



学人教版教材  
用人教版教辅

初中同步系列

(双色版)

与人教版九年义务教育初级中学教科书同步

# 教材精析精练

代数 第二册



人民教育出版社

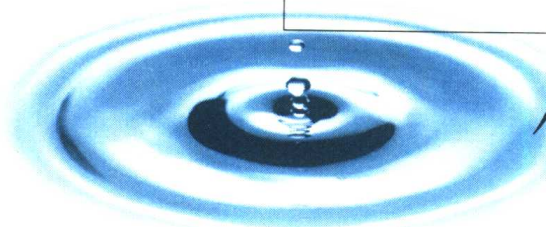
延边教育出版社

# 初中同步系列

与人教版九年义务教育初级中学教科书同步

·教师用书

# 教材精析精练



## 代数 第二册

NBAAD7. / 242

学校\_\_\_\_\_

班级\_\_\_\_\_

姓名\_\_\_\_\_

人民教育出版社 延边教育出版社

- 顾 问：顾振彪 蔡上鹤 龚亚夫
- 策 划：崔炳贤 申敬爱
- 丛书主编：周益新
- 本册主编：邓 岩
- 副 主 编：余红柱 方 艾
- 编 著：邓 岩 余红柱 方 艾 周世平  
吴用全 彭卫民 郑巨生 毕 进  
黄水生 库保弟 孟 超 罗建国
- 特邀编辑：程 莉
- 责任编辑：黄俊葵 张倩影
- 编辑统筹：宁德伟
- 封面设计：王 睢 于文燕
- 版式设计：李 超

与人教版九年义务教育初级中学教科书同步  
《教材精析精练》代数 第二册

---

出 版：人民教育出版社 延边教育出版社  
发 行：延边教育出版社  
地 址：北京市海淀区紫竹院路 88 号紫竹花园 D 座 702  
邮 编：100087  
网 址：<http://www.ybep.com>  
电 话：010-88552311 88552651  
传 真：010-88552651-11  
排 版：北京民译印刷厂  
印 刷：北京市联华印刷厂  
开 本：787×1092 16 开本  
印 张：9.5  
字 数：252 千字  
版 次：2002 年 5 月第 1 版  
印 次：2002 年 5 月第 1 次印刷  
书 号：ISBN 7-5437-4716-2/G·4245  
定 价：(双色版) 11.50 元

---



## 前 言

为了配合人民教育出版社九年义务教育初级中学教科书的推广使用,以适应新教材课程改革、研究性学习、中考模式改革和培养学生健全的思维能力,人民教育出版社、延边教育出版社组织约请了参与人教版新教材试验并对新教材及中考改革和思维能力培养有深入研究的湖北黄冈市、北京海淀区、山西省、江苏省、广东省等国内知名教师共同编写这套丛书。

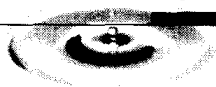
目前市场上教辅书多而杂,大多数是教材的翻版,且从内容上讲,与新教材课程改革、研究性学习、中考改革之间缺乏必要的联系。针对这种状况,我们策划了本套丛书,目的在于培养学生理性的、逻辑性的思维方式和研究、解决问题的方法。使学生在初中课程的学习中将各学科基础的、核心的、可再生的知识内容系统化,构建起学科知识体系,并掌握科学的方法和技巧,来解决学习中的思维障碍。同时,通过适当的练习,使学生了解、适应新大纲、新教材对知识范围和能力的要求。促使学生转换固有的、陈旧的思维方式,使他们拥有全面、健康、严谨、灵活的思维品质,让他们学会将社会热点、焦点问题和新科学发现、新技术的发明等问题同日常学习联系起来,使他们拥有综合的发散思维能力。

这套丛书主要有以下特点:

**权威性**——以国家教育部颁布的新教学大纲为纲,以人民教育出版社最新教材为依据,人民教育出版社各学科编辑室指导全书编写工作并审定丛书书稿。

**新颖性**——丛书根据国家教育部颁布的初中各年级课时标准编写,体现了课程改革新方案、中考改革模式和研究性学习新思路,侧重学法指导。减少陈题,不选偏题,精编活题,首创新题,启迪思维方法。将国际上流行的开发学生智力的“活性动态”版式与我国教辅版式相结合,既保护了学生视力、激活了思维,又符合中学生心理年龄层次。

**前瞻性**——丛书突出素质教育的要求,强调培养学生创新精神和实践能力,设计了学生自己构思答案的研究性学习案例和充分挖掘学生思维潜力的潜能测试,以培养和提高学生发散思维能力。



**实用性**——内容与教材紧密配套,既有教师的精辟分析和指导学生自主学习知识归纳和学法建议,又有剖析“活题”思维障碍的解题思维技巧。课后有精选精编针对性很强的知能达标训练和综合能力训练;每单元进行一次小结和能力测试;期中、期末进行阶段性测试,方便学生与人教版教材同步配套使用,可操作性极强。

