《数理天地》丛书

■ 主编 周国镇

# 希望数学

本册主编 贠志一

初三

气象出版社

《数理天地》丛书　主编　周国镇

# 希望数学

## 初　三

本册主编　贠志一

编　　委　杨　燕　董广庆　欧秀茂

陈志成　唐国强　陈　琳

李培林　洪明聪　汪永贤

胡根寿　张　森　姚志敏

曹存富　徐原植　梁晓红

蔡建绛

气象出版社

# 内容简介

本书是“《数理天地》丛书”系列中《希望数学》的初三分册。包含了初中三年级数学中最主要的知识、思想和方法。本书由著名数学教师、数学教研员和大学数学教师合作编写，简明、易懂。适用于准备参加中考的初中三年级同学，也可作为数学教师开展数学课外活动的教学用书。

**图书在版编目(CIP)数据**

希望数学. 初三/周国镇主编. —北京:气象出版社,
2002.2
(数理丛书)
ISBN 7-5029-3313-1

Ⅰ.希… Ⅱ.周… Ⅲ.数学课-初中-教学参考
资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 008155 号

责任编辑:王小甫 终审:周诗健
封面设计:梁培林 责任技编:刘祥玉 责任校对:石晓兰
气象出版社出版
(北京市海淀区中关村南大街 46 号 邮编:100081)
新华书店总店北京发行所发行 全国各地新华书店经销
* * *
北京市白河印刷厂印刷
开本:787×1092 1/32 印张:11 字数:246 千字
2002 年 2 月第一版 2002 年 3 月第二次印刷
印数:5001～10000
ISBN 7-5029-3313-1/G·0962
**定价:12.00 元**

# 序　言

《希望数学》是《数理天地》杂志主编的"《数理天地》丛书"系列的一个部分,之所以在数学之前加希望二字,是因为这是能给希望学好数学的同学们带来希望的数学书。

这是一套系统地、精练地讲解初、高中数学主要内容的简明教程。从初一到高三,共六个分册。其中,初、高中一、二年级四个分册中的每个分册都分为基础内容和选学内容两部分。

基础内容:不超出现行的数学教学大纲,保证使同学们用尽量少的时间,比较轻松地在比课本高的水平上掌握本年级数学最主要的内容。

选学内容:供学有余力、爱好数学或准备参加"希望杯"数学邀请赛以及其他数学竞赛的学生使用。

初、高中三年级这两个分册专为初、高三同学升学备考之用。

每个分册都由若干个专题组成,每个专题独立成篇,便于同学和老师根据需要选用,不必考虑先后次序。

每个专题包括:基本知识、例题、练习三个部分。

基本知识:以极简练、明白的文字介绍本专题的知识、方法。帮助同学们理清脉络,掌握重点。

例题:少而精,有代表性,有新意。例题的讲解渗透了基本的数学思想,讲思路,讲方法,表达规范、简练。特别有助于提

高同学们的分析能力。

练习：编入了有训练价值的典型题目，不求多、不求全，只求少而精。对不太难的题目给出了最后结果，使读者有一个思维空间；对较难的题目，给出了关键性的提示。

本书由《数理天地》杂志邀请北京、上海、江苏、浙江、湖北、湖南、广东、四川、山西、福建、吉林、云南、宁夏等地著名的数学教研员、优秀的数学教师以及部分大学数学教师合作编写，经《数理天地》杂志专家审定。

当今，中学数学参考书花样繁多，说有数百种也不为过，常令学子们眼花缭乱，无从选择。本书则力求使读者读了就能懂，懂了就能用，以实在和简明易懂的讲述见长。相信读者使用之后自有体会。

周国镇

《数理天地》杂志主编

2002 年 1 月 18 日

# 目　录

# 单元1　非负数

## 一、基本知识

1. 非负数的表现形式

正数和零统称为非负数. 初中阶段非负数的表现形式主要有以下三类:

(1) 任何实数的绝对值都是非负数: $|a| \geqslant 0$;

(2) 任何实数的偶次幂都是非负数: $a^{2n} \geqslant 0$,

($n$ 为整数, 且当 $a = 0$ 时, $n > 0$);

(3) 任何非负数的算术平方根都是非负数: $\sqrt{a} \geqslant 0$ ($a \geqslant 0$).

