

内 容 简 介

本书是西北工业大学、北京航空学院、南京航空学院等院校数学教研室合编的《工程数学》七个分册之一。本分册共分八章，着重介绍用电子计算机进行科学计算时常用的计算方法，包括误差知识、方程的近似解法、线性代数计算方法、代数插值、曲线拟合、数值微分与数值积分、常微分方程初值问题的数值解法、偏微分方程的差分解法等方面的基本概念、理论及算法。书中附有主要算法的框图和适量的习题，书末给出了习题答案。

本书可作为高等工科院校教材，也可作为电视大学、业余科技大学的教材，并可供科技人员参阅和自学者自学。

工程数学 计 算 方 法 (修订版)

聂铁军 编
责任编辑 陈子玉

*

国防工业出版社出版发行

新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印刷

*

850×1168 $1/32$ 印张 $7\frac{3}{8}$ 192千字

1988年12月第一版 111988年12月第一次印刷 印数：00,001—14,080册

ISBN 7-118-00156-2/09 定价：3.65元

再版说明

《工程数学》(修订版)包括:《概率论与数理统计》、《矢量分析与张量计算》、《复变函数》、《线性代数》、《计算方法》、《拉普拉斯变换与富里哀变换》、《数学物理方程·特殊函数》。

本书修订再版后与初版比较:删去了和差积商的误差估计、根的隔离的有关定理和解线性方程组的消去法的列表演算格式等内容;增补了线性方程组的矩阵分解法、超松弛法等几种用电子计算机进行计算的常用算法;增加了有关收敛性和稳定性理论的若干定理;增加了相当数量不同难易程度的习题;对大部份章节作了文字修饰加工。力求使概念更加清晰,算法构造思想明确,推导详细,深入浅出,通俗易懂,以便于阅读和教学。

讲授全书共需50学时。有关内容仍保持一定的相对独立性,以便于教学中根据需要进行取舍,例如若舍去第三章的§3.4和第八章,则约需讲授36学时。

修订时吸收了初版以来不少同志试用本书后提供的有益建议,本书主审人何柏庆老师仔细审阅了修订书稿,并提出了极为宝贵的意见,对此深表诚挚的谢意。

编 者

第一版前言

本书是西北工业大学、北京航空学院、南京航空学院等院校数学教研室合编的一套《工程数学》教材之一。全套教材共分七册出版：《矢量分析》、《复变函数》、《积分变换》、《线性代数》、《计算方法》、《数学物理方程与特殊函数》、《概率论与数理统计》。

本册介绍数值计算的基本概念和基本方法，着重于工程计算中的常用算法，如方程的近似解法、线性代数计算方法、代数插值、曲线拟合、数值微分与数值积分、常微分方程的数值解法、偏微分方程的差分法等。

本书各章内容具有一定的相对独立性，可以根据需要予以取舍。各章配有适量习题，书后附有习题答案。阅读本书只需具有一般的高等数学知识或线性代数基本知识。

本书由西北工业大学聂铁军编写，由南京航空学院何柏庆主审。西北工业大学张德珍、傅同奇两位同志分别提供了第一、二章和第五章的初稿。参加审稿的还有西北工业大学、南京航空学院、北京航空学院、沈阳航空工业学院和南昌航空工业学院数学教研室的部分同志。我们对在本书编写过程中给予大力支持和提供宝贵意见的所有同志，在此致以衷心的感谢。

由于我们的水平所限，书中的缺点和错误在所难免，诚望同志们批评指正。

编 者

1980年5月

目 录

第一章 绪论	1
§ 1.1 数值计算方法的任务与算法的概念	1
§ 1.2 误差知识	2
(一) 误差的来源	2
(二) 绝对误差 · 相对误差 · 有效数字	2
(三) 误差的传播	6
(四) 选用算法的若干注意之点	7
习题一	10
第二章 方程的近似解法	12
§ 2.1 对分法	14
§ 2.2 迭代法	15
§ 2.3 牛顿法	22
习题二	27
第三章 线性代数计算方法	29
§ 3.1 解线性方程组的精确法	29
(一) 高斯消去法	29
(二) 主元素消去法	33
(三) 无回代过程的主元素消去法	38
(四) 主元素消去法的应用	39
§ 3.2 矩阵三角分解法	43
(一) 直接三角分解法	43
(二) 平方根法	46
§ 3.3 解线性方程组的迭代法	49
(一) 简单迭代法及其收敛条件	49
(二) 赛德尔迭代法及其收敛条件	54
(三) 化方程组 $Ax = f$ 为便于使用迭代法的形式	59
(四) 超松弛法	63
§ 3.4 矩阵的特征值与特征向量的计算	65
(一) 求绝对值最大的特征值的幂法	65

