·人教版·

·全国各类成人高等学校招生考试丛书·

·全国各类成人高等学校招生考试丛书·

·全国各类成人高等学校招生考试丛书·

数学

及解题指导

人民教育出版社

全国各类成人高等学校招生考试丛书

数学及解题指导

人民教育出版社数学室　编

人民教育出版社

全国各类成人高等学校招生考试丛书
数学及解题指导
人民教育出版社数学室编
*
人民教育出版社出版
新华书店总店科技发行所发行
人民教育出版社印刷厂印装
*
开本 787×1092 1/16 印张 34.25 字数 761,000
1988 年 11 月第 1 版 1988 年 11 月第 1 次印刷
印数 1—188,000
ISBN 7-107-10319-9
G·1309 定价 7.20 元

说　　明

为了帮助报考各类成人高等学校(包括广播电视大学，职工高等学校，农民高等学校，管理干部学院，教育学院和教师进修学院，独立设置的函授学院，普通高等学校举办的干部专修科、函授部、夜大学等)的考生系统复习中学课程，参加各类成人高等学校招生的考试，我们根据国家教育委员会1988年颁布的《各类成人高等学校招生考试大纲》(包括政治、语文、数学、物理、化学、历史、地理、英语、俄语、日语等10个学科)编写出一套《全国各类成人高等学校招生考试丛书》，共计10册．这套考试丛书根据新的考试大纲规定的考试范围和要求，并注意吸收我社1985年编写的《各类成人高等学校招生考试复习丛书》的优点，紧扣大纲，突出成人特点，系统性强，便于自学．为了方便读者，每科将复习部分与解题指导合并为一册．

这套考试丛书除供各类成人高等学校考生复习用外，也可供成人高中学员、教师和教研人员学习、参考．

这册《数学及解题指导》分代数、三角、立体几何、平面解析几何四篇．每篇分若干章，每章又分内容提要、复习要求、例题、习题四项．内容提要概括地介绍了本章的基础知识．复习要求根据《考试大纲》规定的要求，结合具体内容详细地说明通过复习应达到的程度．例题为基础知识的运用作出了示范，并通过解题前的“分析”和解后的“注意”，帮助读者掌握解题思路和解题中应注意的问题．习题供复习时选用．另外全书还有总复习题和七套自我测验题，供考试前总复习和检验复习效果时选用．

报考理工农医类的考生，应复习本书全部内容(包括例、习题)．报考文史财经类的考生，只要复习书中不标“▲”、“▲▲”号的内容，其中报考财经类的考生还要复习标“▲▲”的内容．

本书由我社数学室编写，参加编写工作的有康合太、王凝、高存明、方明一、薛彬、陈宏伯、贾云山、李琳、鲍珑、许缦阁、李慧君．责任编辑是李慧君．全书由吕学礼校订．

由于编写时间匆促，本书难免存在缺点、错误，欢迎读者批评指正．

人民教育出版社

1988年8月

目 录

第一篇 代数

第二篇 三角

第三篇 立体几何

第四篇 平面解析几何

习题解答

第一篇　代数

第一章　数、式、方程和方程组

【内容提要】

一、数

1. 有关数的基本概念

(1) 数系表

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数(自然数)}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}\text{有限小数或循环小数}\\ \text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

注意　实数系可以进一步扩展，成为复数系．参见本书第八章．

(2) 数轴：规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴．

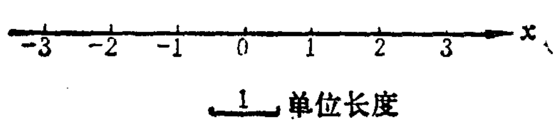

图　1-1

实数集合和数轴上点的集合是一一对应的．数轴上任一点对应的数总大于该点左边任一点所对应的数．

(3) 相反数和倒数：只有符号不同的两个数，叫做互为相反数，零的相反数是零．1除以某数的商叫这个数的倒数，零没有倒数．

(4) 绝对值：一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零．即，

$$|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0),\\ -a & (a<0).\end{cases}$$

