北京大学教材

微分流形导引

詹汉生 编著

微分流形导引

詹汉生　编著

责任编辑：徐信之

*

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

北京市经纬印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经销

*

787×1092毫米　32开本　6.5印张　120千字

1987年11月第一版1987年11月第一次印刷

印数：00001—3,000册

统一书号：13209·158定价：1.14元

序　　言

随着近代科学技术的发展，微分流形的理论在现代数学中的重要性已愈来愈为人们所理解．在今天，有关微分流形知识的介绍，已成为数学和其它一些学科非常有兴趣的科目之一．关于微分流形的教科书，目前在国外已有不少，但在国内还不算多．为了学习大范围分析和微分动力系统结构稳定性理论的需要，我们选择了一些题材，编写了这份教材．考虑到作为专业基础课教材的要求，所以材料的选取只涉及到这方面所必需的最基本的那些内容，但是在叙述上则力求详尽一些，以便于初学者阅读．

这份教材虽然曾在讨论班和选修课试用过，但是由于编者水平所限，加之缺乏经验，因此在教材中肯定还会有许多不当之处．我诚恳地欢迎同志们提出宝贵的意见，以便将来对它作进一步的修改和补充．

这份教材是在廖山涛先生的热情鼓励和指导下编写的．编者借此机会对廖先生表示衷心的感谢．

编　者

1984 年于北京大学

内 容 提 要

本书着重介绍微分流形的基础知识. 全书分为四章. 前两章介绍微分流形有关的一些基本概念; 第三章介绍 Sard 定理、Whitney 嵌入定理和 Thom 横截性定理; 第四章介绍 Morse 函数和它的某些应用.

本书可作为大学数学系高年级学生或低年级研究生的选修课教材.

目　录

第一章 微分流形

§1 微分流形与可微映射

微分流形是近代数学中的一个基本概念. 所谓微分流形，大体上说，就是一类在其中可以进行微分运算的拓扑空间. 我们知道，在拓扑空间中，由于有拓扑结构，可以谈映射是否连续，但是一般不能谈映射是否可微. 而为了使得在某些拓扑空间中可以谈映射的可微性，自然这类拓扑空间必须适合某种特别的要求，或者说必须具备某种支持微分运算的结构. 下面我们就来指出这种结构.

我们知道，对于欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 上的函数是可以谈可微性的. 现在问：除 $\boldsymbol{R}^n$ 外，在怎样的拓扑空间中还能有类似的概念？分析一下 $\boldsymbol{R}^n$ 上的函数可微性的定义，不难看出，它只涉及 $\boldsymbol{R}^n$ 中每个点附近的欧氏空间结构. 因此，首先引起我们注意的自然应该是那些局部如同 $\boldsymbol{R}^n$ 的拓扑空间. 说得确切一点，就是在它的每个点处都有一个邻域同胚于 $\boldsymbol{R}^n$ 中某个开子集的拓扑空间. 因为在这种空间中的每个点近旁，通过所说的同胚，总可以把定义在它上面的函数局部地表成 $\boldsymbol{R}^n$ 中某个开子集上的函数. 具体地说，设 M 是这样的拓扑空间，$f: M \to \boldsymbol{R}$ 是一实函数. 对任意的 $p \in M$，设 U 是 p 在 M 中的邻域，$\varphi: U \to \varphi(U)$ 是同胚，这里 $\varphi(U)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的开子集. 于是，有复合函数 $f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \to \boldsymbol{R}$，这是定义在 $\boldsymbol{R}^n$ 的开子集 $\varphi(U)$ 上的函数（图 1）.

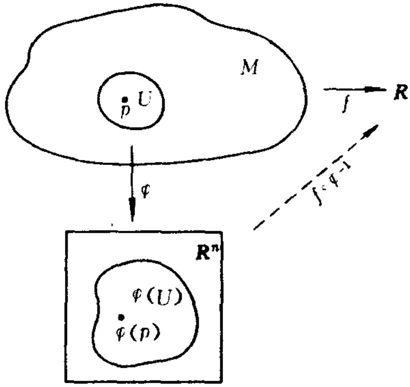

图 1

我们知道，对于函数 $f\circ\varphi^{-1}$ 谈它是否可微是有意义的. 一个很自然的想法是：能否用 $f\circ\varphi^{-1}$ 在 $\varphi(p)$ 点可微来作为 f 在 p 点可微的定义？为了便于进一步讨论，先引入一些术语. 我们把具有上面所述那种局部性质的拓扑空间称为拓扑流形，下面是它的确切定义.