(二) 求解实对称矩阵特征值问题的雅可比方法	70
习题三	81
第四章 插值法	86
§ 4.1 线性插值与二次插值	87
§ 4.2 均差·均差插值公式	91
(一) 均差的概念 均差表	91
(二) 均差插值多项式	94
(三) 插值多项式的余项	96
§ 4.3 等距结点插值公式·差分	99
(一) 差分概念与差分表	99
(二) 差分与均差及导数的关系	101
(三) 等距结点插值公式	101
§ 4.4 拉格朗日插值多项式	104
§ 4.5 三次样条插值	110
(一) 三次样条函数的定义	112
(二) 系数用节点处的二阶导数表示的三次样条函数	113
(三) 系数用节点处的一阶导数表示的三次样条函数	117
(四) 解三对角线方程组的追赶法	119
习题四	121
第五章 曲线拟合与最小二乘法	124
§ 5.1 最小二乘法	124
§ 5.2 多项式拟合	127
习题五	133
第六章 数值微分与数值积分	135
§ 6.1 数值微分	135
(一) 用插值多项式求数值导数	135
(二) 用三次样条函数求数值导数	137
§ 6.2 数值积分	137
(一) 牛顿-柯特斯公式	139
(二) 复化求积公式	141
(三) 求积公式的截断误差	144
(四) 步长的自动选择	149
(五) 线性加速法 龙贝格求积公式	150
(六) 高斯求积公式	156
附录	160

习题六	161
第七章 常微分方程初值问题的数值解法	164
§ 7.1 欧拉折线法与改进的欧拉方法	164
(一) 欧拉折线法	164
(二) 改进的欧拉方法	166
(三) 方法的收敛性、误差估计和稳定性	169
§ 7.2 龙格-库塔方法	174
(一) 二阶龙格-库塔方法	175
(二) 标准四阶龙格-库塔方法	176
(三) 变步长的龙格-库塔方法	178
§ 7.3 亚当姆斯方法	179
(一) 亚当姆斯内插公式	180
(二) 亚当姆斯外插公式	181
(三) 计算中估计误差的一种方法	182
(四) 求开头三个点的函数值的方法	184
习题七	185
第八章 偏微分方程的差分解法	187
§ 8.1 椭圆型方程的差分解法	188
(一) 微分方程的差分近似的建立	189
(二) 边界条件的转换	192
(三) 差分方程解的存在性及解法	194
(四) 差分方程的收敛性及误差估计	197
§ 8.2 抛物型方程的差分解法	202
(一) 古典差分格式	203
(二) 差分格式的稳定性	208
§ 8.3 线性双曲型方程的差分解法	212
(一) 差分格式的建立	212
(二) 差分格式的收敛性	214
(三) 差分格式的稳定性	216
习题八	218
习题答案	221

第一章 绪 论

§ 1.1 数值计算方法的任务与算法的概念

快速电子计算机的发展,为科学技术中提出的各种数学问题求得数值解答提供了有力的工具。随着计算机广泛地用于进行大型的科学计算,计算数学方法已经成为应用数学的一个重要分支。

运用计算机解决科学计算问题需要经历以下几个主要的步骤:提出问题→建立数学模型→选用数值计算方法→程序设计→上机计算得出数值结果。“计算方法”的任务是研究适用于科学计算的数值计算方法及有关的数学理论,它是程序设计和对数值结果进行分析的依据和基础,是用计算机进行科学计算全过程的一个重要环节。

大家知道,电子计算机具有极高的运算速度,但它只能根据给定的指令完成加、减、乘、除等算术运算和一些逻辑运算。因此,要使用计算机来求解各种数学问题,诸如方程求根、微分和积分的计算、微分方程的求解等等,必须把求解过程归结为按一定的规则进行一系列四则算术运算的结果。计算机只能机械地执行人们所给定的指令,而不会主动地思维,去进行创造性的工作。交给计算机执行的解题方法的每一步骤都必须加以准确的规定。我们把对数学问题的解法归结为有加、减、乘、除等基本运算并有确定的运算顺序的完整而准确的描述,称为**数值算法**或简称**算法**。“计算方法”就是以数学问题为对象,研究各种数值算法及其有关理论的一门学科。

