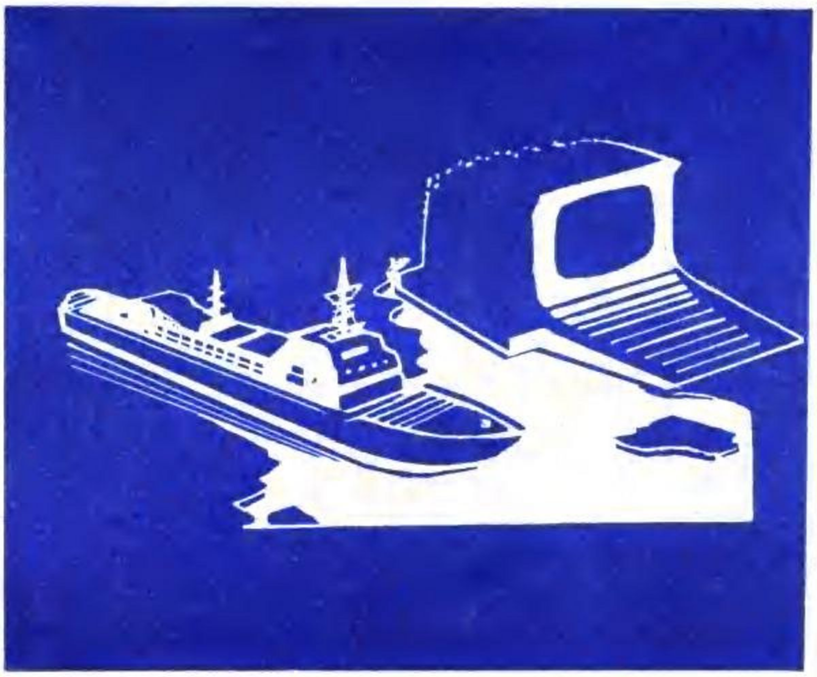
高等学校
试用教材

管理决策

（水运管理工程 经济专业用）

上海海运学院
刘大镕 主编
程祖德 副主编



人民交通出版社

高等学校试用教材

管理决策

Guanli Juece

（水运管理工程/经济专业用）

上海海运学院 刘大镕 主编
程祖德 副主编

人民交通出版社

（京）新登字091号

内 容 提 要

本书从水运部门的实际出发，系统地介绍了现代管理中的一些决策方法：线性规划，非线性规划，多目标决策，动态规划，层次分析法，排队论，图与网络分析，存贮论，决策论对策论，投入产出法等十一章。书中按工科院校学生能接受的程度，详细而具体介绍了各种实用方法和大量实际应用的例子。本书是为水运经济与管理专业编写的教材，同时也兼顾了其他专业的需要，也可作为其他管理工作者及教师的参考书。

高等学校试用教材

管 理 决 策

（水运管理工程/经济专业用）

上海海运学院 刘大镕 主编 程祖德 副主编

插图设计：秦淑珍 正文设计：刘晓方 责任校对：张 捷

人民交通出版社出版

（100013北京和平里东街10号）

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经销

平谷大华山印刷厂印刷

开本：787×1092 1/16 印张：22.875 字数：585千

1995年3月 第1版

1995年3月 第1版 第1次印刷

印数：0001—2000册 定价：11.00元

ISBN 7-114-02000-7

F·00246

前　言

管理科学是研究人类管理活动的规律及其应用的科学，同时也是一门涉及多学科与多领域的综合性交叉科学。管理科学通过使用定性与定量相结合的方法，运用先进的科学手段，研究和解决复杂的管理问题。

实现管理现代化，是建设具有中国特色的社会主义现代化事业的重要组成部分。

现代化管理的核心在于决策。决策贯穿于管理工作的始终。每个管理者都应当努力提高自己的决策水平，更好、更合理、更有效地进行管理。管理决策是现代化管理的基础理论，是现代化管理人员必不可缺少的知识，它不仅指出了提高管理效益的方法，也提供了分析问题的思想，有助于提高管理者的素质，正是为了这一目的，我们根据几年来讲授管理学运筹学等课程的经验体会，在原有教材的基础上进行了修改和补充，写成了《管理决策》这本书。