**科学性**——丛书按学习规律和思维能力培养的规律循序渐进,突出能力升级的五步递进——知识归纳、学法建议、潜能开发、知能达标训练、综合能力训练,科学地对学生进行显能测试和潜能测试,培养和提高学生思维的敏捷性、科学性、深刻性和发散性。

这套丛书在策划、组稿、编写、审读整个过程中,得到了人民教育出版社和延边教育出版社的支持和指导,在此一并致谢。

思维是智力的核心,思维更是能力的体现。思维的表现特征是素质教育和创新教育重要的研究课题。在我国,对中学生进行科学思维技巧训练、显能测试和潜能测试是一种新的教学尝试。尽管书中许多内容是作者长期教学实践和潜心研究的心得和成果,但仍需要不断完善,不当之处,恳请专家、读者指正。

丛书主编:周益新

2002年4月



◆ 第8章 因式分解·····	1	
8.1 提公因式法·····		1
8.2 运用公式法·····		6
8.3 分组分解法·····		11
◆ 第9章 分式·····	19	
9.1 分式·····		19
9.2 分式的基本性质·····		23
9.3 分式的乘除法·····		27
9.4 分式的加减法·····		32
9.5 含有字母系数的一元一次方程·····		36
9.6 探究性活动: $a=bc$ 型数量关系·····		41
9.7 可化为一元一次方程的分式方程及其应用·····		46
◆ 上学期期中测试题·····	55	
◆ 上学期期末测试题·····	57	
◆ 第10章 数的开方·····	60	
10.1 平方根·····		60
10.2 用计算器求平方根·····		65
10.3 立方根·····		69
10.4 用计算器求立方根·····		74
10.5 实数·····		77



◆ 第11章 二次根式	90
11.1 二次根式	90
11.2 二次根式的乘法	94
11.3 二次根式的除法	98
11.4 最简二次根式	102
11.5 二次根式的加减法	107
11.6 二次根式的混合运算	112
11.7 二次根式 $\sqrt{a^2}$ 的化简	116
◆ 下学期期中测试题	128
◆ 下学期期末测试题	130
◆ 参考答案	133

## 第 8 章

## 因式分解

## 8.1 提公因式法

## 知识归纳

## 1. 因式分解的概念

(1) 把一个多项式化为几个整式的积的形式, 叫做把这个多项式因式分解, 也叫做把这个多项式分解因式.

(2) 理解因式分解定义时, 应注意以下几个要点:

① 因式分解专指多项式的恒等变形, 即等式左边必须是多项式. 例如:  $8a^3b = 4ab \cdot 2a^2$ 、 $\frac{a+1}{a} = \frac{1}{a}(a+1)$  等, 都不是因式分解.

② 因式分解的结果必须是几个整式的积的形式. 例如:  $2a+2b+c = 2(a+b)+c$ 、 $1 - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(x-1)$  等, 都不是因式分解.

③ 因式分解与整式乘法是互为逆变形. 例如:  $(3x-2)(3x+2) = 9x^2 - 4$ 、 $2(x+y-z) = 2x+2y-2z$ 、 $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$  都是整式乘法; 反过来,  $9x^2 - 4 = (3x-2)(3x+2)$ 、 $2x+2y-2z = 2(x+y-z)$ 、 $x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2$  都是因式分解.

## 2. 提公因式法

(1) 公因式: 一个多项式各项都含有的因式叫做这个多项式的公因式. 例如: 多项式  $2ab^2c+8a^3b$  中的第一项  $2ab^2c = 2ab \cdot bc$ , 第二项  $8a^3b = 2ab \cdot 4a^2$ , 这两项中都含有因式  $2ab$ , 那么  $2ab$  就是这个多项式的公因式; 再如: 多项式  $ma - mb + c$ , 虽然  $m$  是第一、第二两项的公因式, 但不是第三项的因式, 所以  $m$  不是多项式  $ma - mb + c$  的公因式.

(2) 确定公因式的方法: 确定一个多项式的公因式时, 要对数字系数和字母分别进行考虑.

① 对于系数, 如果是整数系数, 取各项系数的最大公约数作为公因式的系数.

② 对于字母, 取各项相同的字母, 其指数取其次数最低的.

(3) 提公因式法: 一般地, 如果多项式的各项都含有公因式, 可以把这个公因式提到括号外面, 将多项式写成因式乘积的形式, 这种分解因式的方法叫做提公因式法. 例如:  $4x^2y^2z - 12x^3y^4 = 4x^2y^2(z - 3xy^2)$ .