从数轴上看，一个数的绝对值就是表示这个数的点离开原点的距离。

2. 实数的运算

(1) 基本运算

实数可进行加、减、乘、除、乘方等运算，对非负实数还可进行开方运算．实数加、减、乘、除(除数不为零)、乘方的结果仍是实数．任何实数都可以开奇次方，结果仍是实数，只有非负实数，才能开偶次方，其结果仍是实数．

(2) 运算定律：设 a、b、c 为任意实数，则有：

运算律	加法	乘法
交换律	$a+b=b+a$	$a\cdot b=b\cdot a$
结合律	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
分配律	$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$	

(3) 运算顺序

在同一个式子里，先乘方、开方，然后乘、除，最后加、减．有括号时，由最里层的括号算起，逐层去掉括号．

二、式

1. 代数式及其分类

代数式是由运算符号(加、减、乘、除、乘方、开方)把数或表示数的字母连结而成的式子．

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\ \text{多项式}\end{cases}\\ \text{分式}\end{cases}\\ \text{无理式}\end{cases}$$

2. 整式

(1) 整式的有关概念：由数与字母相乘形成的代数式，叫做**单项式**；几个单项式的和叫做**多项式**；单项式和多项式统称整式．

(2) 整式的运算

整式能进行加、减、乘的运算．整式加、减、乘的结果仍是整式．整式可以进行带余除法的运算．

幂的运算法则为：

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n},$$
$$a^m\div a^n=a^{m-n}\quad(a\neq 0,\ m>n),$$
$$(a^m)^n=a^{mn},$$

$$(ab)^n=a^nb^n.$$

常用的乘法公式有:

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2,$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2,$$

$$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3,$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3.$$

(3) 多项式的因式分解：就是把一个多项式化为几个整式的积. 常用的方法有：提公因式法;公式法;分组分解法;十字相乘法;求根公式法等.

3. 分式　设 A、B 表示两个整式,如果 B 中含有字母,式子 $\frac{A}{B}$ 就叫做**分式**(注意分母 B 的值不能为零,否则分式没有意义). 分子与分母没有公因式的分式,叫**最简分式**.

(1) 分式的基本性质

$$\frac{A}{B}=\frac{A\times M}{B\times M},\ \frac{A}{B}=\frac{A\div M}{B\div M}\quad (M\text{为不等于零的整式}).$$

(2) 分式的运算

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\pm\frac{bc}{bd}=\frac{ad\pm bc}{bd};$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd};$$

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

4. 二次根式

(1) 二次根式的有关概念

正数 a 的正的平方根,叫做 a 的**算术平方根**. 零的平方根是零. 式子 $\sqrt{a}\ (a\geqslant 0)$ 叫做**二次根式**.

$$(\sqrt{a})^2=a\quad (a\geqslant 0);$$

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (a\geqslant 0),\\ -a & (a<0).\end{cases}$$

被开方数的每一个因式的指数都小于 2,被开方数不含分母的二次根式,叫**最简二次根式**;被开方数相同的二次根式,叫**同类二次根式**.

(2) 二次根式的运算

二次根式的加减：先把各根式化为最简根式,再合并同类根式;

二次根式的乘除：按下列性质进行

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\quad(a\geqslant0,b\geqslant0),$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\quad(a\geqslant0,b>0).$$

(3) 分母有理化：如果被开方数是一个分式(或分数)，用一个适当的代数式同乘分子与分母，使分母成为完全平方式，再开方，移到根号外从而化去根号内的分母的过程，叫分母有理化.

三、方程和方程组

1. 方程：含有未知数的等式叫做**方程**. 能使方程左右两边相等的未知数的值，叫做方程的**解**.

(1) 同解原理

(i) 方程的两边都加上(或都减去)同一个数或同一个整式，所得方程与原方程是同解方程.

(ii) 方程的两边都乘以(或都除以)不等于零的同一个数，所得方程与原方程是同解方程；

(2) 一元一次方程

形如 $ax+b=0(a\neq0)$ 的方程，叫做一元一次方程. 它的解为：$x=-\frac{b}{a}$.

(3) 一元二次方程

方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 叫做一元二次方程.

(i) 求根公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

(ii) 判别式

$$\triangle=b^2-4ac.$$

当$\triangle>0$ 时，方程有两个不相等的实数根；

当$\triangle=0$ 时，方程有两个相等的实数根；

当$\triangle<0$ 时，方程没有实数根.

