}$，而 $u=1-x^2$，得 $y=\sqrt{1-x^2}$. 我们说，这个函数 $y=\sqrt{1-x^2}$是由 $y=\sqrt{u}$ 及 $u=1-x^2$ 复合而成的