本书各章内容执笔人如下：

刘大镕教授：第一章，第三章，第五章，第十一章；

欧阳晋泰副教授：第二章，第四章；

程祖德副教授：　第九章，第十章；

蒋良奎讲师：　　第八章；

吴　军讲师：　　第七章；

刘大镕、蒋良奎：第六章。

本书由刘大镕副教授主编，程祖德副教授副主编，上海交通大学胡毓达教授在百忙中极其认真地审阅了全部书稿，提出了许多宝贵意见，在此表示衷心地感谢。

由于编者水平所限，不妥和错误之处恳切盼望读者批评、指正。

编　者

目　　录

第一章　线性规划

§1.1　线性规划的数学模型

线性规划是运筹学的一个分支，它产生于40年代。最初应用于军事方面，以后逐步被应用于工业、农业、交通运输、科学技术以及经济计划、管理等部门。经过许多科学家的努力，线性规划的理论日趋完善。特别是电子计算机的出现，使线性规划解决问题的规模愈来愈大。线性规划应用广，适应性强，计算简单，所以它是运筹学的基本内容之一。

作为生产计划的组织和管理人员，都要研究在一定生产条件下，如何安排现有的人力、物力、财力，使得生产部门获得最大的经济效益。在水运部门的问题有：合理的组织运输，港口的规划，以及港、船、厂技术设备的合理使用，最佳投资效果，船舶运行方式和编队形式的合理选择，船舶配积载的选择等。这些问题中的相当一部分可以用线性规划加以解决。

衡量一个生产部门的经济效益，必须用一个数量指标，如果这个数量指标可以表达为一个函数形式，则我们可以称这个函数为目标函数。同时，我们还要用各种数量指标来反映整个经济活动过程中各个因素的相互制约作用。如果这些数量指标间的相互关系可以用一组函数不等式表示，则这组函数不等式称为约束条件。有了目标函数，有了约束条件，这就形成一个数学规划问题。也就是说，有了一个数学模型。这样，才有可能用数学方法去解决实际问题。特别在数学规划模型中，如果目标函数和约束条件都是线性的，则此问题就是线性规划问题。

下面，我们通过几个例子来说明线性规划模型。

例1-1　设有甲、乙、丙三种货物需要装船，其积载因数分别为1.5、2、1（米³/吨），舱时量分别为50、100、40（吨/时），总装货量为1000吨，总容积不大于1400米³。问该船各装甲、乙、丙三种货物多少吨，才能使装货时间最短？

解　设装甲、乙、丙三种货物分别为x_1、x_2、x_3吨，则问题是求目标函数

$$\min \quad s=\frac{1}{50}x_1+\frac{1}{100}x_2+\frac{1}{40}x_3 \tag{1.1}$$

并且x_1，x_2，x_3要满足如下的约束条件：

$$\left.\begin{aligned}&1.5x_1+2x_2+x_3\leqslant 1400\\&x_1+x_2+x_3=1000\\&x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,3\end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

例1-2　根据运输计划，某航运局需要将一些不同类型的货物装上一艘货船，这些货物的重量、体积，冷藏要求，可燃性指数以及运费都不相同，具体数值由表1.1给出。

假定可以装载的总重量为40000吨，总体积为50000米³，其中可以冷藏的体积为10000米³，容许的可燃性指数总和不能超过750。问该船应装哪几种货物，各装多少件，才能使总运费的收入最大？

表1.1

货号	重　量 （吨/件）	体　积 （米³/件）	冷藏要求	每件的可燃性指数	运　费 （元/吨）
1	2	1	需　要	0.1	50
2	0.5	2	不需要	0.2	100
3	1	3	不需要	0.4	150
4	1.2	4	需　要	0.1	100
5	2.5	2	不需要	0.3	250
6	5	6	不需要	0.9	200

解　设x_j为需要装载的第j号货物的件数，$j=1,2\cdots,6$　则目标函数

$$\max\ s=50\times2\times x_1+100\times0.5\times x_2+150\times1\times x_3+100\times1.2\times x_4+250\times2.5\times x_5+200\times5\times x_6$$