(iii) 根与系数的关系(韦达定理)

如果 α,β 是方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两个根，则有

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},$$

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

反过来，如果有

$$\alpha+\beta=p,$$

$$\alpha\beta=q,$$

则 $x^2-px+q=0$ 是以 α,β 为根的一元二次方程.

2. 方程组

(1) 一次方程组：由几个一次方程组成并含有两(三)个未知数的方程组，叫做二(三)元一次方程组.

二元一次方程组的解法有：代入消元法；加减消元法等.

三元一次方程组的解法是用代入消元法或加减消元法，通过“消元”使其转化为二元一次方程组来解.

(2) 简单的二元二次方程组

形如：$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 的方程叫做二元二次方程.

由一个二元二次方程和一个二元一次方程，或由两个二元二次方程组成的方程组，叫做二元二次方程组.

由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的二元二次方程组，可用代入法来解；由两个二元二次方程组成的方程组只限于解几种特殊的类型.

【复习要求】

一、理解有理数、实数及数轴、相反数、绝对值、算术平方根的概念，会熟练地进行有关计算.

1. 理解什么叫有理数、实数及数轴、相反数、绝对值、算术平方根. 知道有理数、实数之间的关系；会进行实数大小的比较；会求一个数的相反数；会求一个数的绝对值. 知道算术平方根一定是非负数.

2. 会熟练地进行实数的加、减、乘、除、乘方的运算. 会进行非负实数的开方的运算.

二、理解有关整式、分式的概念，会进行有理式的加、减、乘、除、乘方的运算.

1. 理解什么叫单项式、多项式、整式、分式. 对给定的有理式会判断它是整式还是分式.

2. 能熟练地进行整式的四则运算，灵活运用幂的运算法则及乘法公式.

3. 掌握常用的多项式因式分解的方法.

4. 能熟练运用分式的基本性质，对分式进行四则运算.

三、理解二次根式的有关概念，掌握二次根式的性质，会进行二次根式的化简和运算.

1. 理解二次根式的定义，在运算时能灵活运用有关的性质.

2. 在对根式进行化简与运算时，会将一个二次根式化成最简根式；会对二次根式进行四则运算；会利用分母有理化进行除法运算.

四、会解一元一次方程、一元二次方程，能灵活运用一元二次方程根的判别式以及根与系数的关系解决有关问题.

1. 会用方程的同解原理，熟练地解一元一次方程.

2. 会熟练运用一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的求根公式并会用因式分解法和配方法求一元二次方程的解. 会根据判别式 $\triangle=b^2-4ac$ 的值判断方程实根的个数；会灵活运用根与系数的关系解有关问题.

五、会解有唯一解的二元一次方程组、三元一次方程组；会解由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的方程组；会解简单的两个二元二次方程组成的方程组.

1. 掌握代入消元法和加减消元法，通过"消元"来求二元一次方程组、三元一次方程组的唯一解.

2. 会用代入消元法解由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的方程组；会解某几种特殊类型的由两个二元二次方程组成的方程组（用加减消元法可以消去某个未知数的，可以消去二次项的，以及至少有一个方程可以分解成两个一次方程的）.

【例题】

例 1 把下列各数在数轴上表示出来；其中哪些数是有理数？写出它们的相反数和倒数.

$$3.14,\ \pi,\sqrt{3},8^{\frac{1}{2}},(-8)^{\frac{1}{3}},-\lg 1.$$

分析：根据实数与数轴上点的一一对应的关系，即可在数轴上把这些数表示出来；根据一个数的相反数就是在这个数前面加一负号，0 的相反数是 0，可分别写出这些数的相反数；根据 a $(a\neq 0)$ 的倒数是 $\frac{1}{a}$，这样就可分别写出它们的倒数.

解： 题中所列各数中，$8^{\frac{1}{2}}$ 即 $\sqrt{8}\approx 2.828$，$(-8)^{\frac{1}{3}}$ 即 $\sqrt[3]{-8}=-2$，$-\lg 1=0$（1 的常用对数为 0）. 题中所列各数在数轴上表示如下.