数值算法的优劣,需要考虑其计算工作量、计算程序的存贮量和逻辑结构的复杂程度,还要考察收敛性和稳定性来加以鉴定。

§ 1.2 误差知识

(一) 误差的来源

科学计算中所处理的数据和计算的结果,通常都是在一定精度范围内的近似数值,它们与实际的精确值之间总存在着误差。引起误差的因素是多方面的,但主要来源有下面几种:

1. 数学描述与实际问题之间的误差

各种实际问题的数学模型,总是在一定条件下抓住主要因素,忽略次要因素加以抽象得出的结果,是一种理想化了的数学描述,它与实际问题之间总存在误差,这种误差称为“描述误差”或“模型误差”。

2. 观测误差

在各种计算公式中包含着一些已知数量(称为原始数据),这些数量往往是由观测和实验得到的,它们和实际的大小之间有误差,这种误差称为“观测误差”。

3. 在计算中常遇到超越运算或极限运算,它们需要通过无穷过程才能求得精确的结果。但在实际上人们只能进行有限的算术运算,用有限的步骤来求得近似的结果。例如常用收敛的无穷级数的部分和来代替无穷级数本身以求得其近似值。这样由于截断一个无穷过程而引起的误差,称为“截断误差”。

4. 舍入误差

对于参与计算的数,用有限小数代替无限小数,或用位数较少的有限小数代替位数较多的有限小数,例如用3.14代替 π ,用1.414代替 $\sqrt{2}$ 等等,这样所产生的误差称为“舍入误差”。

误差的来源虽然有以上种种,且了解这些对于数值计算都是有帮助的,但是前两种误差往往不是计算工作者所能独立解决的。因此,在计算方法课程中通常只讨论截断误差和舍入误差。

(二) 绝对误差 · 相对误差 · 有效数字

为了从不同的侧面表示近似数的精确程度,通常运用绝对误

差、相对误差和有效数字的概念。

设 x^* 代表准确值 x 的一个近似值。我们定义

$$e^* = x - x^* \quad (1.2.1)$$

为近似值 x^* 的**绝对误差**。通常无法准确地算出绝对误差的真值，只能根据具体测量或计算的情况估计它的大小的范围，即估计出 $|e^*|$ 的上界。设存在一个正数 ε^* ，使

$$|e^*| = |x - x^*| \leq \varepsilon^* \quad (1.2.2)$$

则称 ε^* 是近似值 x^* 的**绝对误差限**，以后也把它简称为绝对误差。

由(1.2.2)式可知

$$x^* - \varepsilon^* \leq x \leq x^* + \varepsilon^*$$

即可知道准确值 x 所在的范围：必落在区间 $[x^* - \varepsilon^*, x^* + \varepsilon^*]$ 内。在应用上常采用下面的写法

$$x = x^* \pm \varepsilon^*$$

来表示近似值 x^* 的精确度或准确值所在的范围。例如用有毫米刻度的米尺测量不超过1 m的长度 x ，读数法如下：如果长度接近于毫米刻度 x^* ，就读出那个刻度数 x^* 作为该长度的近似值。显然这个近似值的绝对误差为0.5 mm。由这个例子还可看到绝对误差是有量纲单位的。

绝对误差的大小不能完全刻画近似值的准确程度。例如假设测量1 km的长度产生了5 m的误差，而测量100 m的长度产生了1 m的误差。就绝对误差而言，前者为后者的五倍，这是否说明后一种测量更精确呢？其实不然，如果考虑到被测量的数量本身的大小，前者在1 km = 1000 m中误差5 m，误差所占的比例为 $\frac{5}{1000} = 0.5\%$ ，后者的误差所占的比例为1%。显然应该说前一种测量要精确些。因此，刻画近似值的精确度，不仅要看绝对误差的大小，还要考虑近似数本身的大小，这就有必要引入相对误差的概念。

