高等学校统编教材

有限元法及其在动力机械中的应用

郭成壁　陈全福　主编

国防工业出版社

内 容 简 介

本书系统通俗地阐述了有限元法的基本原理和基本方法。介绍了有限元法在动力机械中的应力分析、稳定温度场的计算、振动计算等方面的应用，体现了理论和实践的有机结合。书中对有限元程序设计基础作了专门的讨论，书末附有计算程序以供参考。

本书可作为高等工程院校动力专业教材，对从事动力机械的工程技术人员、高等学校的教师、研究生，亦是一本有用的参考书。

有限元法及其在动力机械中的应用

郭成璧　陈全福　主编

责任编辑　方　商

*

国防工业出版社 出版

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

$787\times1092^{1}/_{16}$　印张$13^{7}/_{8}$　320千字

1984年12月第一版　1984年12月第一次印刷　印数：0,001—4,500册

统一书号：15034·2833　　定价：2.15元

前　言

近年来，国内出版了各种有关有限元法的书籍，但适合高等院校动力机械专业的教学用书尚不多见。本书作者受有关院校和“船舶动力机械类教材编审小组”的委托编写了本教科书。

根据编审小组的意见和有关院校共同拟定的编写大纲，本书的编写首先满足教学的需要。全书共分八章，讲授时数约50学时左右。

有限元法具有综合性较强的特点，在未学本课程前，应先修完线性代数、算法语言、理论力学、材料力学和传热学等课程。本书对弹性理论、计算方法和变分法则作了必要的介绍。

本书第一章主要介绍变分法基本知识，以及微分方程的边值问题与泛函极值问题的等价性，为掌握有限元法提供了必要的数学基础。第二章以平面问题为例，系统地讨论了有限元法解题的基本公式与基本步骤。第三章阐述轴对称应力分析问题，并给出应用实例。第四章把有限单元法推广到非结构设计的应用中，即稳定温度场的计算。第六章把有限元法应用于动力分析，并给出船舶轴系横向振动计算实例。第七章介绍了有限元法程序设计基础。考虑到学生的提高和发展，在第五章中编入了等参数单元和三维应力的计算。第八章讲解应用实例，可作为上机实习和毕业设计的参考资料。

通过本书的学习，使学生掌握有限元法的基本原理、方法和典型程序，为使用电子计算机求解本专业有关问题打好基础。因此，要求学生掌握变分的基本概念，以及泛函变分与微分方程边值问题的等价性，并会利用这一概念，把复杂的偏微分方程边值问题的求解转化为线性代数方程组的求解；掌握有限元法基本解题思路、方法和源程序设计的特点；能应用有限元法对动力机械中的平面问题、轴对称问题(应力场和稳定温度场)以及弹性体的振动问题进行计算；掌握有限元法程序编制的初步知识。

第一章、第二章、第六章以及第三章第四节、第五章第一节由上海交通大学动力机械工程系陈全福编写，第三章、第四章和第五章由大连工学院造船系郭成壁编写，第七章由上海交通大学动力机械工程系张锡良编写，第八章由华中工学院造船系陈国华编写。

承蒙上海交通大学动力机械系副教授陈大荣和哈尔滨船舶工程学院徐伯清两位同志审阅此书，并由陈大荣同志任主审，编者对此深表感谢。

由于编者水平有限，在本书中没能完全反映出各有关院校的宝贵教学经验和水平，对此深表歉意，并请读者对书中错误提出修正意见。

编　者

目　录

第一章 基本预备知识

§1-1 引 言

什么是有限元法？简单地说，有限元法（The Finite Element Method）是最近二、三十年发展起来的一门数值分析技术，是借助于高速数字电子计算机解场问题的近似计算方法。它运用离散的概念，使整个问题由整体连续到分段连续；由整体解析转化为分段解析，从而使数值法与解析法互相结合，互相渗透，形成一种新的数值计算方法。也就是说，把整个求算域离散成为有限个分段（子域），而每一分段内运用变分法，即利用与原问题中微分方程相等价的变分原理来进行推导，从而使原问题的微分方程组退化到代数联立方程组，使问题归结为解线性方程组，由此得到数值解答。

有限元法实际上是古典变分法的一种变体和发展，其基本思想——离散化的观点早在四十年代就已经提出来了。可是，由于当时高速数字电子计算机尚未发展成熟，这一观点也就没有引起人们的重视。到五十年代初，英国的一位航空系教授阿吉里斯（Argyris）和他的合作者打破了十年沉默的局面，使有限元法成功地应用于结构分析问题。与此同时，美国教授克劳夫（R. W. Clough）运用三角形单元对飞机结构进行计算，并在1960年首先提出了“有限元法”的名字。此后的十年是有限元法在国际上蓬勃发展的十年。六十年代中、后期，数学家开始介入对有限元法的研究，促使有限元法有了坚实的数学基础。我国著名计算数学家冯康早在1956年就发表了研究论文，这比美国数学家从事有限元法研究还要早。1965年英国教授辛克维茨（O. C. Zienkiewicz）及其合作者宣布，有限元法可应用于所有场的问题，因为有关场的问题能够化成变分的形式。从此以后，遂把有限元法的应用推广到更广阔的范围。

有限元法首先应用于航空工程，由于其方法的有效性，迅速被推广应用于造船、机械、动力、建筑和核子等工程部门。并从固体力学领域扩展到流体力学、传热学、电磁学、声学和振动学等领域。近三十年来，有限元法随着高速数字电子计算机的发展而得以迅速发展，几乎所有工程问题上许多分支都是有限元法的潜在使用范围。

有限元法从其推导方法来看可以分成三类：

1．直接法

又称直接刚度法，它的优点是直观易于理解。缺点是在单元特征分析中要引入节点力的概念，要专门研究单元载荷移置及节点平衡条件，并且不易直接推广到流场、温度场等非结构问题中去。