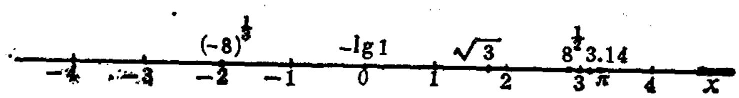

图 1-2

各数中是有理数的：

$$3.14,(-8)^{\frac{1}{3}},-\lg 1.$$

各数的相反数分别为：$-3.14,-\pi,-\sqrt{3},-8^{\frac{1}{2}},8^{\frac{1}{3}},\lg 1.$

由于 $-\lg 1=0$，因此 $-\lg 1$ 没有倒数、而其余各数的倒数分别为：

$$\frac{1}{3.14},\ \frac{1}{\pi},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{8^{\frac{1}{2}}},\ \frac{1}{(-8)^{\frac{1}{3}}}=-\frac{1}{2}.$$

例 2 选择题（每小题中只有一个结论是正确的，把正确结论的代号写在题中的括号内）：

$\sqrt{a}-1$ 的绝对值为（ ）

(A) $\sqrt{a}-1$.　　(B) $1-\sqrt{a}$.

(C) 0.　　(D) $a\geqslant 1$ 时，为 $\sqrt{a}-1$；$0\leqslant a<1$ 时，为 $1-\sqrt{a}$.

分析：　∵ $a\geqslant 1$ 时，$\sqrt{a}-1\geqslant 0$；

$0\leqslant a<1$ 时，$\sqrt{a}-1<0$.

$$\therefore\quad |\sqrt{a}-1|=\begin{cases}\sqrt{a}-1 & (a\geqslant 1),\\ 1-\sqrt{a} & (0\leqslant a<1).\end{cases}$$

答：D.

注意 计算含字母的式子的绝对值时，要根据绝对值的定义，按字母不同取值范围来考虑.

例 3 说明下列等式成立各是根据什么运算律：

(1) $x\cdot 3=3\cdot x$;

(2) $(5+x)+2x=3x+5$;

(3) $5\cdot(x+2)=5x+10$.

答：(1) 乘法交换律；

(2) 由于$(5+x)+2x=5+(x+2x)$是根据加法结合律，$5+(x+2x)=(x+2x)+5$是根据加法交换律，$x+2x=3x$是根据分配律，所以原等式成立的根据是加法结合律、加法交换律和分配律；

(3) 分配律.

例 4 计算

(1) $(ab-1)^2(a^2b^2+ab+1)^2$;

(2) $(a-b+c-d)(a-b-c+d)$.

分析：多项式相乘时，一般的方法是先用多项式的每一项乘以另一个多项式的每一项，再把所得积相加，最后化成最简结果. 但计算过程中如能应用公式，要尽量使用. 比如(1)式可变形为$[(ab-1)(a^2b^2+ab+1)]^2$，然后用公式$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$；(2)式可变形为$[(a-b)+(c-d)]\cdot[(a-b)-(c-d)]$，然后利用公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

解：(1) 原式$=[(ab-1)(a^2b^2+ab+1)]^2$

$$=(a^3b^3-1)^2$$

$$=a^6b^6-2a^3b^3+1.$$

(2) 原式$=[(a-b)+(c-d)][(a-b)-(c-d)]$

$$=(a-b)^2-(c-d)^2$$

$$=a^2+b^2-c^2-d^2-2ab+2cd.$$

注意 (1) 在应用公式时，公式中的字母，可以用数或字母，也可以用代数式来代换，但相同的字母代换要相同. 如本题(1)中，是把ab和1分别代换公式$(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$中的$a$和$b$；在本题(2)中，是把$(a-b)$和$(c-d)$分别代换公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$中的$a$和$b$.

(2) 括号前是“+”号，去(或添)括号，括号内各项不变号；括号前是“−”号，去(或添)括号，括号内各项都变号.

例 5 把下列各式分解因式：

(1) $axz-3byz-3ayz+bxz$;

(2) $a^3b-2a^2b^2+ab^3$;

(3) x^2-y^2+2y-1;

(4) x^6-y^6;

(5) $x^2-6x-16$;

(6) $x^2-4xy+4y^2-6x+12y+8$.