我们定义 x 的近似值 x^* 的**相对误差**为

$$e_r^* = \frac{e^*}{x^*} = \frac{x - x^*}{x^*} \quad (1.2.3)$$

相对误差说明了 x^* 的绝对误差与 x^* 本身比较起来所占的比例,它可以反映一个近似数的精确程度。相对误差是一个无量纲量,通常可用百分数表示。

一般我们不能定出 e_r^* 的准确值,而只能估计它的大小的范围。如果

$$|e_r^*| = \left| \frac{x - x^*}{x^*} \right| \leq e_r^* \quad (1.2.4)$$

我们就把这个上界 e_r^* 称为 x^* 的**相对误差限**,或简称为**相对误差**。

为了给出一种近似数的表示法,使之既能表示其大小,又能表示其精确程度,我们来引进有效数字的概念。在计算中常按四舍五入原则得到数 x 的前几位近似值 x^* ,例如设

$$x = \pi = 3.1415926 \dots$$

经四舍五入,若取三位得 $x^* = 3.14$, $\varepsilon^* \leq 0.002$;若取五位得 $x^* = 3.1416$, $\varepsilon^* \leq 0.000008$ 。它们的绝对误差都不超过末位数字的半个单位,即

$$|\pi - 3.14| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2}$$

$$|\pi - 3.1416| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

如果近似值 x^* 的绝对误差限是某一位的半个单位,从该位到 x^* 的第一位非零数字共有 n 位数,我们就说 x^* 有 **n 位有效数字**。用严格的数学语言还可以如下定义:

将数 x 的近似值 x^* 写成形式

$$x^* = \pm 10^m (x_1 \times 10^{-1} + x_2 \times 10^{-2} + \dots + x_n \times 10^{-n}) \quad (1.2.5)$$

若其绝对误差限满足

$$|x - x^*| \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-n} \quad (1.2.6)$$

则称近似数 x^* 具有 **n 位有效数字**,其中 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 都是 x^* 的有效数字, x^* 又称为有 **n 位有效数字的有效数**。这里 n 是正整

数, m 是整数, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 都是 0 到 9 中的一个数字, 且假定 $x_1 \neq 0$ 。根据定义易知 π 的近似值 3.14 具有三位有效数字, 而近似值 3.1416 具有五位有效数字。注意有效数 0.0023 与 0.002300 是不同的, 前者具有两位有效数字, 其绝对误差不超过 $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$, 后者具有四位有效数字, 其绝对误差不超过 $\frac{1}{2} \times 10^{-6}$ 。

上面的叙述说明了有效数字与绝对误差之间的关系。形如 (1.2.5) 的数, 若具有 n 位有效数字, 由 (1.2.6) 式表明: 当 m 一定时, 有效位数越多, 则绝对误差越小。至于有效数字与相对误差的关系有如下的结论:

形如 (1.2.5) 的近似数 x^* , 若具有 n 位有效数字, 则其相对误差

$$|e_r^*| \leq \frac{1}{2x_1} \times 10^{-(n-1)} \quad (1.2.7)$$

反之, 若 x^* 的相对误差 $|e_r^*| \leq \frac{1}{2(x_1+1)} \times 10^{-(n-1)}$, 则 x^* 至少具有 n 位有效数字。

事实上, 由式 (1.2.5) 知

$$x_1 \times 10^{m-1} \leq |x^*| \leq (x_1 + 1) \times 10^{m-1}$$

所以

$$|e_r^*| = \left| \frac{x - x^*}{x^*} \right| \leq \frac{\frac{1}{2} \times 10^{m-n}}{x_1 \times 10^{m-1}} = \frac{1}{2x_1} \times 10^{-(n-1)}$$

$$\begin{aligned} \text{反之, 由 } |x - x^*| &= |x^*| |e_r^*| \leq (x_1 + 1) \times 10^{m-1} \times \frac{1}{2(x_1 + 1)} \\ &\times 10^{-(n-1)} = \frac{1}{2} \times 10^{m-n} \end{aligned}$$

故 x^* 具有 n 位有效数字。

这就表明: 有效位数越多, 相对误差越小。

注意从式 (1.2.7) 并不能保证 x^* 一定具有 n 位有效数字。例

如: $A = \sin 29^\circ 20' = 0.4900$, 设其近似值 $a = 0.484$, 其相对误差为

$$\frac{0.4900 - 0.484}{0.484} = 0.012397 < 0.0125 = \frac{1}{2 \times 4 \times 10}$$

我们不能由此推出 a 有两位有效数字, 这是因为

$$A - a = 0.4900 - 0.484 = 0.0060 > 0.005$$

即可知近似值 a 并不具有两位有效数字。

(三) 误差的传播

数值运算中的误差估计情况比较复杂, 通常可以利用台劳展开式的方法估计误差。设想把所有的原始数据 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 看成是互相独立的自变量, 而把通过某个算式所得的结果看作是这些原始数据的函数, 表示为

$$A = f(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (1.2.8)$$

设 $a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*$ 是 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的近似值, 则 A 的近似值为

$$A^* = f(a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*) \quad (1.2.9)$$