2．变分法

变分法是把有限元法归结为泛函求极值问题。如在动力机械工程问题中，常常需要求解如下一类微分方程：

泊松（Poisson）方程 $\nabla^2 u = -f$

热传导方程 $\dfrac{\partial u}{\partial t} - K\nabla^2 u = f$

波动方程 $$\nabla^2 u-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-f$$

其中 $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$，即拉普拉斯算子。这些微分方程又可以用相应的泛函来描述。应该着重指出的是，微分方程的近似解和用变分法求泛函的近似解是有完全相同的效果，我们称之为等价。实践告诉我们，微分方程的求解往往比较困难，而从泛函变分求近似解常常容易些。另外，用变分法来推导有限元法不仅可以避免引入节点力的概念和节点平衡条件，还可使有限元法建立在更加坚实的数学基础上，扩大它的应用范围。这也是本书采用变分法推导有限元法的理由所在。

3. 加权余数法

对于某些问题，相应的泛函尚未找到，或者根本不存在相应的泛函，这就无法用变分法了。我们可以用加权余数法直接从基本微分方程出发，求出近似解，从而扩大有限元法的应用范围。

由于本书在推导中采用变分法，所以在开始学习有限元法之前，首先介绍一些变分法及变分原理的基本概念，为学习有限元法提供数学基础。

§1-2 变分法(The Calculus of Variation)的一些基本概念

变分法是研究泛函极值问题的一种方法，它和函数的极值问题十分相似。为此，我们的讨论将在泛函及其变分和函数及其微分的对比中进行，以便运用我们熟知的函数及其微分的概念，来了解泛函及其变分的概念。

1. 泛函 (Functional) 的定义

在函数中所研究的是数与数的对应关系，例如函数 $y=f(x)$，因变量 y 的值是由自变量 x 所决定的，而在变分中，要研究的是这样一种依赖关系，其中因变量的值是由函数的选取所确定的。通常把这样的因变量叫做泛函数。为了建立泛函的概念，先来考察下面几个例子。

例1-1 设 $A(x_0, y_0)$、$B(x_1, y_1)$ 是平面 xoy 上的两个已知点，连接 A、B 两点的曲线方程为 $y=y(x)$，那么这条曲线的弧长 l 为：

$$l=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx$$

显然当 $y(x)$ 选取不同函数时，即过 A、B 作不同曲线时，弧长 l 将有不同的数值。因此弧长 l 依赖于函数 $y(x)$ 的选择，弧长 l 叫做函数 $y(x)$ 的泛函，记作

$$l[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+(y'(x))^2}dx \tag{1-1}$$

图1-1示意了例1-1的情况。

例1-2 图1-2示出了一直梁弯曲的情况，由结构力学得知，直梁弯曲时的变形能 U 为

$$U=\frac{1}{2}\int_0^l EI[y''(x)]^2dx$$

其中 $y(x)$ 是梁中和轴的挠度曲线，它是 x 的函数，如图1-2所示。显然，梁上有不同的载荷时，直梁将有不同的挠度曲线 $y(x)$，因此变形能是挠度曲线函数的函数，即变

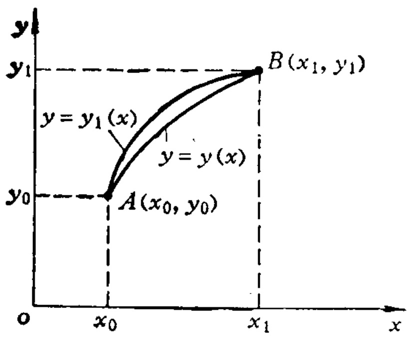

图1-1 连接二定点的曲线弧长

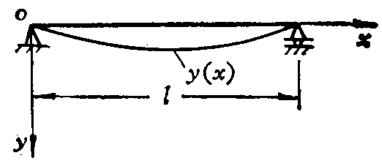

图1-2 直梁弯曲示意图

形能U是$y(x)$的泛函，记作

$$U[y(x)]=\frac{1}{2}\int_0^l EI[y''(x)]^2dx \tag{1-2}$$

例1-3 图1-3的三维空间xyz中，对应区域D有一曲面，设该曲面的函数为$z(x, y)$，其曲面面积S依赖于函数$z(x, y)$。所以曲面面积S是函数$z(x, y)$的泛函，记作

$$S[z(x, y)]=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\,dxdy \tag{1-3}$$

通过以上三个例子，我们可以对泛函作一简要的定义：在某个变化中，有变量J及某一类函数$\{y(x)\}$，如果对于这类函数$\{y(x)\}$中的每一个函数，按照某种法则（一般是积分形式）都有变量J的某个数值与之相对应，那么我们称变量J为这类函数$\{y(x)\}$的泛函，记作

$$J=J[y(x)] \tag{1-4}$$

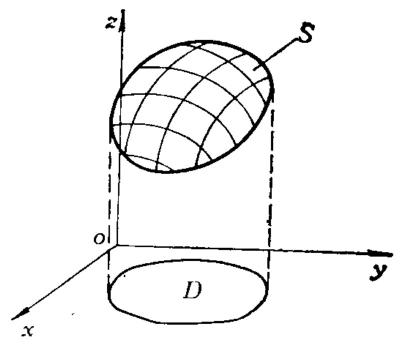

图1-3 三维空间曲面图

对于多元函数$\phi(x, y, z)$的泛函记作

$$J=J[\phi(x, y, z)] \tag{1-5}$$

我们还可以推广到多个变量函数的泛函，例如变量函数$y(x)$、$z(x)$的泛函可记作

$$J=J[y(x), z(x)] \tag{1-6}$$

2．泛函的极值问题——变分问题

函数的极值是微分研究的对象，而变分法研究的对象是泛函的极值。为了便于理解变分的概念，我们首先从数学史上有名的三个变分命题讲起。

（1）最速降线问题（brachistochrone）

在铅垂平面内，设有$A(o, o)$，$B(x, y)$两点，A、B两点不在同一铅垂线上，如图1-4所示。在所有连接A、B两点曲线上，找出一条曲线，使得初速为零的重物P，在重力的作用下，从A点出发沿着这条曲线自由下滑到B点（忽略摩擦阻力）所需要的时间最少，也就是说，欲寻找一条下滑时间最短的曲线，这一条曲线就称为最速降线。显然，最快的路线决不是连结A、B两点的直线段。尽管这条直线在A、B两点间的路程最短，可是沿着这条直线下滑时，运动速度的增长是比较慢的，所以花费时间