分析：对多项式进行因式分解，常用的方法有：提公因式法；公式法，如平方差公式，完全平方公式，立方和与立方差公式等；可化为 $x^2+(a+b)x+ab$ 型的二次三项式的因式分解，因为 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$；十字相乘法；分组分解法等.

比如(1)式可先提取公因式，再适当分组；(2)式可先提取 ab，再应用公式；(3)式分组后，再应用公式；(4)式可先化成 $(x^3)^2-(y^3)^2$ 或 $(x^2)^3-(y^2)^3$ 再分解；(5)式中常数项 -16 可以分解成 -8 与 2 的积，且 $-8+2=-6$ 等于一次项的系数，故可用化成 $x^2+(a+b)x+ab$ 型的因式分解方法，也可以用十字相乘法；(6)式可先适当分组，再应用十字相乘法.

解：(1) 原式 $=z(ax-3by-3ay+bx)$

$$=z[(ax+bx)-(3ay+3by)]$$

$$=z[x(a+b)-3y(a+b)]=z(a+b)(x-3y);$$

(2) 原式 $=ab(a^2-2ab+b^2)=ab(a-b)^2$;

(3) 原式 $=x^2-(y^2-2y+1)=x^2-(y-1)^2=(x+y-1)(x-y+1)$;

(4) 原式 $=(x^3)^2-(y^3)^2=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$

$$=(x+y)(x-y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2);$$

或原式 $=(x^2)^3-(y^2)^3=(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$

$$=(x+y)(x-y)[x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2]$$

$$=(x+y)(x-y)[(x^2+y^2)^2-x^2y^2]$$

$$=(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2);$$

(5) 原式 $=x^2+(-8+2)x+(-8)\times 2=(x-8)(x+2)$,

或由十字相乘法得

$$\begin{array}{ccc}1 & & 2\\ & \times & \\ 1 & & -8\end{array}$$

原式 $=(x-8)(x+2)$;

(6) 原式 $=(x^2-4xy+4y^2)-(6x-12y)+8$

$$=(x-2y)^2-6(x-2y)+8$$

$$=(x-2y-2)(x-2y-4).$$

注意 因为需要分解因式的多项式是多种多样的，所以必须对具体情况作具体分析，灵活运用各种方法来分解因式.

例 6 计算 $\left(1-\dfrac{x}{x+1}\right)-\dfrac{x+3}{x^2-1}\div\left(\dfrac{6x+2}{x^2-2x+1}+1\right)$.

解: 原式$=\dfrac{x+1-x}{x+1}-\dfrac{x+3}{x^2-1}\div\dfrac{6x+2+x^2-2x+1}{x^2-2x+1}$

$$=\frac{1}{x+1}-\frac{x+3}{(x+1)(x-1)}\div\frac{x^2+4x+3}{x^2-2x+1}$$

$$=\frac{1}{x+1}-\frac{x+3}{(x+1)(x-1)}\div\frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{1}{x+1}-\frac{x+3}{(x+1)(x-1)}\times\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x+3)}$$

$$=\frac{1}{x+1}-\frac{x-1}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{2}{(x+1)^2}.$$

注意 运算时要先计算括号内的,然后依运算顺序进行计算.

例 7 化简:

(1) $\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}$;

(2) $1-\sqrt{x^2-1}+\dfrac{2\sqrt{x+1}+4\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$;

(3) $\sqrt{8}+\sqrt{50}-\sqrt{32}$;

(4) $\left(1-\sqrt{\dfrac{n}{m}}\right)(m+\sqrt{mn})\quad(m>0,n\geqslant 0)$.

解: (1) 原式$=\dfrac{2(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)}$

$$=\frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)}{3-2-1+2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-2+\sqrt{2}}{2};$$

注意 在化简时,有时要多次用到二次根式的分母有理化.

(2) 原式$=1-\sqrt{x^2-1}+\dfrac{(2\sqrt{x+1}+4\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}$

$$=1-\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}[2(x+1)-4(x-1)+2\sqrt{x^2-1}]$$

$$=1-\sqrt{x^2-1}+(x+1)-2(x-1)+\sqrt{x^2-1}$$
$$=4-x;$$

(3) 原式$=2\sqrt{2}+5\sqrt{2}-4\sqrt{2}=3\sqrt{2}$;

(4) 原式$=\left(1-\sqrt{\dfrac{n}{m}}\right)m+\left(1-\sqrt{\dfrac{n}{m}}\right)\sqrt{mn}$
$$=m-\sqrt{mn}+\sqrt{mn}-n$$
$$=m-n.$$

例 8 x 取何值时下列等式成立?