受约束

$$2x_1+0.5x_2+1x_3+1.2x_4+2.5x_5+5x_6\leqslant40000$$

（总重量不能超过40000吨）

$$2x_2+4x_3+2x_5+5x_6\leqslant40000$$

（非冷藏的体积不能超过40000米³）

$$x_1+3x_4\leqslant10000$$

（冷藏的体积不能超过10000米³）

$$0.1x_1+0.2x_2+0.4x_3+0.1x_4+0.3x_5+0.9x_6\leqslant750$$

（总的可燃性指数不能超过750）

$$x_j\geqslant0\quad j=1,2\cdots,6$$

（货物的件数不能是负数）

例1-3　假定国家决定在A、B、C三地建设三个新型电机制造厂，并且建立五个地区性仓库，各厂生产的产品先运到这些仓库存放，然后再向用户供应。三个厂每周生产的电机台数如表1.2。五个仓库每周需要量如表1.3。从各厂运到各仓库的运输费（元/台）由表1.4给出，现要求出一种运输方案使得总的运费达到最小值。

表1.2

工　厂	A	B	C
生产台数	600	400	500

表1.3

仓　库	1	2	3	4	5
需要台数	200	250	300	550	200

解　令x_{ij}=工厂i发送给仓库j的台数，其中：$i=A,B,C$，$j=1,2,\cdots,5$于是，总运费为

$$s=2x_{A1}+x_{A2}+3x_{A3}+x_{A4}+2x_{A5}+4x_{B1}+2x_{B2}+x_{B3}+3x_{B4}+x_{B5}+2x_{C1}+x_{C2}+x_{C3}+3x_{C4}+4x_{C5}$$

表1.4

收点 / 发点	1	2	3	4	5
A	2	1	3	1	2
B	4	2	1	3	1
C	2	1	1	3	4

从各厂运至各仓库的数量不能超过各厂的生产能力，例如，对A厂应有

$$x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}+x_{A4}+x_{A5}\leqslant600$$

类似地，对于B厂，C厂有

$$x_{B1}+x_{B2}+x_{B3}+x_{B4}+x_{B5}\leqslant400$$

$$x_{C1}+x_{C2}+x_{C3}+x_{C4}+x_{C5}\leqslant500$$

除了上述可供装运数量的几个约束条件外，我们还要保证满足各个仓库的需要。例如，对于仓库1，应有

$$x_{A1}+x_{B1}+x_{C1}=200$$

类似地，对于其他仓库，我们有

$$x_{A2}+x_{B2}+x_{C2}=250 \qquad x_{A4}+x_{B4}+x_{C4}=550$$

$$x_{A3}+x_{B3}+x_{C3}=300 \qquad x_{A5}+x_{B5}+x_{C5}=200$$

运送台数x_{ij}也都必须为非负数。

因此，问题可叙述为

$$\begin{aligned}\min s = & 2x_{A1}+x_{A2}+3x_{A3}+x_{A4}+2x_{A5}+4x_{B1}+2x_{B2}+x_{B3}+3x_{B4}+x_{B5}+2x_{C1}\\ & +x_{C2}+x_{C3}+3x_{C4}+4x_{C5}\end{aligned}$$

受约束

$$\left.\begin{array}{l} x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}+x_{A4}+x_{A5}\leqslant 600\\ x_{B1}+x_{B2}+x_{B3}+x_{B4}+x_{B5}\leqslant 400\\ x_{C1}+x_{C2}+x_{C3}+x_{C4}+x_{C5}\leqslant 500\\ x_{A1}+x_{B1}+x_{C1}=200\\ x_{A2}+x_{B2}+x_{C2}=250\\ x_{A3}+x_{B3}+x_{C3}=300\\ x_{A4}+x_{B4}+x_{C4}=550\\ x_{A5}+x_{B5}+x_{C5}=200\\ x_{ij}\geqslant 0 \quad i=A,B,C,\ j=1,\cdots,5 \end{array}\right\} \tag{1.3}$$

式(1.3)所给出的问题，由于系数具有一种非常特殊的结构，它通常被称为运输问题。

通过上面三个例子的讨论，我们可以看出，这些问题都是在条件

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n(\geqslant=\leqslant)b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n(\geqslant=\leqslant)b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n(\geqslant=\leqslant)b_m\\ \qquad x_j\geqslant 0,\ j=1,\cdots,n \end{array}$$

的约束下，求目标函数

$$s=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

的最大值或最小值。

这就是线性规划问题的一般数学表达式。

§1.2 线性规划的标准形式

线性规划的标准形式是

$$(\mathrm{LP})^{①}\quad \min \quad s=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \tag{1.4}$$

$$\mathrm{s.t.}^{②}\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i \quad (i=1,\cdots,m) \tag{1.5}$$

