经济学中的数学理论与方法

刘康泽

华中理工大学出版社

经济学中的数学理论与方法
刘康泽
责任编辑 李立鹏
*
华中理工大学出版社出版发行
(邮码 430074 武昌喻家山)
新华书店湖北发行所经销
华中理工大学出版社沔阳印刷厂印刷
*
开本:850×1168 1/32 印张:7.5 字数:185000
1993 年 7 月第 1 版 1993 年 7 月第 1 次印刷
印数:1-1000
ISBN 7-5609-0824-1/O·109
定价:2.20 元
(鄂)新登字第 10 号

内 容 简 介

本书就经济学理论中常用的数学理论与方法作了较系统的介绍。内容包括经济学中常用的度量空间；凸性理论；矩阵的微商与分解；投影阵；广义逆矩阵；非负矩阵；动态经济中常用的差分方程、差分方程组和稳定性理论。并适当列举了一些应用例子。对具备微积分及线性代数知识的读者进一步了解现代经济分析理论和管理方法中用到的数学知识，进而解决经济中的理论与实际问题，是有意义的。

本书可作为财经专业学生的选修教材，也可供广大经济工作者及经济管理人员作参考。

前　言

当今，各种数学理论与方法已广泛应用于经济学的各个领域中，给经济现象以定量的描述与分析。高等学校财经专业已开设微积分、线性代数等数学课程，而现代数理经济、计量经济、经济运筹学、投入产出分析等数量经济学科所用的数学理论与方法已超出基础微积分与线性代数的知识。本书的目的是对已具有基础微积分和线性代数知识的读者稍进一步介绍常用的数学知识。所讲的是经济学中用到的数学，而不是数理经济或计量经济。并适当介绍了一些应用例子。

本书共分三篇。第一篇介绍了经济学中常用的度量空间及凸性理论；第二篇介绍了经济学中所必备的矩阵理论与方法，其中包括矩阵的微商、叉积、拉直、分解及投影阵、广义逆矩阵、非负矩阵等内容；第三篇介绍了动态经济中常用的差分方程理论及稳定性，并介绍了几个动态经济模型。

本书的内容在中南财经大学部分专业曾讲授过四次，在原讲稿的基础上作了一些修改与补充后形成本书。由于原讲稿以财经本科生为对象，所以不太追求数学上的系统与严谨，加之作者水平有限，因此本书一定存在多方面的问题，甚至是错误。敬请读者批评与指正。

贺锃教授曾对本书的内容设置及教学提出了宝贵意见；华中理工大学出版社对于本书的出版给予了极大的支持与帮助。在此谨向他们表示衷心的感谢。

刘康泽

一九九三年一月二日

目　　录

第三篇　动态经济模型中的差分方程理论

第一篇　经济学中常用的基本数学知识

描述经济现象中的有关指标之浑的相互依存的数量关系或建立经济数学模型，必须具备必要的数学知识。近代数量经济中所用到的数学知识已不仅仅是微积分所能及的。度量空间、集值映射与不动点原理、凸性理论等数学理论是现代数量经济的基本工具。在这一篇中我们将介绍上述有关的一些基本知识。

第一章　度量空间

§1　集合

一　集合的基本概念

集合，是现代数学中极为重要的一个概念。

定义 1　所谓集合，就是指具有某个共同属性的一些对象的全体。构成集合的每一个对象称为该集合的**元素**。凡具有属性 P 的对象 x 的全体所成的集合，常记为 $\{x \mid x$ 具有属性 $P\}$. 通常用大写字母 $A, B, \cdots, X, Y$ 等表示集合，而其中的元素则用小写字母 $a, b, \cdots, x, y$ 等表示. 若元素 x 在集合 A 中，则记为 $x \in A$，否则记为 $x \overline{\in} A$. 不含有任何元素的集合称为**空集**，记为 $\varnothing$.

例 1　$A = \{x \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}$ 表示由方程 $x^2 - 4x + 3 = 0$ 的根所组成的集合。于是 $1, 3 \in A$，但 $2 \overline{\in} A$.