2. 非负数的常用性质

(1) 非负数的最小值是零;

(2) 几个非负数的和仍为非负数;

(3) 几个非负数的积仍为非负数;

(4) 若几个非负数的和等于零, 则其中的每个非负数都等于零.

非负数的性质往往隐含在题设(条件)中较多, 如果在解题时, 能善于分析并且揭示出题目中的非负数, 正确地应用非负数的相关概念及其性质去巧妙地进行相应关系的转化, 不仅可以增强解题的速度和效果, 而且可以提高解题的技能. 同时也有助于突破思维定势, 培养思维的灵活性和全面性.

## 二、例　题

**例 1**　化简下列各式

(1) $\left|2-\sqrt{(a+2)^2}\right|\quad(a<-4)$

(2) $\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}\quad(0°<\alpha<45°)$

**解**:(1) 因为　$a<-4$,所以　$a+4<0,a+2<0.$

由算术平方根,绝对值的非负性得

$\sqrt{(a+2)^2}=-(a+2)$

所以　原式$=|2+(a+2)|=|a+4|$

$$=-(a+4)=-a-4.$$

(2) $\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}$

$$=\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}=\cos\alpha-\sin\alpha$$

**说明**:(2) 因为　$0°<\alpha<45°$,所以　$\sin\alpha<\cos\alpha.$

**例 2**　已知 $|x+2y|+(2x-z)^2+\sqrt{z+5}=0$ 求 $x,y,z$ 的值.

**解**:因为　$|x+2y|\geqslant0,(2x-z)^2\geqslant0,\sqrt{z+5}\geqslant0$

且 $|x+2y|+(2x-z)^2+\sqrt{z+5}=0$

所以　$|x+2y|=0,(2x-z)^2=0,\sqrt{z+5}=0$

即 $x+2y=0,2x-z=0,z+5=0$

解得　$x=-\dfrac{5}{2},y=\dfrac{5}{4},z=-5.$

**例 3**　若$\left(x^2-3+\dfrac{1}{x^2}\right)^2+\sqrt{a-x-\dfrac{1}{x}}=0$,

求$\sqrt{(a-2)^2}$的值.

**解**:由已知得$\begin{cases} x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 3 & ① \\ a = x + \dfrac{1}{x} & ② \end{cases}$

① 式配方得$(x + \dfrac{1}{x})^2 = 5$

所以 $x + \dfrac{1}{x} = \pm\sqrt{5}$,即 $a = \pm\sqrt{5}$

当 $a = \sqrt{5}$ 时,$\sqrt{(a-2)^2} = \sqrt{5} - 2$.

当 $a = -\sqrt{5}$ 时,$\sqrt{(a-2)^2} = \sqrt{5} + 2$.

**例 4** 不解方程试说明下列方程解的情况:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-4} = 2$$

**解**:由算术平方根的非负性可得

$$\begin{cases} x + 1 \geqslant 0 \\ x - 4 \geqslant 0 \end{cases} \quad 得 x \geqslant 4$$

于是 $x + 1 > 4$ 又 $\sqrt{x-4} \geqslant 0$

所以 $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-4} > \sqrt{4} + 0 = 2$

即原方程无解.

**例 5** 解方程 $4x^2 + y^2 - 4x^2 + 16y + 65 = 0$

**解**:将方程左边配方得:

$(2x-1)^2 + (y+8)^2 = 0$

又 $(2x-1)^2 \geqslant 0, (y+8) \geqslant 0$

所以 $2x - 1 = 0$ 且 $y + 8 = 0$

所以 $x = \dfrac{1}{2}, y = -8$.

**例 6** 已知 $a$、$b$、$c$ 均为实数,方程组

$$\begin{cases} ax^2+bx+c=0 \\ bx^2+cx+a=0 \\ cx^2+ax+b=0 \end{cases}$$ 有实数解，求 $a$、$b$、$c$ 之间的关系.

**解**:将方程组三式相加得：

$(a+b+c)(x^2+x+1)=0$

而 $x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$

所以　当 $a+b+c=0$ 时，这个方程组有实数解 $x=1$.