---

① LP linear programming的缩写，线性规划。
② s.t. subject to的缩写，受约束于…。

$$x_j \geqslant 0 (j=1,\cdots,n) \tag{1.6}$$

其中，a_{ij}，b_i，c_j 均为已知常数。

以后我们只对标准形式进行讨论，因为其他形式的问题都可化成标准形式：

1. 若问题是求目标函数s的极大值$\max s$，则可化成求$-s$的极小值问题$\min(-s)$。

2. 若约束条件中有不等式约束

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leqslant b_i \tag{1.7}$$

则可添加一个新的变量ξ_i，用下面的两个约束

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + \xi_i = b_i \tag{1.8}$$

$$\xi_i \geqslant 0 \tag{1.9}$$

来代替原来的不等式约束。变量ξ_i称为松弛变量。

3.若约束条件中有不等式约束

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geqslant b_i \tag{1.10}$$

则可添加一个新的变量η_i，用下面的两个约束

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - \eta_i = b_i \tag{1.11}$$

$$\eta_i \geqslant 0 \tag{1.12}$$

来代替原来的不等式约束，变量η_i称为剩余变量。

4.若约束条件中出现

$$x_j \geqslant K_j (K_j \neq 0) \tag{1.13}$$

则令$\xi_j = x_j - K_j$，从$x_j = \xi_j + K_j$代入消去x_j，再加入约束条件

$$\xi_j \geqslant 0 \tag{1.14}$$

5.若约束条件中无

$$x_j \geqslant 0 \tag{1.15}$$

约束，这种x_j称为自由变量，则令

$$x_j = u_j - v_j \tag{1.16}$$

代入消去x_j，并增加

$$u_j \geqslant 0 \text{ 和 } v_j \geqslant 0 \tag{1.17}$$

两个约束。

例1-4 把下列线性规划问题化成标准形式

$$\begin{aligned} \max \quad & s = x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 \leqslant 6 \\ & x_1 + 7x_2 \geqslant 4 \\ & x_1 - x_2 = 3 \\ & x_1 \geqslant 0 \end{aligned} \tag{1.18}$$

解 可引入松弛变量ξ_1和剩余变量η_2，并对自由变量x_2作替换$x_2 = u_2 - v_2$，则上述规划问题就可以化成相应的标准形式

$$\begin{aligned} \min \quad & -s = -x_1 - u_2 + v_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 3u_2 - 3v_2 + \xi_1 = 6 \\ & x_1 + 7u_2 - 7v_2 - \eta_2 = 4 \\ & x_1 - u_2 + v_2 \quad = 3 \\ & x_1 \geqslant 0, \xi_1 \geqslant 0, \eta_2 \geqslant 0 \end{aligned} \tag{1.19}$$

$$u_2 \geqslant 0, v_2 \geqslant 0$$

若令$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，$c=(c_1,\cdots,c_n)^T, b=(b_1,\cdots,b_m)^T$，$A=(a_{ij})$为$m\times n$矩阵，则线性规划的标准形式进一步可写成

$$(LP)\min \quad s=c^T x \tag{1.20}$$

$$\text{s.t.} \quad Ax=b \tag{1.21}$$

$$x \geqslant 0 \tag{1.22}$$

为了方便，我们还可以不妨假定：（1）$n>m$；（2）A的秩为m；（3）$b\geqslant 0$。其中向量$b\geqslant 0$表示b的所有分量都非负，即$b_i\geqslant 0$，$i=1,\cdots,m$。

定义1.1 集合$K=\{x|Ax=b,\ x\geqslant 0\}$称为（LP）的能行域。

若$x^*\in K$，则称x^*是（LP）的可行解。

若$x^*\in K$，且

$$c^T x^* = \min_{x\in K} c^T x$$

则称x^*是（LP）的最优解。

下列形式称为线性规划的典则形式

$$\begin{aligned}(LP)\min \quad & s=c^T x \\ \text{s.t.}\ & Ax\geqslant b \\ & x\geqslant 0\end{aligned} \tag{1.23}$$

§1.3 线性规划问题的几何解释

求解（LP）就是要从(LP)的全部可行解中选出使目标函数$s=c^T x$达到最小值的解x^*。由于可行解是能行域$K=\{x|Ax=b, x\geqslant 0\}$中的点，所以，我们现在要对$K$的几何形状以及最优解$x^*$在$K$中的位置有一个直观的了解。