乘法的分配律是提公因式法的依据, 提公因式法实质是分配律的“逆用”, 即:

$$m + (a+b+c) \xrightarrow[\text{提公因式法}]{\text{乘法分配律}} ma + mb + mc$$

## 3. 提公因式的方法步骤

(1) 提公因式法分解因式的一般步骤是: 第一步找出公因式; 第二步提公因式并确定另一个因式. 提





公因式时,可用原多项式除以公因式,所得的商即是提出公因式后剩下的另一个因式.例如:因式分解  $8a^3b^2 - 12ab^3c$ ,提公因式  $4ab^2$  时,用  $4ab^2$  分别去除原多项式的每一项,得  $8a^3b^2 \div 4ab^2 - 12ab^3c \div 4ab^2 = 2a^2 - 3bc$ ,即  $8a^3b^2 - 12ab^3c = 4ab^2(2a^2 - 3bc)$ .

(2)运用提公因式法分解因式时有几点要注意:

①“1”作为某项的系数通常省略不写,但单独成一项时,它在因式分解时不能漏掉.如因式  $3x - 6y + 1$  不能写成  $3x - 6y$ .

②分解必须彻底,即在指定的范围内分解到不能再分解为止.如多项式  $-4m^3 + 16m^2 - 26m$  因式分解的结果是  $-2m(2m^2 - 8m + 13)$ ,而不是一  $m(4m^2 - 16m + 26)$ ,不要忘记提取各项系数的最大公约数.

③多项式的第一项系数是负数时,一般要提出“-”号,使括号内的第一项是正的,在提出“-”号时,多项式的各项都要变号.



## 学法建议

1. 本节主要学习了因式分解的定义和因式分解的第一种方法——提公因式法.重点是提公因式法,理解提公因式法的依据,会用提公因式法分解因式.难点是对因式分解定义的理解.

2. 多项式的因式分解与小学学过的数的因数分解类似,都是化成积的形式.因式分解与整式乘法的变化过程是互逆的.因式分解的方法很多,也很灵活,其中提公因式法是最基本、最简单的方法,同学们必须熟练掌握,为后继学习打好基础.

3. 提公因式法的关键是找出多项式的公因式.提公因式时,容易出现“漏项”的错误,检查是否漏项的方法,最好是用单项式乘以多项式的法则乘回去,进行验证.也可以看看提公因式后,括号内的项数是否与原多项式的项数一致,如果项数不一致,就说明漏项了.

(1)因式分解是多项式的恒等变形,但并非所有的多项式都能因式分解.

(2)提公因式后,括号内的项数应与原多项式的项数相同.

(3)本节也有公因式为二项式乘方的类型,这类多项式的因式分解,常涉及到  $(x-y)^2$  与  $(y-x)^2$ ,  $(x-y)^3$  与  $(y-x)^3$  等关系,要记住:

当  $n$  为偶数时,  $(x-y)^n = (y-x)^n$ ; 当  $n$  为奇数时,  $(x-y)^n = -(y-x)^n$ .



## 潜能开发

[例1]甲、乙、丙、丁四位同学在做因式分解  $x^4 + x^3 + x^2$  时,分别是这样做的:

甲:  $x^4 + x^3 + x^2 = x^2(x^2 + x)$ ;

乙:  $x^4 + x^3 + x^2 = x(x^3 + x^2 + x)$ ;

丙:  $x^4 + x^3 + x^2 = x^4 \left( 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)$ ;

丁:  $x^4 + x^3 + x^2 = x^3(x+1) + x^2$ .

其中做法正确的个数有

- A. 0个      B. 1个      C. 2个      D. 3个

## 思维诊断

提公因式法容易出现下列思维障碍:①漏项,如甲,  $x^2$  这一项提取公因式后应是1,而不是0;②没有提尽,如乙,提取公因式后还可以再分解;③因式不是整式,如丙中  $1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$  显然不是整式;④结果不是积的形式,

**思路分析**

解决本题的关键是找准公因式,由于多项式的各项中都有字母因式  $x$ ,且其次数中最低的是 2 次,故其公因式是  $x^2$ .

$$[\text{解}] x^4 + x^3 + x^2 = x^2(x^2 + x + 1).$$

[答案] A

[例 2] 分解因式  $4q(1-p)^3 + 2(p-1)^2$ . (2001 年四川省中考试题)

**思路分析**

由于  $(p-1)^2 = (1-p)^2$ ,故原多项式等于  $4q(1-p)^3 + 2(1-p)^2$ . 把  $(1-p)$  看作一个整体,因为多项式的每一项都含有  $(1-p)$ ,且最低次幂是  $(1-p)^2$ ,系数的最大公约数是 2,从而多项式的公因式是  $2(1-p)^2$ .

$$[\text{解}] 4q(1-p)^3 + 2(p-1)^2 = 4q(1-p)^3 + 2(1-p)^2 \\ = 2(1-p)^2 [2q(1-p) + 1] = 2(1-p)^2 (2q - 2pq + 1).$$

[例 3] 分解因式  $a^2x^{n+2} - abx^{n+1} + acx^n - adx^{n-1}$ .