定义 1.1 n 维拓扑流形 M 是指一个具有如下性质的拓扑空间

1）M 是 Hausdorff 空间；

2）M 有可数基；

3）M 的每个点都有一个邻域同胚于 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的一开子集.

下面是拓扑流形的一些例子.

1. $\mathbf{R}^n$ 本身是 n 维拓扑流形.

2. $\mathbf{R}^n$ 中的非空开子集（具有子空间的拓扑）是 n 维拓扑流形. 更一般地，n 维拓扑流形的任一非空开子集也是 n 维拓扑流形.

3. $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的 n 维球面

$$S^n=\left\{(u^1,\cdots,u^{n+1})\in\mathbf{R}^{n+1}\,\Big|\,\sum_{i=1}^{n+1}(u^i)^2=1\right\}$$

作为 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 的子空间是 n 维拓扑流形(图 2).

4.　在 n 维球面 S^n 上,定义等价关系"$\sim$"如下:对于 $p,q\in S^n$,命

$$p\sim q\Leftrightarrow q=p \quad 或 \quad q=-p.$$

我们称商空间 $S^n/\sim$ 为 n 维投影空间,记作 $\boldsymbol{RP}^n$. 这 $\boldsymbol{RP}^n$ 是 n 维拓扑流形(图 3).

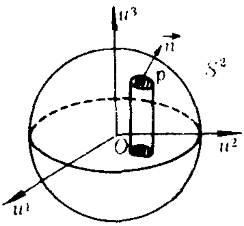

图　2

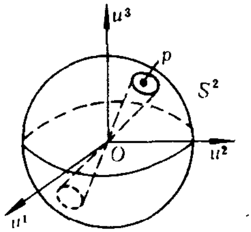

图　3

事实上,$\boldsymbol{RP}^n$ 由 S^n 中的点的等价类所组成. 对于 $p\in S^n$,记 p 所属的等价类为$[p]$. 用 $\pi: S^n\to \boldsymbol{RP}^n$ 表示自然投影

$$\pi(p)=[p], \quad \forall\, p\in S^n.$$

对于任一 $[p]\in \boldsymbol{RP}^n$,因为 S^n 是 n 维拓扑流形,故有 p 在 S^n 中的邻域 U 及一同胚 $\varphi: U\to\varphi(U)$,这里 $\varphi(U)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开子集. 不妨设 U 足够小,使得若 $q\in U$,则 $-q\overline{\in} U$. 于是,$\pi(U)$ 是$[p]$ 在 $\boldsymbol{RP}^n$ 中的邻域. 显然,$\phi\circ\pi^{-1}$ 是 $\pi(U)$ 到 $\varphi(U)$ 的同胚. 至于 $\boldsymbol{RP}^n$ 满足定义 1.1 中的 1)和 2)是明显的.

5.　若 M 和 N 分别是 m 维和 n 维的拓扑流形,则它们的拓扑积 $M\times N$ 是 $m+n$ 维拓扑流形.

事实上,由拓扑积的定义,积空间 $M\times N$ 明显满足定义 1.1中的 1) 和 2). 今证它也满足 3). 设 $(p_0,q_0)\in M\times N$ 是任意一点. 由于 M 和 N 分别是 m 维和 n 维的拓扑流形,故有 p_0

在 M 中的邻域 U 及同胚 $\varphi: U \to \varphi(U)$，$q_0$ 在 N 中的邻域 V 及同胚 $\psi: V \to \psi(V)$，其中 $\varphi(U)$ 和 $\psi(V)$ 分别是 $\mathbf{R}^m$ 和 $\mathbf{R}^n$ 中的开子集. 这时 $U \times V$ 是 (p_0, q_0) 在 $M \times N$ 中的邻域，并且由

$$(\varphi \times \psi)(p, q) = (\varphi(p), \psi(q)), \quad \forall\ (p, q) \in U \times V$$

定义的映射 $\varphi \times \psi: U \times V \to \varphi(U) \times \psi(V)$ 是 $U \times V$ 到 $\mathbf{R}^{m+n} = \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ 的开子集 $\varphi(U) \times \psi(V)$ 上的同胚.