例 2　$A = \{x \mid x^2 + 10 = 0, x \in R\}$，由于方程 $x^2 + 10 = 0$ 在实数

范围内无解，故 $A=\varnothing$.

例 3 假定市场上有 n 种商品，向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$（$T$ 为转置符号）表示这 n 种商品各取数量 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 而组成的一个商品数量组合，又设第 i 种商品的价格为 p_i，则 $\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,\cdots,p_n)^T$ 就是价格向量. 当某个消费者拥有资金 K 时，则他买得起的所有商品集合的表达式为 $X(\boldsymbol{p})=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{p}\leqslant K\}$ 或 $X(\boldsymbol{p})=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\mid x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n\leqslant K\}$.

定义 2 设有集合 A,B，若对于任意的 $x\in B$，必定有 $x\in A$，则称集合 B 是集合 A 的**子集合**，记为 $B\subset A$. 又若 $B\subset A$，且同时 $A\subset B$，则称集合 A 与 B **相等**，记为 $A=B$.

例 4 设 $A=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 100\}$，$B=\{2\leqslant x\leqslant 50\}$，则 B 是 A 的子集，即 $B\subset A$. 又设 $C=\{x\mid |x|\leqslant 50\}$，则 B 也是 C 的子集，$B\subset C$. 但这时 A 不是 C 的子集，因为 $100\in A$，但 $100\overline{\in}C$.

若 A,B,C 是三个集合，则有

(1) $A\subset A$;

(2) 若 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$;

(3) $\varnothing\subset A$（或 B 或 C），即空集是任何集合的子集合.

二　集合的运算

像数与数之间有加、减、乘、除等各种运算一样，集合与集合之间也有交、并、补等基本运算。

定义 3 设 A 与 B 是两个集合，则称集合

$$\{x\mid x\in A,\text{并且 } x\in B\}$$

为 A 与 B 的交集合，记为 $A\cap B$，如图 1.1-1 所示.

定义 4 设 A 与 B 是两个集合，则称集合

$$\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

为 A 与 B 的并集合，记为 $A\cup B$，如图 1.1-2 所示.

由定义知，$A\cap B$ 就是由 A 与 B 共有的元素所成的集合，而 $A\cup B$ 则是由 A 与 B 的一切元素所组成的集合.

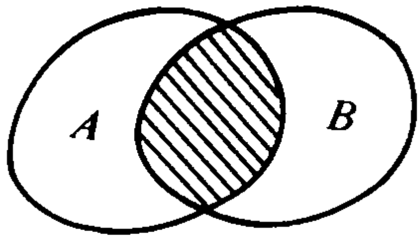

图 1.1-1　$A\cap B$

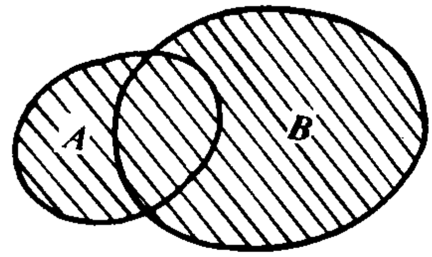

图 1.1-2　$A\cup B$

关于集合的交与并有如下的基本性质：

1°　$A\cup A=A, A\cap A=A$;

2°　$A\cup\varnothing=A, A\cap\varnothing=\varnothing$;

3°　$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

4°　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

5°　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup B)$;

6°　若 $A_1\subset A_2$，则 $A_1\cup B\subset A_2\cup B, A_1\cap B\subset A_2\cap B$;

7°　$A\cap B\subset A$(或 B)$\subset A\cup B$.

这些性质的证明都是很容易的，这里就不详细证明了.

定义 5　设 A 与 B 是两个集合，称集合

$$\{x\mid x\in A, 但\ x\overline{\in} B\}$$

为 A 与 B 的**差集合**，记为 $A-B$. 又若 $B\subset A$，则称 $A-B$ 为集合 B 关于 A 的**补集合**，记为 $\overline{B}_A$，即 $\overline{B}_A=A-B(B\subset A)$如图 1.1-3 所示.