**思路分析**

在  $x^{n+2}, x^{n+1}, x^n$  和  $x^{n-1}$  中,  $x^{n+2} = x^{n-1} \cdot x^3, x^{n+1} = x^{n-1} \cdot x^2, x^n = x^{n-1} \cdot x$ ,  $x$  的最低次幂是  $x^{n-1}$ ,这个多项式的公因式是  $ax^{n-1}$ .

$$[\text{解}] a^2x^{n+2} - abx^{n+1} + acx^n - adx^{n-1} \\ = ax^{n-1} \cdot ax^3 - ax^{n-1} \cdot bx^2 + ax^{n-1} \cdot cx - ax^{n-1} \cdot d \\ = ax^{n-1}(ax^3 - bx^2 + cx - d).$$

[例 4] 计算:

$$(1) 7.6 \times 200.2 + 4.3 \times 200.2 - 1.9 \times 200.2;$$

$$(2) \text{已知 } a+b=13, ab=40, \text{求 } a^2b+ab^2 \text{ 的值.}$$

**思路分析**

(1) 题各项中都有 200.2 这个因数,  $\therefore$  可先进行因式分解,然后再计算; (2) 题应先对代数式进行因式分解,再代入计算.

$$[\text{解}] (1) 7.6 \times 200.2 + 4.3 \times 200.2 - 1.9 \times 200.2 \\ = 200.2 \times (7.6 + 4.3 - 1.9) \\ = 200.2 \times 10 = 2002.$$

$$(2) a^2b + ab^2 = ab(a+b)$$

当  $a+b=13, ab=40$  时, 原式  $= 40 \times 13 = 520$ .

如下. 排除障碍的方法是: ① 正确理解因式分解的概念; ② 会找公因式并按步骤分解因式.

**思维诊断**

提出公因式后所得的另一个因式, 如果含有中括号, 要经过整理将中括号变为小括号. 要防止出现如下的两个错误: ① 提取公因式  $2(1-p)^2$  后, 错把  $(p-1)^2$  化为  $-(1-p)^2$ ; ② 提公因式时只提取  $(1-p)^2$ , 而漏提系数 2.

**思维诊断**

由于本题中字母  $x$  的指数都是含  $n$  的式子, 很多学生不善于观察题目特征, 准确提取公因式, 容易出现提取公因式  $x^n$  或  $x^{n+2}$  等错误. 要记住: 相同字母取其次数最低的.

**思维诊断**

(1) 题要防止直接计算, 否则计算量较大, 纯数字计算题, 同样有可能利用因式分解来计算; (2) 题若先求出  $a, b$  的值再代入到代数式中, 这样计算麻烦, 这里把  $a+b$  和  $ab$  当作整体, 将原式变形为只含有  $a+b$  和  $ab$  的形式, 再整体代值计算.

[例 5] 计算  $2002 \times 20032003 - 2003 \times 20022002$ .

**思路分析**

仔细观察其中各数的特点, 这些数都与 2002 和 2003 两个数有关.

可设 2002 为  $x$ , 则  $2003 = x + 1$ ,

$$\begin{aligned} \therefore 20022002 &= 20020000 + 2002 = 10000 \times 2002 + 2002 \\ &= 10000x + x = x(10000 + 1) = 10001x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20032003 &= 20030000 + 2003 = 10000(x + 1) + (x + 1) \\ &= (x + 1)(10000 + 1) = 10001(x + 1). \end{aligned}$$

[解] 设  $2002 = x$ , 原式  $= x \cdot 10001(x + 1) - (x + 1) \cdot 10001x = 0$ .

**思维诊断**

本题如果直接计算, 不仅计算量大, 而且容易出错. 排除障碍的方法是观察题目特征, 把数字 2002 看成是字母  $x$ , 从而利用提公因式法分解因式很好地解决了本题, 这里也可以设  $2003 = x$ , 请同学们仿照例题的解法自己计算.



**知能达标训练**

- 已知乘法计算  $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = x^3 - 8$ , 则分解因式  $x^3 - 8 =$  \_\_\_\_\_.
- $\frac{8}{27}ab^2 + \frac{4}{9}b^2c =$  \_\_\_\_\_  $\cdot (2a + 3c)$ .
- $-7ab - 14abc + 49abd = -7ab \cdot$  \_\_\_\_\_
- 利用提公因式法计算  $9 \times \frac{5}{7} - 10 \times \frac{2}{7} + 2 \times \frac{19}{7} =$  \_\_\_\_\_.
- 把  $-a^2b - 4ab + 8ab^2$  分解因式的结果为 \_\_\_\_\_.
- $ab^2(x - y)^m + a^2b(x - y)^{m+1} = ab(x - y)^m \cdot$  \_\_\_\_\_.
- 分解因式  $2a(b + c) - 3c(b + c) =$  \_\_\_\_\_.
- 对多项式  $-ab(a - b)^2 + a(b - a)^2 - ac(a - b)^2$  分解因式时, 所提的公因式为 \_\_\_\_\_.
- 利用因式分解计算  $1998 + 1998^2 - 1999^2 =$  \_\_\_\_\_.
- 已知  $a - 2 = b + c$ , 则代数式  $a(a - b - c) - b(a - b - c) - c(a - b - c)$  的值等于 \_\_\_\_\_.
- 若  $-2a^{n-1} - 4a^{n+1}$  的公因式是  $M$ , 则  $M$  等于 ( )
 