显然，上面的做法可以推广到有限个因子的情形. 即若 M_i 是 m_i 维拓扑流形 $(i=1,2,\cdots,s)$，则它们的拓扑积 $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_s$ 是 $m_1 + m_2 + \cdots + m_s$ 维拓扑流形. 特别地有环面 $T^2 = S^1 \times S^1$ 和柱面 $C = S^1 \times \mathbf{R}$ 等都是 2 维拓扑流形.

命题 1.1 拓扑流形 M 有以下性质：

1） M 是局部紧致和局部连通的；

2） M 是正则空间和正规空间；

3） M 可度量化；

4） M 仅有可数个连通分支.

证明 由定义 1.1 的 3) 易看出命题中的 1) 成立. 因为 M 是局部紧致的 Hausdorff 空间，故 M 是正则空间. 又因为 M 有可数基，由 Tychonoff 定理可知 M 是正规空间，这证明 2) 成立. 由于 M 是正则的、有可数基的 T_1 空间，根据 Urysohn 度量化定理可知 3) 成立. 至于 4)，只须注意到 M 有可数基，并且局部连通的拓扑空间中的连通分支必定是开子集. ▌

现在设 M 是 n 维拓扑流形，U 是 M 中的开子集，$\varphi: U \to \varphi(U)$ 是 U 到 $\mathbf{R}^n$ 的开子集 $\varphi(U)$ 上的同胚，我们把 (U, φ) 称为 M 上的一个局部坐标系. M 的局部坐标系 (U, φ) 称为是含 p 的局部坐标系，如果 $p \in U$.

若 (U,φ) 是 M 的局部坐标系，对每个 $p\in U,\varphi(p)$ 的坐标 $(u^1(p),\cdots,u^n(p))$ 称为 p 关于局部坐标系 (U,φ) 的局部坐标. 由对应

$$p\longmapsto u^i(p),\qquad p\in U$$

定义了 U 上一个函数，记作 $x^i:U\to\mathbf{R}$，称为局部坐标系 (U,φ) 的第 i 个坐标函数. 若用 $u^i:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 上第 i 个坐标函数(即 u^i 把 $\mathbf{R}^n$ 中每个点对应于它的第 i 个坐标)，显然有 $x^i=u^i\circ\phi$.

若 (U,φ) 和 (V,ψ) 是 M 的两个局部坐标系，使得 $U\cap V\neq\varnothing$，于是有同胚

$$\psi\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap V)\to\psi(U\cap V)$$

和
$$\varphi\circ\psi^{-1}:\psi(U\cap V)\to\varphi(U\cap V)$$

(图 4).

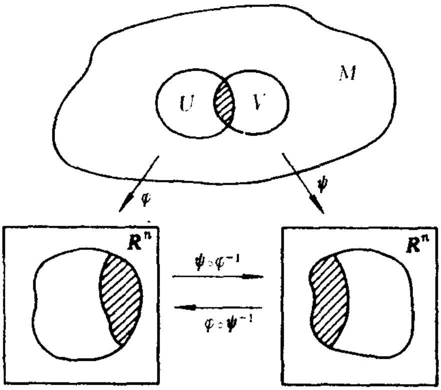

图 4

我们把 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 和 $\varphi\circ\psi^{-1}$ 称为这两个局部坐标系之间的坐标变换. 对于 $p\in U\cap V$，若 p 关于 (U,φ) 和 (V,ψ) 的局部坐标分别为 $(u^1,\cdots,u^n)$ 和 $(v^1,\cdots,v^n)$，则坐标变换 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 和坐标变换 $\varphi\circ\psi^{-1}$ 可分别由两组连续函数

$$v^j=v^j(u^1,\cdots,u^n),\qquad j=1,2,\cdots,n$$

和
$$u^i=u^i(v^1,\cdots,v^n),\qquad i=1,2,\cdots,n$$

来表示，并且这两组函数满足

$$v^j(u^1(v^1, \cdots, v^n), \cdots, u^n(v^1, \cdots, v^n)) = v^j,$$

$$u^i(v^1(u^1, \cdots, u^n), \cdots, v^n(u^1, \cdots, u^n)) = u^i.$$

M 上的一组局部坐标系 $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}$ 称为是 M 的一个图册，如果 $\bigcup_\lambda U_\lambda = M$.