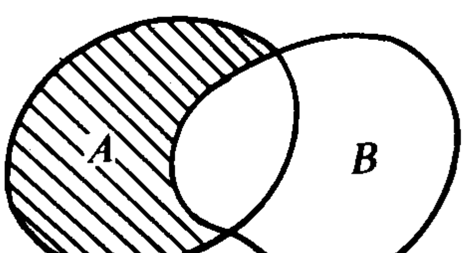

图 1.1-3a　$A-B$

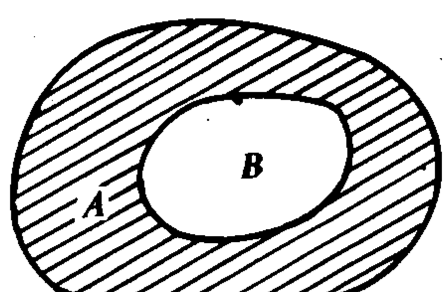

图 1.1-3b　$\overline{B}_A$

如果我们称某一问题所讨论的一切对象为全域或全集(全集的选择是随问题的性质不同而变化的. 如在实数范围内研究问题，

则全集可选为实数集 R)，则 A 关于全集 U 的补集简称为 A 的补集，记为 $\overline{A}$，即

$$\overline{A}=\{x \mid x\overline{\in} A, x\in U(\text{全集})\}.$$

由定义，我们可以证明如下性质：

1° $A-B\subset A$；

2° $A\subset(A-B)\cup B$；

3° $A-\varnothing=A$；

4° $(A-B)\cup B=A$ 的充要条件是 $B\subset A$；

5° $A-B=\varnothing$的充要条件是 $A\subset B$；

6° $\overline{\overline{A}}=A$；

7° $\overline{\varnothing}=U$(全集)，$\overline{U}=\varnothing$；

8° $A\cap\overline{A}=\varnothing, A\cup\overline{A}=U$；

9° $A\subset B$ 的充要条件是 $\overline{B}\subset\overline{A}$；

10° $A-B=A\cap\overline{B}$；

11° $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$，

$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$；

12° $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

作为范例，我们来证 12°的前一个等式.

设任意的 $x\in\overline{A\cup B}$，则 $x\overline{\in} A$ 且 $x\overline{\in} B$，于是 $x\in\overline{A}$ 且 $x\in\overline{B}$，故 $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$，从而有

$$\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}.$$

反之，设任意的 $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$，则 $x\in\overline{A}$ 且 $x\in\overline{B}$，于是，$x\overline{\in} A$ 且 $x\overline{\in} B$，则 $x\overline{\in} A\cup B$，故 $x\in\overline{A\cup B}$，即有

$$\overline{A}\cap\overline{B}\subset\overline{A\cup B},$$

由此：

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}.$$

证毕.

以上的性质 11°及 12°常称为摩根律，它是集合运算中很重要的性质之一.

三 集族

构成集合的元素可以是任何事物，我们称以集合为元素的集

合为**集族**,通常用花体字母 $\mathscr{A}$,$\mathscr{B}$,…等表示集族.

定义 6 设 D 是一个集合,$\mathscr{B}$ 是一个集族,若对于 D 中任一元素 α,在 $\mathscr{B}$ 中有且仅有一个集合 A_α 与之对应,而且 $\mathscr{B}$ 中每个集合都对应 D 中的某个元素,则称 $\mathscr{B}$ 是以 D 为指标集的集族,记为

$$\mathscr{B}=\{A_\alpha \mid \alpha\in D\} \text{ 或 } \mathscr{B}=\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}.$$