A.  $2a^{n-1}$       B.  $-2a^n$       C.  $-2a^{n-1}$       D.  $-2a^{n+1}$
- 下列变形是因式分解的是 ( )
 

A.  $xy(x + y) = x^2y + xy^2$   
 B.  $x^2 + 2x + 1 = x(x + 2) + 1$   
 C.  $(a - b)(m - n) = (b - a)(n - m)$   
 D.  $ab - a - b + 1 = (a - 1)(b - 1)$
- 下面从左到右因式分解正确的是 ( )
 

A.  $y^3 + y^2 + y = y(y^2 + y)$   
 B.  $-5a^3 + 15a = -5a(a^2 + 3)$   
 C.  $4x^3 - 6x^2 = 2x(2x^2 - 3x)$   
 D.  $(a - b)^2 - (b - a) = (b - a)(b - a - 1)$
- $-9x^2y + 3xy^2 - 6xyz$  各项的公因式是 ( )
 

A.  $3y$       B.  $3xz$       C.  $-3xy$       D.  $-3x$

15. 将  $-3x^{2n}-6x^n$  分解因式, 结果是 ( )

- A.  $3(-x^{2n}-2x^n)$       B.  $-3(x^{2n}+2x^n)$   
 C.  $-3x^n(x^2+2)$       D.  $-3x^n(x^n+2)$

16. 如果多项式  $x^2-mx-35$  分解因式为  $(x-5)(x+7)$ , 则  $m$  的值是 ( )

- A. 2      B. -2      C. 12      D. -12

17. 多项式  $(x+y-z)(x-y+z)-(y+z-x)(z-x-y)$  的公因式是 ( )

- A.  $x+y-z$       B.  $x-y+z$       C.  $y+z-x$       D. 不存在

18. 计算  $(-\frac{1}{2})^{2002} + (-\frac{1}{2})^{2003}$  的结果为 ( )

- A.  $(-\frac{1}{2})^{2003}$       B.  $-(-\frac{1}{2})^{2003}$       C.  $\frac{1}{2}$       D.  $-\frac{1}{2}$

19. 分解因式:

(1)  $8x^3-8x^2-4x$ ;      (2)  $6x^3y(x-y)^3-4xy^3(y-x)^2$ ;

(3)  $(a-3)^2-(2a-6)$ ;      (4)  $-m^2n(x-y)^n+mn^2(x-y)^{n+1}$ .

20. 计算:

(1)  $9^3-9^2-8 \times 9^2$ ;      (2)  $(-2)^{1999} + (-2)^{2000}$ .

### 综合能力训练



1. 分解因式:

(1)  $x(a-b)(b-c)(c-a)-y(b-a)(c-b)(a-c)$ ;      (2)  $15x(a-b)^2-3y(b-a)$ ;

(3)  $(y+1)(y^2-1)-(y+1)^3$ ;      (4)  $2(1-x^2)+6a(x-1)^3$ .

2. 已知  $x^3+x^2+x+1=0$ , 求  $1+x+x^2+x^3+\dots+x^{2003}$  的值. ( $\Delta$ )

3. 已知  $x$  的多项式  $2x^3+x^2-12x+k$  因式分解后有一个因式为  $(2x+1)$ .

(1) 求  $k$  的值;

(2) 将此多项式因式分解. ( $\Delta$ )

4. 任意一个三位数的百位数字与个位数字交换位置, 所得到的数与原三位数之差能被 99 整除吗? 为什么? ( $\Delta$ )

## 8.2 运用公式法

### 知识归纳

#### 1. 运用公式法

把乘法公式反过来运用, 可以把符合公式特点的多项式分解因式, 这种分解因式的方法叫做运用公式法. 常用的公式是平方差公式和完全平方公式.

#### 2. 平方差公式

(1) 把乘法公式中的平方差公式  $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$  反过来, 就得到因式分解的平方差公式  $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ . 也就是说, 两个数的平方差, 等于这两个数的和与这两个数的差的积.

(2) 平方差公式的特点:

① 公式的左边是二项式, 两项都能写成平方的形式, 且符号相反; 右边是两个数的和与这两个数的差的积.

② 公式中所说的“两个数”是  $a, b$ , 而不是  $a^2, b^2$ , 其中  $a, b$  既可以是单项式, 也可以是多项式.

(3) 凡是符合平方差公式的二项式, 都可以运用平方差公式分解因式. 如  $x^2-y^2, a^2-1, (x+1)^2-(y+1)^2, 4x^2-9, -16a^2+(b+c)^2$  等, 都可以运用平方差公式分解因式.