就比较长。如果我们取一条由 A 点起下降得较快的陡峻曲线，这时虽路程加长了，但重物运动的速度却加快了，所需要的总时间反而较少。由此可知，连接 A、B 的每一条曲线函数，对应着一个时间量，这个时间量是曲线函数的函数，即泛函。要求时间最短，就是要求泛函的极小值。

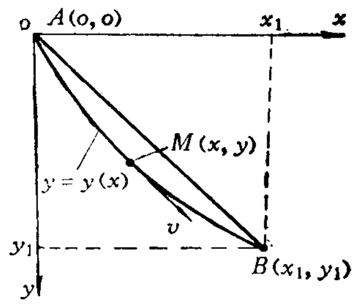

图1-4　最速降线图

下面我们把最速降线问题写成数学形式。设 $y=y(x)$ 是连接 A、B 两点的一条光滑曲线，重物 P 由 A 点出发，沿着这条曲线运动到任意点 $M(x、y)$ 时的速度为 v。如重物质量为 m，重力加速度为 g，则重物从 A 到 M 所失去的势能为 mgy，获得的动能为 $\frac{1}{2}mv^2$。由能量守恒定理得知

$$mgy=\frac{1}{2}mv^2$$

则

$$v=\sqrt{2gy} \tag{1-7}$$

如以 S 表示从 A 点算起的弧长曲线，则

$$v=ds/dt \tag{1-8}$$

弧微分的表达式为

$$dS=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx \tag{1-9}$$

从式（1-7）、式（1-8）和式（1-9）可写出

$$dt=dS/v=\sqrt{\frac{1+(y')^2}{2gy}}\cdot dx \tag{1-10}$$

其中 $y'=dy/dx$。因此，当重物 P 运动到 B 点时所需要的时间为

$$T=\int_0^T dt=\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+(y')^2}{2gy}}dx \tag{1-11}$$

写作泛函形式，则

$$T[y(x)]=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}}dx \tag{1-12}$$

这样，最速降线问题可以说成是：欲求一条满足边界条件 $y(o)=0$，$y(x_1)=y_1$ 的曲线，使泛函 $T[y(x)]$ 取极小值。因此最速降线问题亦是泛函的极值问题，可用变分法来求解。

（2）短程线（Geodesic line）问题

在给定的曲面 $\phi(x, y, z)=0$ 上，求出 A、B 两点之间长度最短的曲线。这条最短的曲线叫做短程线，如图1-5所示。这是一个典型的有约束条件的变分问题。要求满足约束条件 $\phi(x, y, z)=0$ 的空间曲线

$$\begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$$

使泛函 $$L[y(x),\ z(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}\,dx \tag{1-13}$$

取极小值。其中 $y'=\dfrac{dy}{dx}$，$z'=\dfrac{dz}{dx}$。

（3）等周问题（Isoperimetric problem）

求长度为一定的封闭曲线 L，使其所围的面积 S 为极大值，即在长度一定的封闭曲线中，什么曲线所围的面积最大？这个问题的答案，早在古希腊时已经知道了，这条曲线就是一个圆，但是，它的变分特性是一直到十八世纪才被欧拉（L. Euler）察觉出来的。

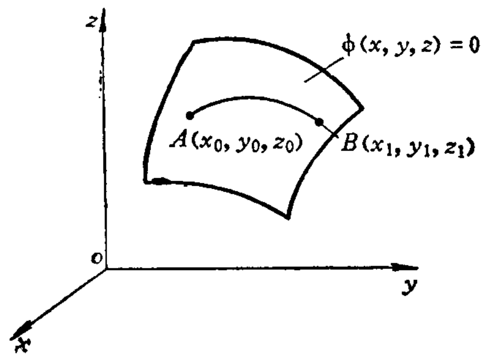

图1-5　曲面上两点间最短曲线图

将所给曲线用参数形式表达为 $x=x(t)$，$y=y(t)$，又因这条曲线是封闭的，所以有 $x(t_0)=x(t_1)$，$y(t_0)=y(t_1)$，这条曲线的周长为

$$L[x(t),\ y(t)]=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \tag{1-14}$$

其所围的面积为（根据格林（Green）公式）

$$S[x(t),\ y(t)]=\iint_S dxdy=\frac{1}{2}\oint_L(xdy-ydx)$$
$$=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dl \tag{1-15}$$

这样，等周问题可以描述为：在满足 $x(t_0)=x(t_1)$，$y(t_0)=y(t_1)$和泛函 $L[x(t)$、$y(t)]$为常数条件下，从一切 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 的函数中选取一对函数，使泛函

$$S[x(t),\ y(t)]=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dl$$

为最大。式中dl为边界 L 上弧长的微分。

这也是一个条件变分问题，而且其条件本身也是一个由函数 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 所确定的泛函，即式（1-14），但其边界（这里是端点）是给定不变的。