例 5 设 N 是自然数集,对于 N 中的每个元素 n,令:

$$A_n=\{x \mid 0\leqslant x<\frac{1}{n}\},$$

则 $\{A_n\}_{n\in N}$ 是以 N 为其指标集的集族,它实际上是一列半开区间:

$$\{[0,1),[0,\frac{1}{2}),[0,\frac{1}{3}),\cdots,[0,\frac{1}{n}),\cdots\}.$$

例 6 设 D 为区间 $(0,1]$,对任何 $\alpha\in(0,1]$,

令
$$A_\alpha=\{x \mid |x|<\alpha\}=(-\alpha,\alpha),$$

则 $\{A_\alpha\}$ 是一个集族,其指标集为 $(0,1]$. 对于 $\alpha=\frac{1}{2}$,

$$A_{\frac{1}{2}}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\in\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}.$$

前面我们定义了集合的交、并与补,这些运算自然可以推广到集族上.

定义 7 设有集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$,于是有

1° 称集合 $\{x \mid \text{存在 } \alpha\in D, \text{使 } x\in A_\alpha\}$ 为集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$ 的**并集**,记为 $\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha$;

2° 称集合 $\{x \mid \text{对于所有的 } \alpha\in D, \text{有 } x\in A_\alpha\}$ 为集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$ 的**交集**,记为 $\bigcap\limits_{\alpha\in D}A_\alpha$.

特别地,当 D 为自然数集合时,集族 $\{A_n\}_{n\in N}$ 的并集与交集分别为

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty}A_n.$$

例 7 设 $A_n=\{x \mid 0\leqslant x<\frac{1}{n}\}=[0,\frac{1}{n})$,

则
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}[0,\frac{1}{n})=[0,1),$$
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}[0,\frac{1}{n})=\{0\}.$$

例 8 设 $A_\alpha=\{x\mid |x|B<\alpha\}=(-\alpha,\alpha),\alpha\in D=(0,1]$,则
$$\bigcup_{\alpha\in D} A_\alpha=(-1,1),$$
$$\bigcap_{\alpha\in D} A_\alpha=\{0\}.$$

例 9 设 $A_n=\{x\mid x>\frac{1}{n},n\in N\}=(\frac{1}{n},+\infty)$,

则
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=(0,+\infty),$$
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=(1,+\infty).$$

关于集族的交与并,我们容易证明下述性质:

(1) 设集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$,$C$ 为任一集合,于是有

1° 若对每个 $\alpha\in D$,有 $A_\alpha\subset C$,则
$$\bigcup_{\alpha\in D} A_\alpha\subset C;$$

2° 若对每个 $\alpha\in D$,有 $A_\alpha\supset C$,则
$$\bigcap_{\alpha\in D} A_\alpha\supset C.$$

证明 1° 对于任意的 $x\in\bigcup_{\alpha\in D} A_\alpha$,则由定义 7 可知:必存在 $\beta\in D$,使得 $x\in A_\beta$,由条件 $A_\beta\subset C$ 知:$x\in C$,从而 $\bigcup_{c\in D} A_\alpha\subset C$.

同理可证 2°.

(2) 设集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$,$B$ 为任一集合,则有:

1° $B\cap(\bigcup_{\alpha\in D} A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in D}(B\cap A_\alpha)$;

2° $B\cup(\bigcap_{\alpha\in D} A_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in D}(B\cup A_\alpha)$.

证明 1°对于任意 $x\in B\cap(\bigcup_{\alpha\in D} A_\alpha)$

$\Longleftrightarrow x\in B$ 且 $x\in\bigcup_{\alpha\in D} A_\alpha$

$\Longleftrightarrow x\in B$ 且有某指标 $\beta\in D$,使 $x\in A_\beta$

$\Longleftrightarrow x\in B\cap A_\beta$(对某个 $\beta\in D$)

$\Longleftrightarrow x\in \bigcup\limits_{\alpha\in D}(B\cap A_\alpha)$.

故性质 1°成立. 同理可证 2°. 证毕.

注意,符号"$\Longleftrightarrow$"表示"等价于"或"充分必要",以下同.