下面我们进一步分析在拓扑流形上定义可微函数还将涉及些什么？我们假定已取好 M 的一个图册 $\mathscr{D} = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}$，按照原来的设想，对 $p \in M$，设 $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ 是 $\mathscr{D}$ 中某个含 p 的局部坐标系，我们希望能用 f 的局部表示 $f \circ \varphi_\lambda^{-1}$ 在 $\varphi_\lambda(p)$ 可微来作为 f 在 p 可微的定义. 现在如果 $\mathscr{D}$ 中还有另一个局部坐标系 (U_μ, φ_μ) 也含有 p，于是在 $U_\lambda \cap U_\mu$ 上 f 就有两个局部表示

$$f \circ \varphi_\lambda^{-1} : \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \to \boldsymbol{R}$$

和

$$f \circ \varphi_\mu^{-1} : \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu) \to \boldsymbol{R}.$$

这时，对于 p 可能出现其中一个局部表示，例如 $f \circ \varphi_\lambda^{-1}$，在 $\varphi_\lambda(p)$ 可微，而另一个局部表示 $f \circ \varphi_\mu^{-1}$ 在 $\varphi_\mu(p)$ 却不可微的情况. 为了使得上述定义是合理的，我们必须设法消除这种可能发生的不一致. 怎样才能克服这样的困难呢？只须注意到在 $U_\lambda \cap U_\mu$ 上这两个局部表示有关系

$$f \circ \varphi_\lambda^{-1} = (f \circ \varphi_\mu^{-1}) \circ (\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1})$$

和

$$f \circ \varphi_\mu^{-1} = (f \circ \varphi_\lambda^{-1}) \circ (\varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1}).$$

不难看出，如果我们对坐标变换加上可微性的要求，所说的困难就能顺利地得到克服. 这样，我们就找到了在拓扑流形上定义可微函数所必须具备的条件，即需要在它上面取好一个图册，并且这个图册的所有可能的坐标变换都是可微的. 带有这种结构的拓扑流形就称为微分流形. 下面我们来给它的正式

定义.

设 (U,φ)和(V,ψ) 是拓扑流形 M 上的两个局部坐标系，(U,φ) 和 (V,ψ) 称为是相容的，如果 $U\cap V=\varnothing$，或者当 $U\cap V\neq\varnothing$时它们之间的坐标变换 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 和 $\varphi\circ\psi^{-1}$ 是光滑的. 换句话说，即表示这两个坐标变换的两组函数 $u^i(i=1,\cdots,n)$ 和 $v^j(j=1,\cdots,n)$ 是 C^∞ 函数.

M 的一个图册称为是光滑图册，如果这图册中的任何两个局部坐标系都是相容的. M 的一个局部坐标系称为与 M 的一个光滑图册是相容的，如果这个局部坐标系与图册中的每个局部坐标系都相容. M 的光滑图册称为是最大的，如果它包含所有与它相容的局部坐标系.

定义 1.2 在 n 维拓扑流形 M 上给定一个最大的光滑图册 $\mathscr{A}$，则称 $(M,\mathscr{A})$ 为 n 维微分流形. $\mathscr{A}$ 称为 M 上的微分构造.

为简单起见，以后简称 $\mathscr{A}$ 中局部坐标系为(坐标)卡. 我们也常常把微分流形 $(M,\mathscr{A})$ 简称为微分流形 M，这时，我们总认为在 M 上已给定了某个确定的微分构造 $\mathscr{A}$.

命题 1.2 设 M 是 n 维拓扑流形. $\mathscr{A}=\{(U_\lambda,\varphi_\lambda)\}$ 是 M 的一个光滑图册，则存在唯一的 M 的微分构造 $\mathscr{A}^*$，它包含 $\mathscr{A}$.