通过以上三个变分命题的讨论，我们可以获得这样的认识，泛函的极值是泛函的重要特性，而这一特性正是变分所要研究的内容。

3．变分的一些特性

变分在泛函研究中所起的作用，正如微分在函数的研究中所起的作用一样。为了把

变分特性讲清楚，我们把大家已经熟知的函数微分与变分作对比。为了理解上的方便，不妨从函数的定义域、值域讲起。

（1）函数 给定两个数集X、Y，x是X中的变量，y是Y中的变量，即$x\in X$，$y\in Y$。若存在一个对应关系，使x的每一个值都与y的某一个值相对应，则称y是x的函数，并表示为$y=f(x)$。X是它的定义域，Y是它的值域。	（1）泛函 给定满足某一条件的函数集合$R_1:\{y(x)\}$，$y(x)$是R_1中的变量函数；实数集合R_2，J是R_2中的变量。若存在一个对应关系，使R_1中每一个函数$y(x)$都有R_2中变量J的值与其相对应，则称J是$y(x)$的泛函，并表为$J=J[y(x)]$。其中$y(x)$是自变量（它是一个函数），J是因变量（为一个数）。函数集合R_1是泛函的定义域，实数集合R_2是泛函的值域。
（2）函数自变量的增量 设自变量x取值x_1，则在x_1点的增量是指在x_1附近的x和x_1的差 $\Delta x=x-x_1$ 自变量x的增量Δx即自变量的微分 $\Delta x=dx$。	（2）泛函自变函数的增量 若自变函数$y(x)$取$y_1(x)$，则$y(x)$在$y_1(x)$上的增量是指$y_1(x)$附近的函数$y(x)$与$y_1(x)$的差 $\delta y(x)=y(x)-y_1(x)$　　(1-16) 自变量$y(x)$的增量$\delta y(x)$称为自变函数$y(x)$的变分。
（3）函数的连续性 函数$y=f(x)$在点$x=x_0$连续是指对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta(x_0,\ \varepsilon)>0$，当 $\lvert x-x_0\rvert<\delta(x_0,\ \varepsilon)$ 时总有以下不等式成立 $\lvert f(x)-f(x_0)\rvert<\varepsilon$	（3）泛函的连续性 如对任意给定的正数ε可找到这样的$\delta(y_0(x),\ \varepsilon)>0$，当 $\lvert y(x)-y_0(x)\rvert<\delta$， $\lvert y'(x)-y_0'(x)\rvert<\delta\cdots\cdots$ $\lvert y^{(n)}(x)-y_0^{(n)}(x)\rvert<\delta$时 使　$\lvert J[y(x)]-J[y_0(x)]\rvert<\varepsilon$， 则称泛函$J[y(x)]$在函数$y=y_0(x)$处是$n$阶接近的连续泛函。
（4）线性函数 具有以下性质的函数$y=f(x)$称为线性函数： ① $f(\alpha x)=\alpha f(x)$ 其中α为任意常数。 ② $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$	（4）线性泛函 具有以下性质的泛函称为线性泛函： ① $J[\alpha y(x)]=\alpha J[y(x)]$ 其中α为任意常数。 ② $J[y_1(x)+y_2(x)]=J[y_1(x)]+J[y_2(x)]$
（5）函数的增量和微分 如果函数$y=f(x)$的自变量的增量为Δx，则相应的函数的增量为$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$。若$\Delta f$可以表示为 $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=A(x)\Delta x+\beta(x,\ \Delta x)\Delta x$ 其中x暂时固定，当$\Delta x\longrightarrow 0$时，$\beta(x,\ \Delta x)\longrightarrow 0$，$A(x)$与$\Delta x$无关，则上述表达式中关于$\Delta x$是线性的那一部分，即$A(x)\Delta x$称为$f(x)$在点$x$的微分，记为 $df=A(x)\Delta x=A(x)dx$ 另外，将Δf式两端除以Δx，然后令$\Delta x\longrightarrow 0$，则有 $A(x)=f'(x)=\dfrac{df}{dx}$ 因而$df=f'(x)dx$ 这表明函数的微分是函数增量的主部。	（5）泛函的增量和变分 如果泛函$J[y(x)]$的自变函数的增量为$\delta y(x)$，那么泛函的增量为 $\Delta J=J[y(x)+\delta y(x)]-J[y(x)]$ 若泛函的增量可以表示为 $\Delta J=J[y(x)+\delta y(x)]-J[y(x)]=L[y(x),\ \delta y(x)]+\beta[y(x),\ \delta y(x)]\cdot\max\lvert\delta y(x)\rvert$ 其中$y(x)$暂时固定，当$\max\lvert\delta y(x)\rvert\longrightarrow 0$时，$\beta[y(x),\ \delta y(x)]\longrightarrow 0$，这里$L[y(x),\delta y(x)]$是关于$\delta y(x)$的线性泛函，这个线性泛函是泛函增量的主部，称为泛函$J[y(x)]$的变分（一阶变分），并可记为 $\delta J=L[y(x),\ \delta y(x)]$　　(1-17) 以上的变分定义称做第一种变分定义。

（续）

（6）函数微分的另一个定义

假设给定函数 $y=f(x)$，暂时 x、Δx 均固定，α 为变动参数，函数 $f(x+\alpha\Delta x)$ 当 $\alpha=1$ 时，$f(x+\alpha\Delta x)=f(x+\Delta x)$；当 $\alpha=0$ 时，$f(x+\alpha\Delta x)=f(x)$。根据复合函数求导的规则

$$\frac{2}{2\alpha}f(x+\alpha\Delta x)|_{\alpha=0}$$
$$=f'(x+\alpha\Delta x)\cdot\Delta x|_{\alpha=0}$$
$$=f'(x)\cdot\Delta x=df(x)$$

所以函数 $f(x)$ 在点 x 的微分为

$$df(x)=\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x+\alpha\Delta x)|_{\alpha=0}$$

即函数 $f(x)$ 在点 x 的微分等于函数 $f(x+\alpha\Delta x)$ 关于 α 的导数在 $\alpha=0$ 时的值。

（6）泛函变分的另一个定义

假设给定泛函 $J=J[y(x)]$，考虑泛函在 $y(x)+\alpha\delta y(x)$ 的值为 $J[y(x)+\alpha\delta y(x)]$。暂时固定 $y(x)$，$\delta y(x)$，α 为变动参数，则 J 为 α 的函数，根据函数求导定义得

$$J'(\alpha)|_{\alpha=0}=\lim_{\alpha\to0}\frac{J[y(x)+\alpha\delta y(x)]-J[y(x)]}{\alpha}$$

$$\Delta J=J[y(x)+\alpha\delta y(x)]-J[y(x)]$$
$$=L[y(x),\ \delta y(x)]$$
$$+\beta(y(x),\ \alpha\delta y(x))\cdot|\alpha|\cdot\max|\delta y(x)|$$