(3) 设$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$,$\{B_\beta\}_{\beta\in E}$是两个集族,则有:

1° $(\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha)\cap(\bigcup\limits_{\beta\in E}B_\beta)=\bigcup\limits_{(\alpha,\beta)}(A_\alpha\cap B_\beta)$;

2° $(\bigcap\limits_{\alpha\in D}A_\alpha)\cup(\bigcap\limits_{\beta\in E}B_\beta)=\bigcap\limits_{(\alpha,\beta)}(A_\alpha\cup B_\beta)$.

此处(α,β)表示历经一切可能的组合($\alpha\in D,\beta\in E$).

证明略.

(4) 设集族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$,则有摩根律

1° $\overline{\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha}=\bigcap\limits_{\alpha\in D}\overline{A}_\alpha$;

2° $\overline{\bigcap\limits_{\alpha\in D}A_\alpha}=\bigcup\limits_{\alpha\in D}\overline{A}_\alpha$.

证明 1°对于任意的 $x\in \overline{\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha}$

$\Longleftrightarrow x\,\overline{\in}\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha\Longleftrightarrow$对任一 $\alpha\in D$,$x\,\overline{\in}A_\alpha$

$\Longleftrightarrow$对于任一$\alpha\in D$,$x\in\overline{A}_\alpha$

$\Longleftrightarrow x\in\bigcap\limits_{\alpha\in D}\overline{A}_\alpha$,即得 1°.

同理可证 2°, 证毕.

(5) 设集族$\{A_{\alpha\beta}\}_{\alpha\in D,\beta\in E}$则有

1° $\bigcup\limits_{(\alpha,\beta)}A_{\alpha\beta}=\bigcup\limits_{\alpha\in D}(\bigcup\limits_{\beta\in E}A_{\alpha\beta})$;

2° $\bigcap\limits_{(\alpha,\beta)}A_{\alpha\beta}=\bigcap\limits_{\alpha\in D}(\bigcap\limits_{\beta\in E}A_{\alpha\beta})$.

证明 1° 任意 $x\in\bigcup\limits_{(\alpha,\beta)}A_{\alpha\beta}$

$\Longleftrightarrow$存在 α_0 及 β_0,$\alpha_0\in D$,$\beta_0\in E$,使 $x\in A_{\alpha_0\beta_0}$

$\Longleftrightarrow x\in\bigcup\limits_{\beta\in E}A_{\alpha_0\beta}\Longleftrightarrow x\in\bigcup\limits_{\alpha\in D}(\bigcup\limits_{\beta\in E}A_{\alpha\beta})$,

即得 1°,同理可证 2°, 证毕.

下面我们讨论一类重要的集族,导出几个有关的概念.

定义 8 满足下述特征的 T 称为集合的一个**域**.

1° 若 $A\in T$，则 $\overline{A}\in T$；

2° 若 $A,B\in T$，则 $A\cup B\in T$；

3° 若 $A,B\in T$，则 $A\cap B\in T$.

我们又称 T 为满足关于$(-,\cup,\cap)$的闭包.

例 10 掷两颗骰子共有 36 种可能的结果，设 $S=\{(i,j)\mid i,j=1,2,\cdots,6\}$若以 G 表示 S 的全部子集而构成的集族，那么 G 就是含有 2^{36}个元素的一类集合. 显然，G 为满足关于$(-,\cup,\cap)$的闭包.

定义 9 设 U 为一个集合，记 $\mathscr{T}$ 为下述集族：

$$\mathscr{T}=\{U,\varnothing,A_1,A_2,\cdots\},$$

其中 $A_1,A_2,\cdots$都是 U 的子集. 即 $\mathscr{T}$ 是 U 的一类子集，如果 $\mathscr{T}$ 满足下列条件：

1° 若 $A_1,A_2\in\mathscr{T}$，则 $A_1\cap A_2\in\mathscr{T}$；

2° 若 $A_i\in\mathscr{T}$，$i\in I$（I 为某个指标集，可以是无限集），则 $\bigcup\limits_{i\in I}A_i\in\mathscr{T}$.