#### 3. 完全平方公式

(1) 把乘法公式中的完全平方公式  $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$  反过来, 就得到因式分解的完全平方公式  $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2, a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ . 就是说, 两个数的平方和, 加上这两个数的积的 2 倍, 等于这两个数的和的平方; 两个数的平方和, 减去这两个数的积的 2 倍, 等于这两个数的差的平方.

(2) 完全平方公式特点:

① 公式的左边是三项式, 其中首末两项分别是两个数(或两个式子)的平方, 且这两项的符号相同, 中间一项是这两个数(或两个式子)的积的 2 倍, 符号正负均可; 右边是这两个数(或两个式子)的和(或者差)的平方. 当中间的乘积项与首末两项的符号相同时, 是和的平方; 当中间的乘积项与首末两项的符号相反时, 是差的平方.

② 公式中的  $a, b$ , 即“这两个数”既可以用单项式代替, 又可以用多项式代替.

(3) 凡是符合完全平方公式的三项式, 都可以运用完全平方公式分解因式, 如  $x^2+2xy+y^2, x^2-2x+1, (m+n)^2-4(m+n)+4$  等, 都可以运用完全平方公式分解因式.

(4) 应用完全平方公式分解的多项式必须是三项式, 其中首末两项的和是两个数的平方和的形式, 而中间的一项是这两个数的积的 2 倍. 运用公式时, 必须弄清哪一项相当于公式的第一项, 哪一项相当于公式的第三项, 哪一项相当于公式的第二项(乘积项), 这对于准确掌握和运用完全平方公式非常必要.



## 学法建议

1. 要明确运用公式法分解因式的公式与乘法公式是互逆的,把乘法公式左、右两边交换一下位置,就可以得到因式分解的公式.

2. 运用公式法分解多项式的关键在于把给出的多项式转化为符合公式的形式,并确定对应于公式中的字母“ $a$ ”、“ $b$ ”的数(或单项式,或多项式).只有当给出的多项式完全符合公式的形式时,才能运用公式加以分解,并不是所有多项式都可以运用公式加以分解.例如: $4a^2x^6 - 9b^4y^4$ 可以写成 $(2ax^3)^2 - (3b^2y^2)^2$ ,所以可用平方差公式分解;而多项式 $4x^2 - 6xy^2 + 9y^4$ 只能写成 $(2x)^2 - (2x) \cdot (3y^2) + (3y^2)^2$ ,不符合完全平方公式的形式,所以不能用公式分解.因此,在分解因式时,必须根据多项式的特征来选择运用公式或者选择其他方法来分解.

3. 三个因式分解公式在项数和次数方面都有各自的特点.例如:平方差公式适用于两项的多项式的分解,而完全平方公式适用于三项的多项式.掌握了这些特点,在解题时就可以有目的地分析多项式的项数和次数,以确定可运用的公式.

4. 当多项式不能直接运用公式分解时,有时可以把这个多项式的一部分括在括号内,看成一个整体,对多项式重新组合,使它符合公式的形式.例如:对多项式 $(x+5)^2 + 2xy + 10y + y^2$ ,注意到 $2xy + 10y$ 可写成 $2(x+5)y$ ,所以多项式就可写成 $(x+5)^2 + 2(x+5)y + y^2$ 的形式,可以用完全平方公式分解.

5. 为了提高熟练运用公式分解因式的技能,同学们应该熟记1~20自然数的平方.另外,还应熟练掌握幂的运算性质公式的逆向运用.

6. 要熟悉运用公式法分解因式的方法与思路.

(1) 运用公式法分解因式时,有公因式要先提公因式,然后再套用公式分解.

(2) 运用公式法分解因式的思路是:当多项式只有两项时,若各项的指数都是2的倍数且二次项系数异号时,可考虑用平方差公式;当多项式有三项时,可以考虑用完全平方公式加以分解.



## 潜能开发

[例1]  $m^2(m-1) - 4(1-m)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ . (河南省中考试题)

### 思路分析

多项式有公因式,应先提公因式,再看能否使用公式法继续分解.

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad m^2(m-1) - 4(1-m)^2 &= m^2(m-1) - 4(m-1)^2 \\ &= (m-1)[m^2 - 4(m-1)] = (m-1)(m^2 - 4m + 4) \\ &= (m-1)(m-2)^2. \end{aligned}$$

[答案]  $(m-1)(m-2)^2$ .

[例2] 分解因式: $7x^{n+1} - 28x^{n-1}$  ( $n$ 为不小于1的整数).

### 思维诊断

本题要防止没有先提公因式 $(m-1)$ ,而直接展开成一个多项式,导致不能运用公式法分解.当多项式有公因式可提时,一定要先提取公因式,然后再考虑运用公式法分解.