当 $\alpha\to0$ 时，$\beta(y(x),\ \alpha\delta y(x))\to0$。又因 $L[y(x),\ \alpha\delta y(x)]$ 关于 $\delta y(x)$ 是线性的，所以

$$L[y(x),\ \alpha\delta y(x)]=\alpha\cdot L[y(x),\ \delta y(x)]$$

而 $$\lim_{\alpha\to0}\frac{\beta(y(x),\ \alpha\delta y(x))\cdot|\alpha|\cdot\max|\delta y(x)|}{\alpha}$$
$$=\pm\lim_{\alpha\to0}\beta(y(x)\cdot\alpha\delta y(x))\cdot\max|\delta y(x)|$$

故 $$\lim_{\alpha\to0}\Delta J/\alpha=\frac{\partial}{\partial\alpha}\{J[y(x)+\alpha\delta y(x)]\}|_{\alpha=0}$$
$$=L[y(x),\ \delta y(x)]=\delta J$$

即 $$\delta J[y(x)]=\frac{\partial}{\partial\alpha}\{J[y(x)+\alpha\delta y(x)]\}_{\alpha=0}$$
$$=J'(\alpha)|_{\alpha=0} \tag{1-18}$$

泛函 $J[y(x)]$ 在 $y=y(x)$ 处的变分，等于泛函 $J[y(x)+\alpha\delta y(x)]$ 关于 α 的导数在 $\alpha=0$ 时的值，称为变分的第二种定义。又称为拉格朗日变分定义。

（7）函数的极值

若函数 $y=f(x)$ 可微，且在点 $x=x_0$ 上达到极大值或极小值，则在 $x=x_0$ 处有 $df=f'(x_0)\ dx=0$，x_0 称为极值点。

（7）泛函的极值

若泛函 $J=J[y(x)]$ 有变分，且在 $y=y_0(x)$ 上达到极大值或极小值，则在 $y=y_0(x)$ 上的一阶变分

$$\delta J=L[y_0(x),\ \delta y(x)]=0 \tag{1-19}$$

函数 $y=y_0(x)$ 称为极值函数。因此，泛函 $J=J[y(x)]$ 在曲线 $y=y(x)$ 上取得极值的基本必要条件是：泛函的变分等于零，即

$$\delta J=0$$

通过以上的讨论，我们初步建立了泛函极值的概念。在这里，对于泛函极值的概念还需要作一点说明。所谓泛函的极值，主要是说泛函相对的极大或极小值，即从互相接近的许多曲线中研究出一个最大或最小的泛函值。但是曲线的接近，有不同接近度。如前所述，当 $|y(x)-y_0(x)|<\delta$ 时，曲线有零阶接近度。当 $|y(x)-y_0(x)|<\delta$ 与 $|y'(x)-y_0'(x)|<\delta$ 时，称曲线有一阶接近度。以此类推，有二阶、三阶、……接近度。所以在泛函的极大或极小定义里，还应说明这些曲线有几阶接近度。

如图1-6(a)中两曲线 $y_0(x)$ 和 $y(x)$ 之间，仅满足 $|y(x)-y_0(x)|<\delta$，对 $|y'(x)-y_0'(x)|$ 及高阶导数之差无规定，我们就称 $y(x)$ 与 $y_0(x)$ 的接近度为零阶。此时若泛函在曲线 $y=y_0(x)$ 上达到极值，就称这类变分为强变分，得到的极值叫强变分极值。

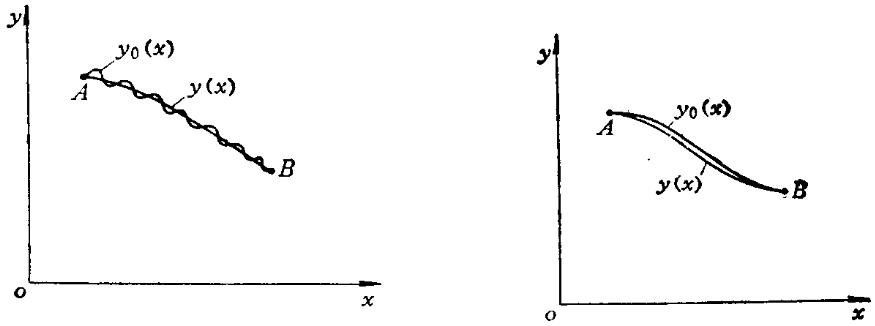

图1-6　曲线的接近度
（a）为零阶接近度；（b）为一阶接近度。

图1-6（b）中，$y(x)$ 和$y_0(x)$ 有一阶接近度，二曲线不仅在纵坐标间，而且在切线方向间都很接近，即同时满足$|y(x)-y_0(x)|<\delta$，$|y'(x)-y_0'(x)|<\delta$。此时若泛函在曲线$y=y_0(x)$ 上达到极值，就称这类变分为弱变分，这样得到的极值叫做弱极值。

§1-3　泛函极值的求解——欧拉方程的导出

为了推导欧拉方程的需要，先叙述一个预备定理，通常叫做变分法的基本预备定理。

若函数$\phi(x)$ 在区间〔a，b〕上连续，且对于任意选取的函数$\delta y(x)$ 均有如下的积分，其中$\delta y(x)$ 的导数连续且在端点上的值为零，即

$$\delta y(a)=\delta y(b)=0$$

若
$$\int_a^b \phi(x)\delta y(x)dx=0 \tag{1-20}$$

则在区间〔a，b〕上有

$$\phi(x)\equiv 0 \tag{1-21}$$

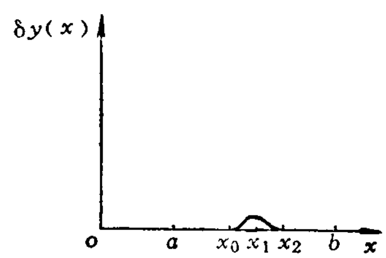

图1-7　$\delta y(x)$ 在x_1领域内示意图

这一定理可用反证法来证明。假定在区间〔a，b〕上一点$x=x_1$处，$\phi(x)\neq 0$。事实上$\phi(x)$ 是连续的，$\phi(x)$ 在点x_1的领域$x_0\leqslant x_1\leqslant x_2$内不变号。既然$\delta y(x)$是任意的，我们可以这样选取函数$\delta y(x)$，它在$x_1$的领域内不变号且大于零，在领域外恒等于零，如图1-7所示。于是得到

$$\int_a^b \phi(x)\delta y(x)dx=\int_{x_0}^{x}\phi(x)\delta y(x)dx\neq 0$$

这是因为乘积$\phi(x)\delta y(x)$ 在区间〔x_0，x_2〕内不变号，而在区间外等于零的缘故。这和假设矛盾，从而证明了$\phi(x)\equiv 0$。