例1-5 考虑下列线性规划问题

$$\begin{aligned}\max \quad & s=2x_1+5x_2 \\ \text{s.t.}\ & x_1+2x_2\leqslant 16 \\ & 2x_1+x_2\leqslant 12 \\ & x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0\end{aligned} \tag{1.24}$$

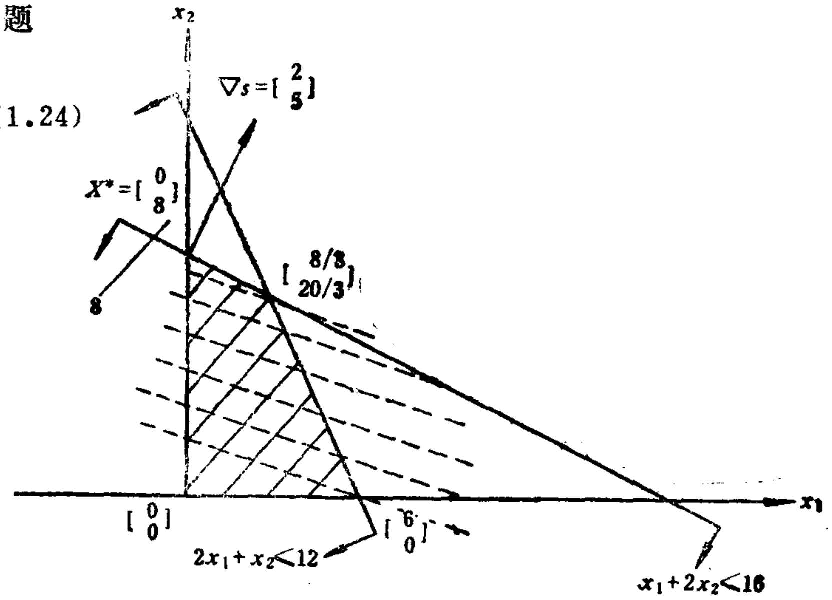


图 1.1

其能行域共有四个不等式约束组成，每个约束都代表一个半平面，所以能行域就是此四个半平面之交，为一个凸多边形（见图1.1)。对某个固定的值s_0，方程$s_0=2x_1+5x_2$所表示的直线称为目标函数$s=2x_1+5x_2$的等值线。对于不同的s_0值，其等值线为一族平行直线，在图1.1中用虚线表

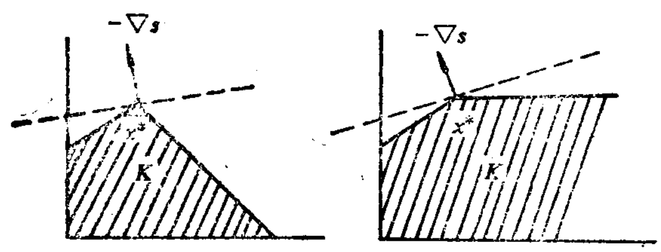
$$\nabla s=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial s}{\partial x_1}\\ \\ \dfrac{\partial s}{\partial x_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ \\ 5\end{pmatrix} \tag{1.25}$$

示。目标函数 $s=2x_1+5x_2$ 的梯度 它与所有的等值线都垂直，且它指向目标函数值增大的方向，因而我们从图 1.1 中可看出式(1.24)的目标函数 s 将在多边形 K 的顶点 $x^*=(0,8)^T$ 处达到它的最大值，x^* 即为式(1.24)的最优解。

一般（LP）的能行域是由若干超平面所围成的凸多面体（有界或无界）。从几何直观来看（LP）问题可能有以下几种情况：

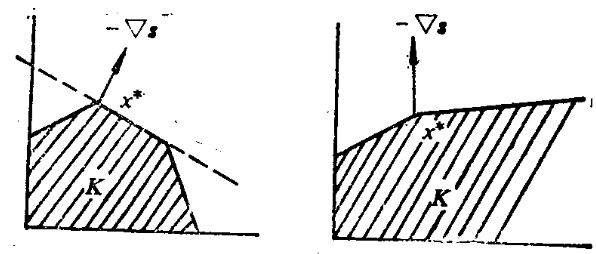
1.具有唯一的最优解x^*，它的最优值$|s^*|<+\infty$。这时x^*必为K的某一顶点（图1.2）