**例 7**　怎样的整数 $a$、$b$、$c$，满足下列关系：

$$a^2+b^2+c^2+3<ab+3a+2c?$$

**解**:因为原不等式两边都是整数，所以原不等式等价于

$$a^2+b^2+c^2+4\leqslant ab+3b+2c$$

把这个不等式变形得：

$\left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2+3\left(\dfrac{b}{2}-1\right)^2+(c-1)^2\leqslant 0$

而 $\left(a-\dfrac{b}{2}\right)\geqslant 0, 3\left(\dfrac{b}{2}-1\right)^2\geqslant 0, (c-1)^2\geqslant 0$

所以　$\left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2+3\left(\dfrac{b}{2}-1\right)^2+(c-1)^2=0$

所以　$a-\dfrac{b}{2}=0, 3\left(\dfrac{b}{2}-1\right)=0, c-1=0$

所以　$a=1, b=2, c=1$.

**例 8**　若 $m$ 为任何实数，试判定一元二次方程 $x^2-mx+\dfrac{1}{2}m^2+m+\dfrac{3}{2}=0$ 的根的情况.

**解**:$\Delta=(-m)^2-4\left(\dfrac{1}{2}m^2+m+\dfrac{3}{2}\right)$

$\quad=m^2-2m^2-4m-6$

$=-(m+2)^2-2$

因为 $(m+2)^2\geqslant 0$， 所以 $\Delta=-(m+2)^2-2<0$.

所以 原方程没有实数根.

**例 9** 已知方程 $x^2-mx+m=0$ 有两实根 $x_1,x_2$,求：

$y=x_1^2+x_2^2$ 的最小值.

**分析**:利用方程 $x^2-mx+m=0$ 的 $\Delta$ 为非负数,以求得 $y$ 的最小值.

**解**:由 $x_1,x_2$ 为方程 $x^2-mx+m=0$ 的两根,得

$\Delta=m^2-4m\geqslant 0$ 即 $m\leqslant 0$ 或 $m\geqslant 4$

由韦达定理得 $x_1+x_2=m$， $x_1\cdot x_2=m$

所以 $y=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=m^2-2m$

$=(m-1)^2-1$

所以 当 $m=0$ 时,$y=x_1^2+x_2^2$ 的最小值为 0.

**注**:$y=x_1^2+x_2^2=(m-1)^2-1$，当 $m=1$ 时,$y=x_1^2+x_2^2$ 取最小值为 $-1$.

而 $m=1$,不在 $\Delta\geqslant 0$ 即 $m\leqslant 0$ 或 $m\geqslant 4$ 范围内.故 $m=1$ 不能取,只能在 $m\leqslant 0$ 或 $m\geqslant 4$ 的范围取,使 $y$ 达到最小值.

**例 10** 若 $a$、$b$、$c$、$d$ 是四边形 $ABCD$ 的边长,且满足 $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$,求证:四边形 $ABCD$ 是菱形.

**分析**:这是一类数形结合题,应利用菱形的判定方法(四边相等),结合非负数的性质可获证.

**解**:由 $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$ 得

$(a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+2(ab-cd)^2=0$

由完全平方数的非负数性质可得：

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ c^2 - d^2 = 0 \\ ab - cd = 0 \end{cases}$$ 解得 $a = b = c = d$.

所以　以 $a$、$b$、$c$、$d$ 为边长的四边形是菱形.

**例 11**　已知三角形的内切圆半径为 1,并且三条高线的长度为正整数,试判断此三角形的形状.

**分析**:利用三角形的面积公式及非负数的性质可判定此三角形的形状.

**解**:设三角形的三边长分别为 $a$、$b$、$c$ 它们所对应的高线分别为 $h_a$、$h_b$、$h_c$,面积为 $S$

则 $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2}(a + b + c) \times 1$

由此可得　$ah_a + bh_b + ch_c = 3(a + b + c)$

即 $(h_a - 3)a + (h_b - 3)b + (h_c - 3)c = 0$

又 $h_a > 2, h_b > 2, h_c > 2$,(各条高线均应大于内切圆直径),且 $h_a$、$h_b$、$h_c$ 是正整数.

所以　$h_a \geqslant 3, h_b \geqslant 3, h_c \geqslant 3$

所以　$(h_a - 3)a \geqslant 0, (h_b - 3)b \geqslant 0, (h_c - 3)c \geqslant 0$

从而可得　$h_a = h_b = h_c = 3$

所以　$a = b = c$, 即此三角形为正三角形.