则称 $\mathscr{T}$ 为关于 U 的拓扑.

定义中的 1°是指 $\mathscr{T}$ 中有限个 U 的子集的交集仍在 $\mathscr{T}$ 中，而 2°是指 $\mathscr{T}$ 中无限个（当然也包括有限个的情形）U 的子集的并集仍在 $\mathscr{T}$ 中.

设 X 为 U 的任一子集，于是根据关于 U 的拓扑而导出的相对拓扑可定义为

$$\mathscr{T}_X=\{X,\varnothing,A_1\cap X,A_2\cap X,\cdots\}.$$

这里形如 $A\cap X(A\in\mathscr{T})$的任何集合都属于 $\mathscr{T}_X$.

可以证明 $\mathscr{T}_X$ 是一个拓扑. 事实上，若 $B_1,B_2\in\mathscr{T}_X$，则一定存在集合 $A_1,A_2\in\mathscr{T}$，使得 $B_1=A_1\cap X,B_2=A_2\cap X$，而

$$B_1\cap B_2=(A_1\cap X)\cap(A_2\cap X)=(A_1\cap A_2)\cap X.$$

因为 $\mathscr{T}$ 是一个拓扑，所以 $A_1\cap A_2\in\mathscr{T}$，从而 $B_1\cap B_2\in\mathscr{T}_X$.

同理可证 $B_1 \bigcup B_2 \in \mathscr{T}_X$.

定义 10 设 X 为一个集合，$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$（$D$ 为指标集）是一个集族，若

$$X=\bigcup_{\alpha\in D} A_\alpha,$$

则称集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$ 是 X 的一个**覆盖**.

例 11 设 $X=(0,+\infty)$，$A_n=\{x\mid x>\frac{1}{n}, n\in N\}$，则集族 $\{A_n\}_{n\in N}$ 便是 X 的一个覆盖，这是因为

$$X=(0,+\infty)=\bigcup_{n\in N}\left(\frac{1}{n},+\infty\right)=\bigcup_{n\in N} A_n.$$

定义 11 若集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$ 是集合 X 的一个覆盖，且满足 $A_\alpha \bigcap A_\beta=\varnothing(\alpha\neq\beta,\alpha,\beta\in D)$，则称集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$ 是 X 的一个划分.

由定义知：一个 X 的划分实质上就是 X 的一个不相交的覆盖.

例 12 设 $X=[0,+\infty)$，$A_n=\{x\mid n-1\leqslant x<n\}$，则集族 $\{A_n\}_{n\in N}$ 就是 X 的一个划分，这是因为

$$A_n=[n-1,n).$$

当 $n\neq m$ 时，$A_n\bigcap A_m=\varnothing$，且

$$\bigcup_{n\in N} A_n=[0,+\infty)=X.$$

§2 关系与映射

一 笛卡儿积

集合的元素是不涉及顺序问题的，例如，$\{a,b\}$ 与 $\{b,a\}$ 是指同一个集合. 但有时集合的元素必须按某种规定顺序排列.

定义 1 设有集合 A,B，且 $x\in A, y\in B$，则称所有二元有序数组 (x,y) 构成的集合

$$\{(x,y)\mid x\in A, y\in B\}$$

为 A 与 B 的**笛卡儿乘积**,记为 $A * B$.

例 1 设 $A=\{1,2,3\}$ $B=\{a,b\}$,则

$A * B=\{(1,a),(2,a),(3,a),(1,b),(2,b),(3,b)\}$,

又 $B * B=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$.

例 2 设 R 为实数集,则

$$R * R=\{(x,y)\mid x\in R,y\in R\}.$$

它就是通常的二维空间(平面上的所有点集)

笛卡儿积可以推广到有限个集合的情形.即

$X_1 * X_2 * \cdots * X_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in X_i,i=1,2,\cdots,n\}$.