证明 命 $\mathscr{A}^*$ 是 M 的全体与 $\mathscr{A}$ 相容的局部坐标系所成的集合，我们证明 $\mathscr{A}^*$ 是 M 上的微分构造.

先证明 $\mathscr{A}^*$ 是 M 的光滑图册. 即若 (V,ψ) 和 (V',ψ') 是 $\mathscr{A}^*$ 中任意两个局部坐标系，使 $V\cap V'\neq\varnothing$. 必须证 $\psi'\circ\psi^{-1}$ 和 $\psi\circ\psi'^{-1}$ 都是光滑的. 设 $u\in\psi(V\cap V')$ 是任意一点，$p\in V\cap V'$ 使得 $\psi(p)=u$. 因为 $\mathscr{A}$ 是 M 的图册，故有 $\mathscr{A}$ 中

含 p 的局部坐标系(U,φ). 这时，在 $\psi(U\cap V\cap V')$上有

$$\psi'\circ\psi^{-1}=(\psi'\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\psi^{-1}).$$

又因为(V,ψ)和(V',ψ')都与 $\mathscr{A}$ 相容，所以 $\psi'\circ\varphi^{-1}$和$\varphi\circ\psi^{-1}$都是光滑的，从而它们的复合映射也是光滑的. 这证明了 $\psi'\circ\psi^{-1}$ 的光滑性. $\psi\circ\psi'^{-1}$ 的光滑性可以类似地验证.

其次，由 $\mathscr{A}^*$ 的定义方式，易看出 $\mathscr{A}^*$ 是 M 上包含 $\mathscr{A}$ 的最大光滑图册，即 $\mathscr{A}^*$ 是 M 的包含 $\mathscr{A}$ 的微分构造. 显然，$\mathscr{A}^*$ 是唯一的. ▌

下面我们给一些微分流形的例子. 根据命题 1.2 只须在拓扑流形上给一个光滑图册.

例 1 $\boldsymbol{R}^n$ 是 n 维微分流形.

事实上，它的一个光滑图册由唯一的局部坐标系$(\boldsymbol{R}^n,\mathrm{id})$组成，这里 id 表示 $\boldsymbol{R}^n$ 上的恒同映射. $\boldsymbol{R}^n$ 上由这个光滑图册所确定的微分构造称为 $\boldsymbol{R}^n$ 上的标准微分构造.

例 2 $S^n(n\geqslant 1)$是n 维微分流形.

为简单起见，只考虑 $n=1$ 的情形. 我们以两种方式来给出 S^1 上的光滑图册.

1)取

$$U_1=\{(u^1,u^2)\in S^1|u^1>0\},$$
$$U_2=\{(u^1,u^2)\in S^1|u^1<0\},$$
$$U_3=\{(u^1,u^2)\in S^1|u^2>0\},$$
$$U_4=\{(u^1,u^2)\in S^1|u^2<0\}.$$

命 $\varphi_i:U_i\to(-1,1)$，使得

$$\varphi_i(u^1,u^2)=u^2,\qquad i=1,2,$$
$$\varphi_i(u^1,u^2)=u^1,\qquad i=3,4.$$

易看出 $\mathscr{A}_1=\{(U_i,\varphi_i),i=1,2,3,4.\}$ 是 S^1 的一个图册. 下

面我们来验证 $\mathscr{A}_1$ 的坐标变换是光滑的. 例如，在 $\varphi_1(U_1\cap U_3)$ 上 $\varphi_3\circ\varphi_1^{-1}$ 即下述映射的复合(图 5)

$$u^2\longmapsto(\sqrt{1-(u^2)^2},\ u^2)\longmapsto\sqrt{1-(u^2)^2}.$$

显然，它是光滑的. 其余坐标变换的光滑性可以类似地验证. 因而 $\mathscr{A}_1$ 是 S^1 的一个光滑图册.