(1) $\sqrt{(x-8)^2}=x-8$;

(2) $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}$;

(3) $\sqrt{\dfrac{x-2}{3-x}}=\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3-x}}$.

解: (1) $\because\sqrt{(x-8)^2}=|x-8|$,要使$|x-8|=x-8$,必须而且只需$x\geqslant8$.

$\therefore$ 当 $x\geqslant8$ 时原等式成立.

(2) $\because$ $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{(x-1)\cdot(x+1)}$.

$\therefore$ 要使$\sqrt{(x+1)(x-1)}=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}$,必须而且只需 $x+1\geqslant0$, $x-1\geqslant0$ 同时成立. 当且仅当 $x\geqslant1$ 时,两式同时成立. 所以当 $x\geqslant1$ 时原等式成立.

(3) 若$\sqrt{\dfrac{x-2}{3-x}}=\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3-x}}$, 当且仅当 $x-2\geqslant0$, $3-x>0$ 同时成立. 即 $2\leqslant x<3$ 时, 原等式成立.

例 9 解方程:

(1) $x-\dfrac{1}{3}\left[x-\dfrac{1}{4}\left(x-1\dfrac{1}{3}\right)\right]-\dfrac{3}{2}=2\left(x+\dfrac{3}{4}\right)$;

(2) $(x-a)^2=(x-b)^2$;

(3) $2|x-1|-1=0$;

(4) $|2x+1|+|x-1|=6$;

(5) $m^2(x^2-x)-mx^2+m=m^2(x-1)-x$, 求 x.

解: (1) $x-\dfrac{1}{3}\left(x-\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{3}\right)-\dfrac{3}{2}=2x+\dfrac{3}{2}$,

$$x-\frac{1}{3}\left(\frac{3x}{4}+\frac{1}{3}\right)-\frac{3}{2}=2x+\frac{3}{2},$$

$$x-\frac{1}{4}x-\frac{1}{9}-\frac{3}{2}=2x+\frac{3}{2},$$

两边同乘以分母的最小公倍数 36,得

$$36x-9x-4-54=72x+54.$$

移项，合并后得

$$-45x=112.$$

$\therefore\quad x=-2\frac{22}{45}.$

(2) $x^2-2ax+a^2=x^2-2bx+b^2,$

$\therefore\quad 2(a-b)x=a^2-b^2.$

当 $a\neq b$ 时，$x=\frac{a+b}{2}.$

当 $a=b$ 时，方程有无限多个解.

注意 未知数 x 前有字母系数时，要对该系数进行讨论.

(3) 当 $x-1\geqslant 0$，即 $x\geqslant 1$ 时，原方程为

$$2(x-1)-1=0.$$

$\therefore\quad x=\frac{3}{2}.$

当 $x-1<0$，即 $x<1$ 时，原方程为

$$-2(x-1)-1=0.$$

$\therefore\quad x=\frac{1}{2}.$

$\therefore$ 原方程的解为$\frac{3}{2}$或$\frac{1}{2}$.

(4) 当 $x=-\frac{1}{2}$时，$2x+1=0$；$x=1$ 时，$x-1=0$.

由于 $x<-\frac{1}{2}$时，$2x+1<0$ 且 $x-1<0$.

故原方程为 $-(2x+1)-(x-1)=6.$

$\therefore\quad x=-2.$

由于$-2<-\frac{1}{2}$，故-2是方程的解

当$-\frac{1}{2}\leqslant x<1$ 时，$2x+1\geqslant 0$ 且 $x-1<0$.

故原方程为 $2x+1-(x-1)=6,$

$\therefore\quad x=4.$

而 $x=4$ 不能使$-\frac{1}{2}\leqslant x<1$ 成立，故 4 不是原方程的解.

当 $x\geqslant 1$ 时，$2x+1>0$ 且 $x-1\geqslant 0$.