2.最优解x^*不唯一，但最优值$|s^*|<+\infty$。这时x^*为K的边界点（图1.3并参阅习题1—4）。



a) K有界　　b) K无界

图 1.2



a) K有界　　b) K无界

图 1

3.在K中目标函数s无下界，这时K也必然无界（图1.4并参阅习题1—6）。

4.$K=\phi$（空集）时，（LP）无解(见习题1—7)。

因此，当 $K\neq\phi$ 且 K 中目标函数有下界时，(LP)的最优解x^*一定可从K的顶点中找到。

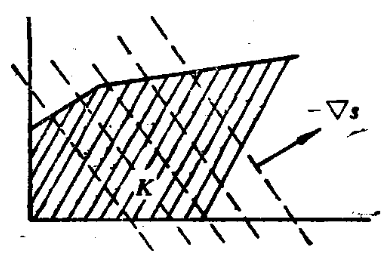


图 1.4

§1.4 凸　　集

一、凸　　集

直观地看，平面上的三角形、矩形是凸多边形，而五角星不是凸多边形（见图1.5），图1.6中的形状是凸的，而图1.7中的形状不是凸的。凸图形的特征是：图形中任意两点的联线全部落在该图形中（见图1.6）。我们利用这一特征来定义凸集。

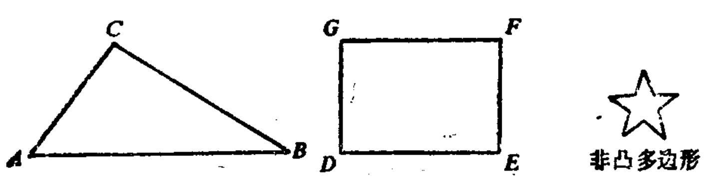


图 1.5

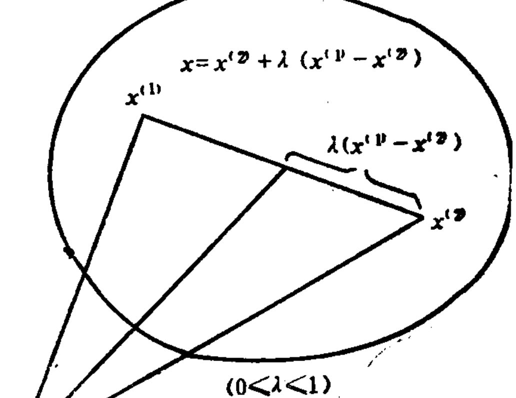


图 1.6

定义1.2　设A为n维欧氏空间中的点集，如果对于任意的$x^{(1)}$、$x^{(2)}\in A$，以及数$\lambda\in(0,1)$，均有

$$\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)}\in A$$

则称A为凸集。

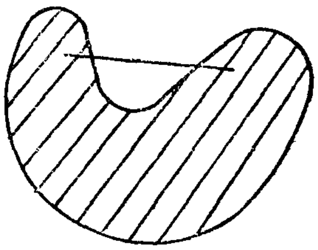


图 1.7

定理1.1 能行域$K=\{x\mid Ax=b,x\geqslant 0\}$是凸集。

证明 对任意的$x^{(1)}$，$x^{(2)}\in K$，则

$$Ax^{(1)}=b\quad x^{(1)}\geqslant 0$$

$$Ax^{(2)}=b\quad x^{(2)}\geqslant 0$$

于是，对任意$\lambda\in(0,1)$，有

$$A(\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)})=\lambda Ax^{(1)}+(1-\lambda)Ax^{(2)}=\lambda b+(1-\lambda)b=b$$

又

$$\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)}\geqslant 0$$

因此，$\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)}\in K$，$\therefore K$是凸集。

二、顶　点

图1.5中的点A，B，C，D，E，F，G通常被称为顶点。这些点都有这样的特征，它们中的任何一个都不能成为凸集中任何一条线段的内点。这一特征完全刻画了这类特殊的点。

定义1.3 若x是凸集A中的一点，且不存在A中两个不同的点$x^{(1)}$和$x^{(2)}$，使得

$$x=\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)}\quad (0<\lambda<1) \tag{1.26}$$

则称x为凸集A的顶点。

应特别注意，这里的λ只能取（0，1）之间的数，而不能取0，或1。

显然，根据定义，圆周上每一点都是圆的顶点。

§1.5 线性规划的基本定理

给定线性规划（LP），若它的能行域$K=\{x\mid Ax=b,\ x\geqslant 0\}$非空，则称（LP）是可行的，否则称（LP）是不可行的。当$K\neq\phi$时，（LP）存在最优解$x^*\in K$使得$c^Tx^*=\min\limits_{x\in K}c^Tx$，或是存在解无界。