常常记:$X^n=X * X * \cdots * X$(n 个 X 的笛卡儿积).例如,若 R 为实数集,则 $R^n=R * R * \cdots * R$ 便是 n 维向量空间.

例 3 设 $A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$,则

$$A * A * A=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant x,y,z\leqslant 1\}.$$

它就是空间直角坐标系下的一个正方体.

二 关系

数学中的许多对象可以用"关系"的语言简捷地描述,它已成为现代数学的基本方法,表现了数学抽象性的特征.表面上看起来似乎无关的内容,本质上却有其共性,可以用统一的数学语言予以刻划.

定义 2 设 A 与 B 是两个集合,则 A 与 B 的笛卡儿乘积 $A * B$ 的某个子集 R 称为从 A 到 B 的一个**关系**,记为 $R:A\to B$.如果 $x\in A,y\in B$,则当 $(x,y)\in R$ 时,称 x 与 y 具有**关系 R**,记为 xRy;而当 $(x,y)\overline{\in} R$ 时,称 x 与 y 不具有关系 R,记为 $x\overline{R}y$.

特别地,当 $A=B=S$ 时,简称为集合 S 的关系.它意味着 S 的元素间的关系.

例 4 设 A 为平面点集,B 为平面上的直线集,点在直线上是平面图形的关系,设 $x\in A,y\in B$,(x,y)属于这个关系意味着点 x 在直线 y 上.若点 x 不在直线 y 上,则说(x,y)不属于这个关系.

例 5　设 S 为一个集，A 表示 S 的子集，x 表示 S 的元素. 集合的属于关系是集合 S 与其子集合的集合 $\{A|A\subset S\}$ 之间的一个关系. 常写作"$\in$". 若元素 x 是集合 A 的元素，则说 (x,A) 有关系"$\in$"，或 $x\in A$；若元素 x 不是 A 的元素，则说 (x,A) 没有关系"$\in$"或 $x\overline{\in}A$. 属于关系可以表示为

$$\{(x,A)|x\in A,A\subset S\}.$$

例 6　在整数集 Z 中，$x\in Z,y\in Z,x-y$ 是偶数为整数集的一个关系，这个关系通常用 $x\equiv y(\mathrm{mod}2)$ 表示. 显然一个奇数对或一个偶数对都属于这个关系，而一个奇数和一个偶数所成的数对不属于这个关系.

我们常称集合 $D(R)=\{x|$存在 $y\in B$，使得 $xRy\}$ 为关系 R 的定义域，即关系 R 的第一个坐标的全体 $\{x|$对某个 $y,(x,y)\in R\}$ 为其定义域. 显然 $D(R)\subset A$.

又称 $Z(R)=\{y|$存在 $x\in A$，使 $xRy\}$ 为关系 R 的值域. 显然 $Z(R)\subset B$.

例如：在例 4 中，$D(R)=$平面点集，$Z(R)=$直线集；在例 5 中，$D(R)=S,Z(R)=\{A|A\subset S\}-\{\varnothing\}$；在例 6 中，$D(R)=Z(R)=$整数集.

定义 3　设 R 是从集合 A 到集合 B 的关系(即 $R\subset A*B$)，则集合 $\{(y,x)|xRy\}$ 为 $B*A$ 的子集，它是从 B 到 A 的关系，称它为 R 的逆关系，记为 R^{-1}.

例 7　直线含有点是点在直线上的逆关系；倍数关系是约数关系的逆关系；"$\subset$"关系是"$\supset$"关系的逆关系.

由定义 3 直接看出关系 R 与其逆关系 R^{-1} 是相互唯一确定的，R 的定义域是 R^{-1} 的值域，而 R 的值域是 R^{-1} 的定义域. 即

$$(x,y)\in R\Longleftrightarrow(y,x)\in R^{-1}.$$

由逆关系的定义也可以直接推出：

$$(R^{-1})^{-1}=R.$$

定义 4　设 R_1 是从 A 到 B 的关系($R_1\subset A*B$)，R_2 是从 B 到 C