对于多变量的问题，也有类似的变分预备定理，现不作证明地叙述如下：

如果$\phi(x, y)$ 在（x，y）平面内S域中连续。设$\delta z(x, y)$ 在S域的边界上为零，$|\delta_z|\leqslant\varepsilon$，$|\delta z_x|\leqslant\varepsilon$，$|\delta z_y|\leqslant\varepsilon$，还满足连续性及一阶或若干阶的可微性，对于这样选取的任意函数$\delta z(x, y)$，若

$$\iint_S \phi(x, y)\delta z(x, y)dxdy=0 \tag{1-22}$$

则在域S内，有

$$\phi(x, y)\equiv 0 \tag{1-23}$$

其中 $z_x=\dfrac{dz}{dx}$，$z_y=\dfrac{dz}{dy}$。

1．一维欧拉方程的推导

首先讨论最简单的泛函

$$J[y(x)]=\int_{x_0}^{x} F(x, y(x), y'(x))dx \tag{1-24}$$

的极值问题。其中容许曲线（即能给泛函以确定值的曲线）$y(x)$的边界点是固定的，即

$$y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1 \tag{1-25}$$

其中函数$F(x, y, y')$是二阶可导的，$y'=y'(x)=dy(x)/dx$。

现在假定$y=y(x)$是使泛函（1-24）取得极值且满足边界条件式（1-25）的一条曲线，称为极值曲线。然后给$y(x)$以变分δy，并求出泛函的变分δJ，使$\delta J=0$。

在图1-1中任意取一条与极值曲线$y=y(x)$很接近的容许曲线$y=y_1(x)$，并把$y(x)$和$y_1(x)$包括在含有一个参数α的曲线族中，其表达式为

$$y(x, \alpha)=y(x)+\alpha[y_1(x)-y(x)] \tag{1-26}$$

在上式中，当$\alpha=0$时，得$y(x, 0)=y(x)$；当$\alpha=1$时，得$y(x, 1)=y_1(x)$。已知$y_1(x)-y(x)$叫做函数$y(x)$的变分，用δy来表示，故式（1-26）可写成

$$y(x, \alpha)=y(x)+\alpha\delta y(x)=y+\alpha\delta y \tag{1-27}$$

函数$y(x)$的变分$\delta y=y_1(x)-y(x)$仍是x的函数，它可以对x求导数，且有

$$\begin{aligned}
(\delta y)'&=y_1'(x)-y'(x)=\delta y'\\
(\delta y)''&=y_1''(x)-y''(x)=\delta y''\\
&\vdots\\
(\delta y)^{(n)}&=y_1^{(n)}(x)-y^{(n)}(x)=\delta y^{(n)}
\end{aligned}$$

也就是：变分的导数等于导数的变分。

现在只在曲线族式（1-26）中来考虑泛函（1-24）的值，此时泛函式（1-24）可写成

$$J[y(x, \alpha)]=\int_{x_0}^{x} F[x, y(x, \alpha), y_x'(x, \alpha)]dx=\varphi(\alpha) \tag{1-28}$$

泛函就变为α的函数。而且当$\alpha=0$时，泛函取极值。根据函数取极值的必要条件得知，$\delta J=\varphi'(\alpha)|_{\alpha=0}=0$，于是由式（1-28）得到

$$\begin{aligned}
\varphi'(\alpha)|_{\alpha=0}&=\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}J[y(x, \alpha)]\right\}_{\alpha=0}\\
&=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}F[x, y(x, \alpha), y_x'(x, \alpha)]dx\\
&=\int_{x_0}^{x_1}\left[F_y\frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial\alpha}+F_{y_x'}\frac{\partial y_x'(x, \alpha)}{\partial\alpha}\right]dx\\
&=\int_{x_0}^{x_1}F_y\delta y dx+\int_{x_0}^{x_1}F_{y_x'}\delta y_x' dx=0
\end{aligned} \tag{1-29}$$

其中第二项积分，经分部积分，利用固定边界条件，可写成

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'_x}\delta y' dx = -\int_{x_0}^{x} \frac{d}{dx} F_{y'}\delta y dx \tag{1-30}$$

于是式（1-29）变成为

$$\varphi'(\alpha)|_{\alpha=0} = \frac{\partial}{\partial\alpha} J[y(x,\ \alpha)] = \int_{x_0}^{x_1} (F_y - d/dxF_{y'_x})\delta y \cdot dx$$

$$= 0 \tag{1-31}$$

根据变分法基本预备定理，δy 为满足边界条件的任意函数，所以式（1-31）成立，同时必有

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'_x} = 0 \tag{1-32}$$

方程（1-32）是一个二阶常微分方程，它的展开式是

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'} \cdot y' - F_{y'y'} \cdot y'' = 0 \tag{1-33}$$

其中 $y' = \frac{dy(x)}{dx}$， $y'' = \frac{d^2y(x)}{dx^2}$， $F_y = \frac{\partial F(x,\ y,\ y')}{\partial y}$