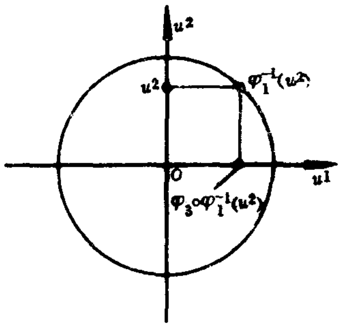

图 5

2) 取

$$U_+=S^1\backslash\{(0,\ -1)\},$$

$$U_-=S^1\backslash\{(0,\ 1)\}.$$

命 $\varphi_\pm:U_\pm\to\boldsymbol{R}$，使得

$$\varphi_\pm(u^1,\ u^2)=\frac{u^1}{1\pm u^2}.$$

易看出 $\mathscr{A}_2=\{(U_+,\varphi_+),(U_-,\varphi_-)\}$ 是 S^1 的一个图册. 由于

$$\varphi_-\circ\varphi_+^{-1}(w)=\frac{1}{w},\qquad w\in\varphi_+(U_+\cap U_-),$$

$$\varphi_+\circ\varphi_-^{-1}(w')=\frac{1}{w'},\qquad w'\in\varphi_-(U_+\cap U_-).$$

显然，它们都是光滑的. 因而，$\mathscr{A}_2$ 也是 S^1 的一个光滑图册(图 6).

不难看出，S^1 的这两个光滑图册中的局部坐标系也都彼此相容，因而它们所决定的微分构造是相同的.

对于 $n>1$ 的情形，可类似地证明 S^n 是微分流形.

例 3 $\boldsymbol{RP}^n$ 是 n 维微分流形.

命

$$U_k=\{[(u^1,\cdots,u^{n+1})]\mid(u^1,\cdots,u^{n+1})\in S^n,u^k\neq0\},$$

$$k=1,\ \cdots,\ n+1.$$

定义 $\varphi_k: U_k \to \mathrm{Int}B^n(1)$ 使得

$$\varphi_k([(u^1, \cdots, u^{n+1})])$$
$$= u^k \cdot |u^k|^{-1}(u^1, \cdots, u^{k-1}, u^{k+1}, \cdots, u^{n+1}),$$

其中 $B^n(1) = \left\{ (u^1,\cdots,u^n) \in \boldsymbol{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n}(u^i)^2 \leqslant 1 \right\}$. 易验证 $\mathscr{A} = \{(U_k,\varphi_k), k = 1,\cdots,n+1\}$是$\boldsymbol{RP}^n$的一个光滑图册.

例 4 n 维微分流形的任一非空开子集是 n 维微分流形.

设 M 是 n 维微分流形，$\mathscr{A} = \{(U_\lambda,\varphi_\lambda)\}$ 是 M 的光滑图册. 若 M' 是 M 的任一非空开子集. 命

$$\mathscr{A}' = \{(U_\lambda \cap M', \varphi_\lambda|U_\lambda \cap M') \mid U_\lambda \cap M' \neq \varnothing\}.$$

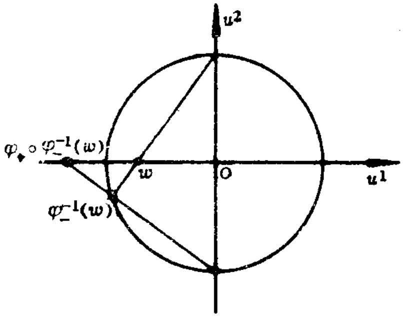

图 6

显然，$\mathscr{A}'$ 是 M' 的一个光滑图册. 它唯一决定 M' 上一个微分构造. M' 具有这个微分构造所成的微分流形称为 M 的开子流形. 特别地，$\boldsymbol{R}^n$ 中任一非空开集是 $\boldsymbol{R}^n$ 的开子流形.

例 5 若 M 和 N 分别是 m 维和 n 维的微分流形，则它们的拓扑积 $M\times N$是 $m+n$ 维微分流形.