假定多元函数 f 在点 $a = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*)$ 处可微, 于是函数值 A^* 的绝对误差可利用台劳展开得到

$$\begin{aligned} e^*(A) &= A - A^* = f(a_1, a_2, \dots, a_n) - f(a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*) \\ &\approx \left(\frac{\partial f}{\partial a_1} \right)_a (a_1 - a_1^*) + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial a_n} \right)_a (a_n - a_n^*) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial a_i} \right)_a e^*(a_i) \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

函数值 A^* 的相对误差为

$$e_r^*(A) = \frac{e^*(A)}{A^*} \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial a_i} \right)_a \frac{a_i^* e_r^*(a_i)}{A^*} \quad (1.2.11)$$

我们可以利用 (1.2.10) 与 (1.2.11) 来估计按函数 f 的计算误差, 给定函数 f 的具体形式, 就可以得出具体的估计。特别地可以得到和、差、积、商的误差估计。

例 和的误差估计

设 $A = f(a_1, \dots, a_n) = a_1 + \dots + a_n$

这里 $\frac{\partial f}{\partial a_i} = 1$, 所以有

$$e^*(A) = e^*(a_1) + \dots + e^*(a_n)$$

$$|e^*(A)| \leq \sum_{i=1}^n |e^*(a_i)| \quad (1.2.12)$$

即和的绝对误差不超过各加数的绝对误差之和。为考察相对误差, 再假设 $a_i^* > 0$, 可得

$$|e_r^*(A)| \leq \max_i |e_r^*(a_i)| \quad (1.2.13)$$

即和的相对误差不超过相加各项中最不准确的一项的相对误差。

(四) 选用算法的若干注意之点

解决一个计算问题往往有多种算法, 用不同算法计算的结果其精确度是不同的。人们自然希望选用那些计算量小而精度又高的算法。但如何给出最好的算法没有什么固定的办法, 我们只是按照一般的情况, 指出选用算法的若干注意之点。

1. 简化计算步骤以减少运算次数

减少运算次数, 既可以提高解题速度, 又有可能使计算中的误差积累降低。

例如要计算多项式

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (1.2.14)$$

的值。如果直接计算 $a_k x^k$ 再逐项相加, 一共需做 $\frac{1}{2} n(n+1)$

次乘法和 n 次加法。但若按下列递推算法 (称为秦九韶算法):

$$\begin{cases} u_n = a_n \\ u_k = x u_{k+1} + a_k \quad (k = n-1, n-2, \dots, 2, 1, 0) \\ p_n(x) = u_0 \end{cases} \quad (1.2.15)$$

则只要 n 次乘法和 n 次加法就可算出 $p_n(x)$ 的值。

又如要计算和式 $\sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{n(n+1)}$ 的值, 如果直接逐项求

和, 其运算次数多且误差积累也不小。但和式可以简化:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{1000} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{1001} \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

则整个计算只要一次求倒数和一次减法了。

2. 尽量避免相近的数相减

如果要计算 $y = x - A$, 假定 A 为准确数值, 运算时不发生误差, 而 x 的近似值为 x^* 。易知 y 的相对误差为

$$e_r^*(y) = \frac{e^*(x)}{x^* - A} \quad (1.2.17)$$

当 x^* 很接近于 A 时, $|e_r^*(y)|$ 就会变得很大。相对误差很大, 有效数字位数就很少。为了避免这种情形出现, 常常可以采用改变原来算式的办法来改善计算的效果。例如:

当 x 充分大时变换

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$$

当 x 充分大时变换

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}}$$

当 x 接近于 0 时变换

$$\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

等等。

3. 应该选用数值稳定性好的计算公式

例如要计算积分:

$$I_n = e^{-1} \int_0^1 x^n e^x dx \quad (1.2.18)$$

由分部积分法可以得到计算 I_n 的递推公式:

$$\begin{cases} I_0 = e^{-1} \int_0^1 e^x dx = 1 - e^{-1} \approx 0.6321 \\ I_n = 1 - nI_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (1.2.19)$$

利用上式, 用四位小数计算依次得到:

$$0.6321, 0.3679, 0.2642, 0.2074, 0.1704, \\ 0.1480, 0.1120, 0.2160, -0.7280, 7.5520$$