$F_{xy'} = \frac{\partial^2 F(x,\ y,\ y')}{\partial x \cdot \partial y'}$， $F_{yy'} = \frac{\partial^2 F(x,\ y,\ y')}{\partial y \cdot \partial y'}$， $F_{y'y'} = \frac{\partial^2 F(x,\ y,\ y')}{\partial y'^2}$

方程（1-32）是由欧拉首先发现的，所以称为欧拉方程。综上所述，如果函数 $y = y(x)$ 使泛函 $J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y')dx$ 取极值，并满足固定的边界条件 $y(x_0) = y_0$， $y(x_1) = y_1$，那么它一定是微分方程 $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'_x} = 0$ 的解。

根据泛函变分的第二种定义得知，式（1-31）可写成

$$\delta J = \int_{x_0}^{x} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx = 0 \tag{1-34}$$

从而告诉了我们一个重要的原理，变分法和欧拉方程可以描述同一个物理问题，从微分方程（欧拉方程）求近似解和从变分法（即相应的泛函求极值）求近似解有着相同的效果，也就是说微分方程的解和其相应泛函的极值函数是等价的。但微分方程的求解往往是困难的，而从泛函变分求近似解则常常并不困难。所以常把微分方程的求解问题化为相应的泛函求极值问题，而有限元法就是泛函求极值的一种有效的近似解法。

下面将上述近似解法推广到依赖较高阶导数的泛函极值问题。若研究泛函

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F[x,\ y,\ y',\ y'' \cdots\cdots y^{(n)}]dx \tag{1-35}$$

的极值，其中函数 F 被认为是对于 y， y'， y''， $\cdots\cdots y^{(n)}$ 都是 $n+2$ 阶可导的；并且假定端点上有固定条件

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ y''(x_0) = y''_0 \cdots\cdots y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

$$y(x_1) = y_1,\ y'(x_1) = y'_1,\ y''(x_1) = y''_1 \cdots\cdots y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)} \tag{1-36}$$

即端点上不仅给出函数值，而且还给出它直至 $n-1$ 阶导数值，假定极值在 $2n$ 阶可微的曲线 $y = y(x)$ 上达到，即求 $\delta J = 0$ 时的 $y = y(x)$。用上面相同的方法，根据泛函变分的第二种定义，给 $y(x)$ 以变分 δy，则有

$$\delta J=\varphi'(\alpha)|_{\alpha=0}=\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}J[y(x,\alpha)]\right\}_{\alpha=0}$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}F(x,\ y+\alpha\delta y,\ y'+\alpha\delta y',\ y''+\delta y''\cdots\cdots y^{(n)}+\alpha\delta y^{(n)})dx$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}[F_y\delta y+F_{y'}\delta y'+F_{y''}\delta y''+\cdots\cdots+F_{y^{(n)}}\delta y^{(n)}]dx \tag{1-37}$$

将上式中第二项积分分部积分一次，利用边界条件，当$x=x_0$，$x=x_1$时，$\delta y=0$，可得

$$\int_{x_0}^{x_1}F_{y'}\delta y'\alpha x=-\int_{x_0}^{x}\left(\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta ydx$$

将式（1-37）中第三项分部积分两次，并利用$x=x_0$，$x=x_1$时的$\delta y=\delta y'=0$的条件，将公式整理后可得

$$\int_{x_0}^{x}F_{y''}\delta y''dx=(-1)^2\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}\right)\delta ydx$$

类似式（1-37）中的第i项分部积分（$i-1$）次，并代入边界条件$x=x_0$，$x=x_1$时的$\delta y=\delta y'=\delta y''=\cdots\cdots=\delta y^{(i-1)}=0$，可得

$$\int_{x_0}^{x_1}F_{y^{(i)}}\delta y^{(i)}dx=(-1)^i\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{d^i}{dx^i}F_{y^{(i)}}\right]\delta ydx \tag{1-38}$$

将以上各式代入式（1-37）中相应的项，得

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}\left[F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}\right]\delta ydx$$
$$=0 \tag{1-39}$$

根据变分法基本预备定理可得

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0 \tag{1-40}$$

上式是$y(x)$的$2n$阶微分方程，一般称为泛函

$$J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F[x,\ y,\ y',\ y'',\ \cdots\cdots y^{(n)}]dx$$

的欧拉—泊桑方程。

梁在横向载荷下的弯曲问题，就是泛函中含有较高阶导数的一个例子。

2．二维欧拉方程的推导

许多平面问题，如弹性板的弯曲和平面应力问题，轴对称问题，平面电磁场问题，变量函数都有x，y（或r）两个自变量。但是这类泛函极值问题本质上是类似的，我们只对几个典型问题从泛函中求得有关的欧拉方程。

讨论仍然从最简单的泛函出发。设函数$W=W(x,\ y)$是在区域D内连续的二阶可微的函数。在域D的边界C上的值已经给出，即在边界C上$W=W_C(x,y)$为已知。考虑泛函

$$J[W(x,\ y)]=\iint\limits_D F[x,\ y,\ W,\ W_x,\ W_y]dxdy \tag{1-41}$$

的极值问题。其中$W_x=\dfrac{\partial W(x,\ y)}{\partial x}$，$W_y=\dfrac{\partial W(x,\ y)}{\partial y}$。

首先，由变分法第二种定义出发，泛函（1-41）的变分可写成

$$\delta J=\left.\frac{\partial\varphi(\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} \tag{1-42}$$

其中 $$\varphi(\alpha)=J[W(x, y, \alpha)]=J[W(x, y)+\alpha\delta W(x, y)] \tag{1-43}$$

$$W(x, y, \alpha)=W(x, y)+\alpha\delta W(x, y) \tag{1-44}$$

$$\delta W(x, y)=W_0(x, y)-W(x, y) \tag{1-45}$$

由式（1-44）可知，当$\alpha=0$时，将得到极值函数$W(x, y)$，当$\alpha=1$时，得满足边界条件的容许函数$W_0(x, y)$。固定$W(x, y)$，$\delta W(x, y)$，$J[W(x, y, \alpha)]$即为α的函数$\varphi(\alpha)$

$$\varphi(\alpha)=J[W(x, y)+\alpha\delta W(x, y)]$$

$$=\iint_D F(x, y, W+\alpha\delta W, W_x+\alpha\delta W_x, W_y+\alpha\delta W_y)dxdy \tag{1-46}$$