### 思维诊断

提出公因式后,一定要看看括号内的式子还能否继

**思路分析**

因为多项式中每一项都含有字母  $x$ , 且  $x$  的最低次数是  $n-1$ , 所以此多项式有公因式  $7x^{n-1}$ , 应先提公因式, 再用平方差公式分解.

$$\begin{aligned} [\text{解}] & 7x^{n+1} - 28x^{n-1} \\ &= 7x^{n-1} \cdot x^2 - 7x^{n-1} \cdot 4 \\ &= 7x^{n-1}(x^2 - 2^2) \\ &= 7x^{n-1}(x+2)(x-2). \end{aligned}$$

[例 3] 若  $x^2 + 2(a+4)x + 25$  是完全平方式, 求  $a$  的值.

**思路分析**

根据完全平方公式的特点, 看公式中的  $a, b$  分别是什么, 显然两个平方项是  $x^2, 25$ , 中间乘积项应为  $\pm 10x$ .

$$\begin{aligned} [\text{解}] & x^2 + 2(a+4)x + 25 = x^2 + 2(a+4)x + 5^2. \\ & \because \text{此多项式是完全平方式,} \\ & \therefore 2(a+4)x = \pm 2 \cdot x \cdot 5, 2(a+4) = \pm 10, \\ & \text{当 } 2(a+4) = 10 \text{ 时, } a = 1; \\ & \text{当 } 2(a+4) = -10 \text{ 时, } a = -9. \end{aligned}$$

[答案]  $a = 1$  或  $a = -9$ .

[例 4] 已知  $x - y = 1, xy = 2$ , 求  $x^3y - 2x^2y^2 + xy^3$  的值.

**思路分析**

先对所给的代数式进行因式分解, 使之出现  $xy$  与  $x - y$  的式子, 再整体代入求值.

$$\begin{aligned} [\text{解}] & \because x - y = 1, xy = 2, \\ & \therefore x^3y - 2x^2y^2 + xy^3 = xy(x^2 - 2xy + y^2) \\ & = xy(x - y)^2 = 2 \times 1^2 = 2. \end{aligned}$$

[例 5] 已知  $n$  是整数,  $(2n+1)^2 - 1$  能被 8 整除吗? 试证明你的结论.

**思路分析**

要判断  $(2n+1)^2 - 1$  能否被 8 整除, 只要将此式分解因式, 看各因式的积能否被 8 整除即可.

$$\begin{aligned} [\text{答}] & (2n+1)^2 - 1 \text{ 能被 } 8 \text{ 整除.} \\ [\text{证明}] & \because (2n+1)^2 - 1 = [(2n+1)+1][(2n+1)-1] \\ & = 2(n+1) \cdot 2n = 4n(n+1). \end{aligned}$$

续分解, 因式分解要彻底. 这里要防止出现如下错误: 不知道先提出公因式  $7x^{n-1}$ , 只提取 7 或  $x^{n-1}$ , 从而出现结果为  $7(x^{n+1} - 4x^{n-1})$  或  $x^{n-1}(7x^2 - 28)$  的错误, 使分解不彻底.

**思维诊断**

本题是利用完全平方公式的特点反过来确定多项式中的系数. 要防止出现只考虑到公式  $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ , 从而使得  $2(a+4)x = 2 \cdot x \cdot 5, a = 1$ . 若一个多项式为完全平方式, 如果是一次项系数未确定时, 一次项系数有两种可能, 它们一正一负互为相反数.

**思维诊断**

这类问题一般不适合解方程组求得  $x, y$  的值再代入计算. 因式分解是整式恒等变形的重要手段, 整体代值计算是化简计算题最常用的方法.

**思维诊断**

本题是一道开放型试题, 应先对结论作出判断, 如果结论是肯定的, 再对结论加以证明, 如果结论是否定的, 要举一反三例加以说明. 本题利用因式分解一般能证明它被 4 整除, 而容易忽视两个连续整数中必有一个是偶数这一事实.

因为  $n$  是整数, 所以  $n$  与  $n+1$  是两个连续的整数, 而两个连续的整数之间必有一个是偶数, 即  $n(n+1)$  能被 2 整除, 所以  $4n \cdot (n+1)$  能被 8 整除. 故  $(2n+1)^2 - 1$  能被 8 整除.