**小结**:以上 11 个例题,基本上概括了非负数性质应用的几个主要方面:

(1) 化简及求值型与非负数. 如例 1、例 2、例 3.

(2) 方程(组) 型与非负数. 如例 4、例 5、例 8.

(3) 不等式及函数型与非负数. 如例 7、例 9.

(4) 几何题(综合型) 与非负数. 如例 10、例 11.

**注**:非负数这一概念在解题中的应用非常的广泛,不仅仅应用(局限)于以上几个方面.

## 三、习　题

1. 已知实数 $a$、$b$,并且满足 $\sqrt{2a+1}+|b+1|=0$,求 $-a^3-b^5$ 的值.

2. 已知实数 $x$、$y$,满足 $(x+y-1)^2+|2x-3y-12|=0$,求 $x^y$ 的值.

3. 实数 $a$、$b$、$c$ 在数轴上对应点如图 1.1 所示,化简 $\sqrt{a^2}-\sqrt{(a+b)^2}+\sqrt{(c-b)^2}-|a+c|$.

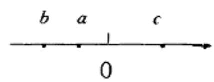


图 1.1

4. 已知 $x+y=6$. $x-y=4$. $x>y$,求 $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ 的值.

5. 已知实数 $a$、$b$、$c$,满足 $a+b=5$,$c^2=ab+b-9$,求 $a+2b+c$ 的值.

6. 若 $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ 和 $\sqrt{y-4\sqrt{y-4}}$ 互为相反数,求 $x+y$ 的值.

7. 解方程 $\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\dfrac{1}{2}(x+y+z)$.

8. 解方程 $x^2+2x+y^2-6y+10=0$.

9. 求方程 $2x^2-2xy+2y^2-4x-4y+6=0$ 的整数解.

10. 当 $a$、$b$ 为何值时,方程 $x^2+2(1+a)x+(6a^2+4ab+b^2+2)=0$ 有实根.

11. 求代数式 $2x^2+4xy+5y^2+4x+16y+20$ 的最小值.

12. 解方程组

$$\begin{cases} x=\dfrac{2z^2}{1+z^2} & ① \\ y=\dfrac{2x^2}{1+x^2} & ② \\ z=\dfrac{2y^2}{1+y^2} & ③ \end{cases}$$

13. 解方程组

$$\begin{cases} \sqrt{2x-y-1}+\sqrt{x+2y-8}=0 & ① \\ xz^2+yz-5\sqrt{xz^2+yz+9}+3=0 & ② \end{cases}$$

14. 设 $x$ 为正实数,求函数 $y=x^2-x+\dfrac{1}{x}$ 的最小值.

15. 求 $3-5x-\dfrac{1}{5x}$ $(x>0)$ 的最大值.

16. 已知 $x$、$y$ 是实数,且满足 $3x^2+2y^2=9x$,求:$x^2+y^2$ 的最大值、最小值.

17. 若三角形的三边为 $a$、$b$、$c$ 且满足 $a^3+b^3+c^3=3abc$,试判断这个三角形的形状.

18. 若 $a$、$b$、$c$ 为实数,且 $A=a^2-2b+\dfrac{\pi}{2}$,$B=b^2-2c+\dfrac{\pi}{3}$,$C=c^2-2a+\dfrac{\pi}{6}$. 试证:$A$、$B$、$C$ 中至少有一个值大于零.

**四、答案·提示**

1. 由题意可得 $2a+1=0$ 且 $b+1=0$ 解得:$a=-\dfrac{1}{2}$,$b=-1$

所以 $-a^3-b^5=\frac{1}{8}+1=1\frac{1}{8}$

2. 由题意可得：$\begin{cases}x+y=1\\2x-3y=12\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3\\y=-2\end{cases}$

所以 $x^y=(3)^{-2}=\frac{1}{9}$

3. 由图示可得：$a<0, a+b<0, c-b>0, a+c>0$

所以 原式 $=-a+(a+b)+(c-b)-(a+c)$

$$=-a+a+b+c-b-a-c=-a.$$

4. 因为 $x>y$，所以 $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}>0$

所以 $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^2}$

$$=\sqrt{\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{x+y+2\sqrt{xy}}}=\sqrt{\frac{6-2\sqrt{4}}{6+2\sqrt{4}}}=\sqrt{\frac{2}{10}}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