代入式（1-42）则有

$$\delta J=\varphi'(\alpha)|_{\alpha=0}=\iint_D\left(\frac{\partial F}{\partial W}\delta W+\frac{\partial F}{\partial W_x}\delta W_x+\frac{\partial F}{\partial W_y}\delta W_y\right)dxdy \tag{1-47}$$

根据函数变分的定义，我们得知：变分的导数等于导数的变分

$$\left.\begin{aligned}\delta W_x&=\delta\frac{\partial W}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\delta W)\\ \delta W_y&=\delta\frac{\partial W}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\delta W)\end{aligned}\right\} \tag{1-48}$$

及

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}[F_{W_x}\delta W]&=\frac{\partial}{\partial x}(F_{W_x})\delta W+F_{W_x}\frac{\partial}{\partial x}\delta W\\ \frac{\partial}{\partial y}[F_{W_y}\delta W]&=\frac{\partial}{\partial y}(F_{W_y})\delta W+F_{W_y}\frac{\partial}{\partial y}\delta W\end{aligned}\right\} \tag{1-49}$$

其中 $F_{W_x}=\frac{\partial F}{\partial W_x}$； $F_{W_y}=\frac{\partial F}{\partial W_y}$

则得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial W_x}\delta W_x&=\frac{\partial}{\partial x}[F_{W_x}\delta W]-\frac{\partial}{\partial x}(F_{W_x})\delta W\\ \frac{\partial F}{\partial W_y}\delta W_y&=\frac{\partial}{\partial y}[F_{W_y}\delta W]-\frac{\partial}{\partial y}(F_{W_y})\delta W\end{aligned}\right\} \tag{1-50}$$

于是式（1-47）可改写成

$$\begin{aligned}\delta J=&\iint_D\left\{\frac{\partial F}{\partial W}\delta W-\frac{\partial}{\partial x}(F_{W_x})\delta W-\frac{\partial}{\partial y}(F_{W_y})\delta W\right.\\ &\left.+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial W_x}\delta W\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial W_y}\delta W\right)\right\}dxdy\\ =&\iint_D\left[\frac{\partial F}{\partial W}-\frac{\partial}{\partial x}(F_{W_x})-\frac{\partial}{\partial y}(F_{W_y})\right]\delta W dxdy\\ &+\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial W_x}\delta W\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial W_y}\delta W\right)\right]dxdy\end{aligned} \tag{1-51}$$

根据格林公式，对$P(x,y)$，$Q(x,y)$两个连续函数则得：

$$\oint_C [P(x,y)dx+Q(x,y)dy]=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \tag{1-52}$$

或

$$\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy=\oint_C (Pdy-Qdx)=\oint_C (P\sin\theta-Q\cos\theta)dS \tag{1-53}$$

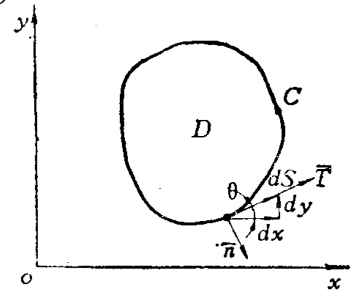

图1-8　边界C上法线$\vec{n}$、切线$\vec{T}$与沿坐标微分的关系图

其中dS为边界围线C的弧长微分，其方向逆时针为正，顺时针为负，θ为边界C的切线$\vec{T}$和x轴的夹角。$\vec{n}$为法线矢量。由图1-8可得下列关系式：

$$\left.\begin{aligned}dx_C&=\cos\theta dS\\ dy_C&=\sin\theta\, dS\end{aligned}\right\} \tag{1-54}$$

且在C上有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}&=\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial}{\partial S}+\frac{\partial n}{\partial x}\frac{\partial}{\partial n}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial S}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial n}\\ \frac{\partial}{\partial y}&=\frac{\partial S}{\partial y}\frac{\partial}{\partial S}+\frac{\partial n}{\partial y}\frac{\partial}{\partial n}=\sin\theta\frac{\partial}{\partial S}-\cos\theta\frac{\partial}{\partial n}\end{aligned}\right\} \tag{1-55}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial S}&=\frac{\partial x}{\partial S}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial S}\frac{\partial}{\partial y}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial n}&=\frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial n}\frac{\partial}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial}{\partial x}-\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{1-56}$$

所有这些关系式，在简化二维问题时都是很有用的。从式（1-53）得

$$\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(F_{W_x}\delta W)+\frac{\partial}{\partial y}(F_{W_y}\delta W)\right]dxdy$$

$$=\oint_C (F_{W_x}\sin\theta-F_{W_y}\cos\theta)\delta W dS \tag{1-57}$$

在边界C上，$W(x,y)$为已知函数$W_C(x,y)$。对于都通过$W_C(x,y)$的任意函数$W(x,y)$的变分δW，在边界上恒等于零，因此得

$$\oint_C (F_{W_x}\sin\theta-F_{W_y}\cos\theta)\delta W dS=0$$

则式（1-51）可写成

$$\delta J=\iint_D\left(\frac{\partial F}{\partial W}-\frac{\partial F_{W_x}}{\partial x}-\frac{\partial F_{W_y}}{\partial y}\right)\delta W dxdy \tag{1-58}$$

当泛函达到极值时，$\delta J=0$。根据变分法的基本预备定理，δW为满足边界条件的任意函数，则

$$\frac{\partial F}{\partial W}-\frac{\partial F_{W_x}}{\partial x}-\frac{\partial F_{W_y}}{\partial y}=0 \tag{1-59}$$

这是一个二阶微分方程，也就是决定在边界上满足$W_c(x,y)$的$W(x,y)$的微分方程，通常称为二维欧拉方程。也就是说泛函的极值函数$W(x,y)$等价于欧拉方程