### 知能达标训练

1. 分解因式  $4x^2 - 9 =$  \_\_\_\_\_.
2. 分解因式  $a^3 - 4a =$  \_\_\_\_\_.
3. 分解因式  $-b^2 + (a-b+c)^2 =$  \_\_\_\_\_.
4. 利用因式分解计算  $\frac{1000^2}{252^2 - 248^2} =$  \_\_\_\_\_.
5. 在一个边长为  $12.75\text{cm}$  的正方形内挖去一个边长为  $7.25\text{cm}$  的正方形, 则剩下部分的面积为 \_\_\_\_\_.
6. 分解因式  $4 - 12(x-y) + 9(x-y)^2 =$  \_\_\_\_\_.
7. 若  $x^2 + 2(m-3)x + 16$  是完全平方式, 则  $m =$  \_\_\_\_\_.
8. 已知  $x=3.2, y=6.8$ , 则  $x^2 + 2xy + y^2 =$  \_\_\_\_\_.
9. 若  $\frac{1}{4}x^2 + bx + 36$  是一个完全平方式, 则  $b =$  \_\_\_\_\_.
10. 若  $a^2 - b^2 + 2 = a^2 + b^2 = 5$ , 则  $a^4 - b^4 =$  \_\_\_\_\_.
11. 在多项式  $x^2 + y^2, -x^2 + y^2, -x^2 - y^2, x^2 + (-y^2), 8x^2 - y^2, (y-x)^3 + (x-y), 2x^2 - \frac{1}{2}y^2$  中, 能在有理数范围内用平方差公式分解的有 \_\_\_\_\_ ( )  
 A. 3个                      B. 4个                      C. 5个                      D. 6个
12. 下列变形中, 正确的因式分解是 \_\_\_\_\_ ( )  
 A.  $0.09m^2 - \frac{16}{49}n^2 = (0.03m + \frac{4}{7})(0.03m - \frac{4}{7})$   
 B.  $x^2 - 10 = x^2 - 9 - 1 = (x+3)(x-3) - 1$   
 C.  $x^4 - x^2 = (x^2 + x)(x^2 - x)$   
 D.  $(x+a)^2 - (x-a)^2 = 4ax$
13. 若  $(2x)^n - 81 = (4x^2 + 9)(2x+3)(2x-3)$ , 那么  $n$  的值是 \_\_\_\_\_ ( )  
 A. 2                      B. 4                      C. 6                      D. 8
14. 对于任何整数  $m$ , 多项式  $(4m+5)^2 - 9$  都能 \_\_\_\_\_ ( )  
 A. 被 8 整除                      B. 被  $m$  整除  
 C. 被  $(m-1)$  整除                      D. 被  $(2m-1)$  整除
15. 若  $9x^2 - 12xy + m$  是一个完全平方式, 那么  $m$  的值是 \_\_\_\_\_ ( )  
 A.  $2y^2$                       B.  $4y^2$                       C.  $\pm 4y^2$                       D.  $\pm 16y^2$
16. 已知  $x$  为任意有理数, 则多项式  $x - 1 - \frac{1}{4}x^2$  的值为 \_\_\_\_\_ ( )  
 A. 一定为负数                      B. 不可能为正数  
 C. 一定为正数                      D. 可能为正数或负数或零
17. 多项式  $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$  因式分解的结果为 \_\_\_\_\_ ( )  
 A.  $a^2(a^2 - 2b^2) + b^4$                       B.  $(a^2 - b^2)^2$





- C.  $(a-b)^4$  D.  $(a+b)^2(a-b)^2$
18. 把  $(a+b)^2 - 4(a^2 - b^2) + 4(a-b)^2$  分解因式为 ( )  
 A.  $(3a-b)^2$  B.  $(3b+a)^2$  C.  $(3b-a)^2$  D.  $(3a+b)^2$
19. 分解因式:  
 (1)  $8a^2 - 2b^2$ ; (2)  $-1 + 0.01a^2$ ;  
 (3)  $9(x+y+z)^2 - (x-y-z)^2$ ; (4)  $a^4 x^{n+3} - x^{n-1}$ .
20. 利用因式分解计算  $1999 + 1999^2 - 2000^2$ .
21. 已知  $x = \frac{22}{75}$ ,  $y = \frac{25}{44}$ , 求  $(x+y)^2 - (x-y)^2$  的值.
22. 已知  $x-y=2$ ,  $x^2-y^2=6$ , 求  $x$  与  $y$  的值.

### 综合能力训练



1. 已知  $x, y$  为任意有理数, 设  $M = x^2 + y^2$ ,  $N = 2xy$ , 则  $M$  与  $N$  的大小关系为 ( )  
 A.  $M > N$  B.  $M \geq N$  C.  $M \leq N$  D. 不能确定
2. 分解因式:  
 (1)  $(ab+b)^2 - (a+b)^2$ ; (2)  $(a^2 - x^2)^2 - 4ax(x-a)^2$ .
3. 利用因式分解计算  $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \dots + 99^2 - 100^2 + 101^2$ . (△)
4. 已知  $x+y = \frac{1}{2}$ ,  $xy = \frac{3}{8}$ , 求下列各式的值: (1)  $(x-y)^2$ ; (2)  $x^2y + xy^2$ . (△)
5. 已知  $m$  为正整数, 那么  $3^{m+2} - 3^m$  一定是 24 的倍数吗? 试证明你的结论. (△)
6. 一个正整数, 若加上 100 是一个完全平方数; 若加上 168, 则是另一个完全平方数, 求这个正整数. (△)