事实上，若

$$\mathscr{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\} \quad 和 \quad \mathscr{B} = \{(V_\lambda, \psi_\lambda)\}$$

分别是 M 和 N 的光滑图册. 记

$$\mathscr{A} \times \mathscr{B} = \{(U_\alpha \times V_\lambda, \varphi_\alpha \times \psi_\lambda)\},$$

其中 $\varphi_\alpha \times \psi_\lambda : U_\alpha \times V_\lambda \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \psi_\lambda(V_\lambda)$ 由

$$(\varphi_\alpha \times \psi_\lambda)(p, q) = (\varphi_\alpha(p), \psi_\lambda(q)), \quad (p, q) \in U_\alpha \times V_\lambda$$

定义. 易验证 $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ 是 $M \times N$ 的光滑图册. 它唯一决定了 $M \times N$ 上的一个微分构造. $M \times N$ 具有这一微分构造所成的微分流形称为微分流形 M 和 N 的积流形. 仍记作 $M \times N$. 特别地，环面 $T^2 = S^1 \times S^1$ 和柱面 $C = S^1 \times \mathbf{R}$ 等都是 2 维微分流形.

最后，我们来看一个较为复杂的例子.

例 6 用 $T(m,n)$ 表示全体 $m \times n$ 矩阵所成的集合. 我们以自然方式等同 $T(m,n)$ 与 $\mathbf{R}^{mn}$，例如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow (a_{11}, \cdots, a_{1n}, a_{21}, \cdots, a_{2n}, \cdots, a_{m1}, \cdots, a_{mn}),$$

于是 $T(m,n)$ 成为一 mn 维微分流形.

记 $T(m,n;k)$ 为全体秩等于 k 的 $m \times n$ 矩阵所成的集合，并且设 $T(m,n;k)$ 具有作为 $T(m,n)$ 子空间的拓扑. 我们证明：$T(m,n;k)$ 是 $k(m+n-k)$ 维微分流形.

若 $k = \min\{m,n\}$，易看出 $T(m,n;k)$ 是 $T(m,n)$ 的非空开子集. 因而 $T(m,n;k)$ 是 $mn = k(m+n-k)$ 维微分流形.

现在我们证明：若 $k < \min\{m,n\}$，$T(m,n,;k)$ 也是 $k(m+n-k)$ 维微分流形.

首先，我们证明 $T(m,n;k)$ 是 $k(m+n-k)$ 维拓扑流形. 设 X_0 是 $T(m,n;k)$ 中的任意一个矩阵，于是存在可逆的 $m \times m$ 矩阵 P 和可逆的 $n \times n$ 矩阵 Q，使得

$$PX_0Q=\begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix},$$

其中 A_0 是 $k\times k$ 可逆矩阵，即 $\det A_0\neq 0$. 由于 $\det: T(k,k)\to\mathbf{R}$ 是连续函数，故必存在 $\varepsilon_0>0$，使得当 $T(k,k)$ 中的矩阵 A 与 A_0 的对应元素之差的绝对值小于 ε_0 时，亦有 $\det A\neq 0$.

考虑映射 $F: T(m,n)\to T(m,n)$，它由

$$F(X)=PXQ,\qquad X\in T(m,n)$$

定义. 易看出 F 是 $T(m,n)$ 到自身的同胚. 记

$$U^*=\left\{\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\in T(m,n)\;\middle|\;\begin{matrix}A\text{与}A_0\text{对应元素之差的绝对}\\ \text{值小于}\varepsilon_0\text{ . }B,C,D\text{任意.}\end{matrix}\right\}.$$

显然，U^* 是 $T(m,n)$ 中包含 PX_0Q 的开子集. 于是，$F^{-1}(U^*)$ 是 $T(m,n)$ 中包含 X_0 的开子集. 命

$$U=F^{-1}(U^*)\cap T(m,n;k),$$

则 U 是 $T(m,n;k)$ 中包含 X_0 的开子集. 注意，U 中的元素也可以这样来刻划：若 $X\in T(m,n)$，记

$$F(X)=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

则 $X\in U\Leftrightarrow X\in F^{-1}(U^*)$，并且 $D=CA^{-1}B$. 记

$$\mathscr{G}=\left\{\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}\;\middle|\;\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\in U^*\right\}.$$

在前面所作的等同下，$\mathscr{G}$ 自然可以看成 $\mathbf{R}^{k(m+n-k)}$ 中的开子集.

现在定义 $h: U\to\mathscr{G}$ 如下：对于 $X\in U$，设

$$F(X)=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

命