以下我们以a_1，a_2，…，a_n分别表示A的n个列向量，即

$$A=[a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n] \tag{1.27}$$

由于A的秩为m，因此一定可以从a_1，a_2，…，a_n中选出m个线性无关的向量a_{B1}，a_{B2}，…，a_{Bm}，它们组成一个m阶的非奇异矩阵

$$B=[a_{B1},\ a_{B2},\ \cdots,\ a_{Bm}] \tag{1.28}$$

称为（LP）的一个基底。令指标集

$$I_B=\{B_1,\ B_2,\ \cdots,\ B_m\} \tag{1.29}$$

$$I_D=\{1,2,\cdots,n\}\backslash I_B \tag{1.30}$$

经过适当的次序调整，矩阵A，向量x和c可以写成

$$A=[B,\ D] \tag{1.31}$$

$$x=\begin{pmatrix}x_B\\x_D\end{pmatrix},\quad c=\begin{pmatrix}c_B\\c_D\end{pmatrix} \tag{1.32}$$

其中$x_B=(x_{B1},\ x_{B2},\ \cdots,\ x_{Bm})^T$，$c_B=(c_{B1},\ c_{B2},\ \cdots c_{Bm})^T$。变量$x_{Bk}(k=1,2,\cdots,m)$称为关于基底$B$的基本变量，$x_j$（$j\in I_D$）称为关于$B$的非基本变量，因而　$Ax=b$　可写成

$$[B,\ D]\begin{pmatrix} x_B \\ x_D \end{pmatrix} = Bx_B + Dx_D = b \tag{1.33}$$

由于B是非奇异，即B^{-1}存在，故可得

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Dx_D \tag{1.34}$$

特别取$x_D = 0$，则

$$x_B = B^{-1}b \tag{1.35}$$

称$x = [x_B^T,\ x_D^T]^T = [(B^{-1}b)^T,\ 0]^T$为关于基底$B$的基本解。如果$B^{-1}b \geqslant 0$，则称基本解$x = [(B^{-1}b)^T,\ 0]^T$为关于基底$B$的基本可行解。（显然$x \in K$）。如果$x$为（LP）的基本可行解，而$x_B$中存在等于0的分量，就称$x$为退化的基本可行解，否则就称$x$为非退化的基本可行解。

例1-6 已给（LP）

$$\begin{aligned} \min\ & s = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\ & x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ & -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ & 6x_1 + 2x_2 + x_5 = 21 \\ & x_j \geqslant 0,\ j = 1,2,3,4,5 \end{aligned} \tag{1.36}$$

如果取基底$B_1 = [a_1,\ a_2,\ a_3]$，即

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.37}$$

这时$I_{B^1} = \{1,2,3\}$，$I_{D^1} = \{4,5\}$。取$x_{D^1} = (x_4,\ x_5)^T = (0,0)^T$，则可得$x_{B^1} = [x_1,\ x_2,\ x_3]^T = \left[\frac{21}{8},\ \frac{21}{8},\ -\frac{1}{4}\right]^T$。由于$x_3 = -\frac{1}{4}$不满足$x_3 \geqslant 0$，因此相应的基本解$x^{(1)} = [x_{B^1}, x_{D^1}]^T = \left[\frac{21}{8},\ \frac{21}{8},\ -\frac{1}{4}, 0, 0\right]^T$不是基本可行解。

如果取基底

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.38}$$

这时$I_{B^2} = \{3,4,5\}$，$I_{D^2} = \{1,2\}$，取$x_{D^2} = (x_1,\ x_2)^T = (0,0)^T$，则可得$x_{B^2} = [x_3, x_4, x_5]^T = (5,0,21)^T$，因此，相应的基本解$x^{(2)} \geqslant 0$是一个基本可行解，然而是一个退化的基本可行解。

如果取基底

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.39}$$

这时$I_{B^3} = \{1,2,4\}$，$I_{D^3} = \{3,5\}$，取$x_{D^3} = 0$，则可得$x_{B^3} = [x_1, x_2, x_4]^T = \left[\frac{11}{4},\ \frac{9}{4}, \frac{1}{2}\right]^T$，因此相应的基本解$x^{(3)}$是一个非退化的基本可行解。