5. 由 $a+b=5$ 得 $a=5-b$，代入 $c^2=ab+b-9$

$(b-3)^2+c^2=0$，所以 $b=3, c=0, a=2$

所以 $a+2b+c=2+2\times3+0=8.$

6. 由题意可得：$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{y-4\sqrt{y-4}}=0$

所以 $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=0, \sqrt{y-4\sqrt{y-4}}=0$，

解得 $x=2, y=8$，

所以 $x+y=10.$

7. 对原方程配方得

$(\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{y-1}-1)^2+(\sqrt{z-2}-1)^2=0$，易得 $x=1, y=2, z=3.$

8. 将原方程配方得：$(x+1)^2+(y-3)^2=0$，易得 $x=-1, y=3$.

9. 将原方程配方得

$$(x^2-2xy+y^2)+(x^2-4x+4)+(y^2-4y+4)=2$$

$(x-y)^2+(x-2)^2+(y-2)^2=2$，因为 $x$、$y$ 是整数

所以 $\begin{cases}(x-y)^2=0\\(x-2)^2=1\\(y-2)^2=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}(x-y)^2=1\\(x-2)^2=0\\(y-2)^2=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}(x-y)^2=1\\(x-2)^2=1\\(y-2)^2=0\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_1=3\\y_1=3\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=1\\y_2=1\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=2\\y_3=3\end{cases}$

$\begin{cases}x_4=2\\y_4=1\end{cases}$ $\begin{cases}x_5=3\\y_5=2\end{cases}$ $\begin{cases}x_6=1\\y_6=2.\end{cases}$

10. 因为 $\Delta=4(1+a)^2-4(6a^2+4ab+b^2+2)$

$$=-4(a-1)^2-4(2a+b)^2\geqslant 0$$

即 $(a-1)^2+(2a+b)^2\leqslant 0$

所以 $a-1=0$ 且 $2a+b=0$ 得 $a=1, b=-2$.

11. 设 $z=2x^2+4xy+5y^2+4x+16y+20$，变形得：

$2x^2+(4y+4)x+(5y^2+16y+20-z)=0$

由于 $x$ 为实数，

所以 $\Delta=(4y+4)^2-4\times 2\times(5y^2+16y+20-z)$

$$=-24y^2-96y-144+8z\geqslant 0$$

所以 $z\geqslant 3(y+2)^2+6$ 所以 $z\geqslant 6$

所以 代数式的最小值为 6.

**注**：此题很易使人联想到用配方法做，这样会迷入歧途. 应设法得到关于 $x$(或 $y$) 的方程用 $\Delta$ 为非负数得解.

12. 显然 $x=y=z=0$ 是方程组的一个解，

当 $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ 时，原方程组可化为

$$\frac{2}{x}=\frac{1}{z^2}+1,\quad \frac{2}{y}=\frac{1}{x^2}+1,\quad \frac{2}{z}=\frac{1}{y^2}+1$$

以上三式相加得 $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}-\frac{2}{x}-\frac{2}{y}-\frac{2}{z}+3=0$

即 $\left(\frac{1}{x}-1\right)^2+\left(\frac{1}{y}-1\right)^2+\left(\frac{1}{z}-1\right)^2=0$

所以 $x=y=z=1$

所以 原方程组的解为 $x=y=z=0$ 或 $x=y=z=1$.

13. 由非负数性质，可把方程 ① 化为

$$\begin{cases}2x-y-1=0\\x+2y-8=0\end{cases}\qquad 解得\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$$

代入方程 ② 得 $2z^2+3z-5\sqrt{2z^2+3z+9}+3=0$

解得 $z_1=-\frac{9}{2}, z_2=3$

所以 原方程组的解为 $\begin{cases}x=2\\y=3\\z=-\frac{9}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2\\y=3\\z=3\end{cases}$

14. 因为 $y=x^2-x+\frac{1}{x}=x^2-2x+1+x-2+\frac{1}{x}+1=(x-1)^2+\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+1$

因为 $x$ 为正实数，又 $(x-1)^2\geqslant 0$，$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\geqslant 0$

所以 $y_{最小值}=1$.

15. $3-5x-\frac{1}{5x}=3-\left(5x+\frac{1}{5x}\right)$