由此看到 I_8 为负值, 显然与一切 $I_n > 0$ 矛盾。事实上由估计式:

$$\begin{aligned} \frac{e^{-1}}{n+1} = e^{-1} (\min_{0 \leq x \leq 1} e^x) \int_0^1 x^n dx < I_n \\ < e^{-1} (\max_{0 \leq x \leq 1} e^x) \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

必有 $I_7 < \frac{1}{8} = 0.125$, 但上面算得 $I_7 = 0.2160$ 已经连一位有效数字也没有了。发生这个现象的原因是, 因为 I_0 带有不超过 $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$ 的误差, 虽然在以后的递推计算中没有新的舍入误差, 但这个初始数据的误差在以后的每次计算时顺次乘以 $n = 1, 2, 3, \dots$ 而传播积累到 I_n 中, 使得算到 I_7 时就完全不精确了。

如果将递推算式(1.2.19)改写为

$$I_{n-1} = (1 - I_n)/n \quad (1.2.21)$$

再由 $\frac{e^{-1}}{10} < I_9 < \frac{1}{10}$, 粗略取 $I_9 \approx \frac{1}{2} \left(\frac{1}{10} + \frac{e^{-1}}{10} \right) = 0.0684$,

按算式(1.2.21)对 $n = 9, 8, \dots, 1$ 倒推计算, 计算中小数点后第5位按四舍五入, 得 $I_9, I_8, \dots, I_0$ 顺次为:

$$0.0684, 0.1035, 0.1121, 0.1268, 0.1455, \\ 0.1709, 0.2073, 0.2642, 0.3679, 0.6321$$

可见 $I_0 = 0.6321$ 全部为有效数字。这样计算的结果如此精确的

原因是, I_0 的误差传播到 I_8 时要乘以 $-\frac{1}{9}$, 直到计算 I_0 时, I_0 的误差已缩小为 $-\frac{1}{9!}$ 倍。

我们把运算过程中舍入误差不增长的计算公式称为**数值稳定**的, 否则称为**不稳定的**。例如递推算式 (1.2.21) 是数值稳定的, 而 (1.2.19) 是不稳定的算式。我们自然应当选用数值稳定性好的计算公式。

习 题 一

1. 下列各近似值的误差均不超过末位数的半个单位, 试求其和并估计其和的绝对误差:

136.421, 28.3, 231, 62.243, 17.482

2. 设有三个数: $a = 325 \pm 1$, $b = 3.25 \pm 0.01$, $c = 0.00325 \pm 10^{-5}$ 。其近似值 $a^* = 325$, $b^* = 3.25$, $c = 0.00325$, 哪个近似值的精确度高? 为什么?

3. 设下列各对近似值均为有效数, 问它们是否一样? 若不一样有何区别?

(1) 45800 与 458×10^2

(2) 0.00438 与 0.04380×10^{-1}

(3) 0.4015×10^2 与 0.04015×10^3

(4) 9800 与 98×10^2

(5) 0.8070 与 0.807

4. 设下列近似值均为有效数, 试求各数的绝对误差、相对误差和有效数字的位数。

(1) 3580

(2) 0.00476

(3) 0.1430×10^8

(4) 2958×10^{-2}

(5) 10.1010×10

5. 取 3.14, 3.15, $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$ 作为 π 的近似值, 求各自的

绝对误差、相对误差和有效数字的位数。

6. 求 $\sqrt{10}$ 的近似值 a^* , 使相对误差不超过0.1%。

7. 要使 $\sqrt{20}$ 的近似值的相对误差限小于0.1%, 要取几位有效数字?

8. 利用(1.2.10)、(1.2.11)式导出二数之积、商的误差公式。

9. 设已测得某长方形场地长 l 的值为 $l^*=110$ 米, 宽 d 的值 $d^*=80$ 米。若已知 $|l-l^*|\leq 0.2$ 米, $|d-d^*|\leq 0.1$ 米, 试求其面积的绝对误差与相对误差。

10. 设 $s = \frac{1}{2}gt^2$, 假定 g 是准确的, 而对 t 的测量有 ± 0.1 秒的误差, 证明当 t 增大时, s 的绝对误差增大而相对误差却减小。

11. 设 $a=1000$, 取四位数字进行运算, 求近似值 x^* :

(1) 按算式 $x = \sqrt{a+1} - \sqrt{a}$ 计算

(2) 按算式 $x = \frac{1}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}}$ 计算

将二结果与准确值 $x=0.015807437\cdots$ 比较, 各有多少位有效数字。