定理1.2 （线性规划的基本定理）

若（LP）存在可行解，则一定存在一个基本可行解；

若（LP）存在最优解，则一定存在一个基本最优解。

证明 略。

这个定理告诉我们，解（LP）问题可以只在基本可行解中去寻找最优解。若（LP）的所有基本解都是不可行的，则（LP）就是不可行的，若（LP）存在最优解，那么一定存在一个基本最优解。由于对具有n个变量m个方程约束的线性规划来说，最多有$\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$个基本解。因此，我们可以通过有限次（而不是无限次）迭代步骤求得最优解。这就是线性规划算法的理论基础。

定理1.3 （能行域K的顶点与基本可行解对应定理）

x为（LP）的基本可行解的充要条件为：x是（LP）的能行域——凸多面体$K=\{x|Ax=b,\ x\geqslant 0\}$的顶点。

证明 略。

由上述定理，我们很自然地得到一种解题方法：先求出能行域K的所有顶点，然后计算这些顶点的目标函数值，取最小的作为最优值，其相应的顶点坐标就是最优解。

例1-7 求解

$$
\begin{aligned}
\min s &= x_1+2x_2+3x_3\\
\text{s.t.}\quad & 2x_1-x_2 \quad\ \ = 1\\
& x_1 \qquad +x_3 = 1\\
& x_1,x_2,x_3\geqslant 0
\end{aligned}
$$

解 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ A的秩$=2$

1)取基底 $B=(a_1,a_2)=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，得基本解

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=B^{-1}b=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

2)取基底 $B=(a_2a_3)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$得基本解

$$\begin{pmatrix}x_2\\ x_3\end{pmatrix}=B^{-1}b=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$$

3)取基底$B=(a_1,a_3)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$得基本解

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_3\end{pmatrix}=B^{-1}b=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\ 1/2\end{pmatrix}$$

于是，有三个基本解

$$x^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\quad x^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 1\end{pmatrix},\quad x^{(3)}=\begin{pmatrix}1/2\\ 0\\ 1/2\end{pmatrix}.$$

其中$x^{(2)}$不是可行解。而$c^Tx^{(1)}=3$，$c^Tx^{(3)}=2$，所以，$x^{(3)}$为最优解。

§1.6 线性规划在水运部门中的若干应用

在水运生产中，应用线性规划大致可以解决以下几类问题。

一、合理规划货物流向

科学地规划货物流向，合理地制定运行图，是合理地配备运输能力，使运输生产能均衡协调进行的重要问题。解决这一问题的实质在于合理地分配货源，使货物从产地到港口的综合运输费用（包括装卸费，并考虑到港口的通过能力）达到最小。

设 a_i——第i产区需要运出的货物数量$i=1,2,\cdots,m$；

b_j——第j个港口的货物通过能力$j=1,2,\cdots,n$；

c_{ij}——从第i个产区到第j个港口的运输成本；

x_{ij}——从第i个产区到第j个港口所运货物的数量；

则货源的合理分配问题就是求一组$\{x_{ij}\}$，并且满足下列条件：

1.从第i个产区到各港口的货物数量应等于该产区需要运出的货物数量

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i \quad (i=1,\cdots,m)$$

2.从i个产区运到各港口的货物应小于或等于该港口的通过能力

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\leqslant b_j \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

3.变量x_{ij}的非负性限制

$$x_{ij}\geqslant 0$$

4.从各产区运出货物的总和等于全部承运货物的总和

$$\sum_{i=1}^{m} a_i=\sum_{j=1}^{n} b_j$$

其目标函数是使总的运输费用最小

$$\min \quad s=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

不难看出，上述合理规划货物流向问题，就是线性规划中常用的运输

二、确定船舶合理的运行图

船舶的合理运行图应与船舶的工作性能相适应，并保证某一项营运指标值最大或最小（如空驶里程最短）。如果已知货流图，据此便可了解各港口之间船舶吨位的短缺（即在港船舶的载货吨位小于该港口要运出货物的吨数）和富余。现要保证总的空驶距离最短。

设 x_{ij}——第i港到第j港的空驶船吨，其中，

$i=1,2,\cdots,m$，m为富余港的个数，

$j=1,2,\cdots,n$，n为短缺港的个数；

a_i——第i个富余港富余出来的船吨；

b_j——第j个短缺港短缺的船吨；

d_{ij}——第i个富余港到第j个短缺港的距离。