程序编制方法

数字程序控制线切割机

宋建川编著

数字程序控制线切割机

程序编制方法

宋建川 编著

*

江苏科学技术出版社出版
江苏省新华书店发行
常州人民印刷厂印刷
1978年9月第1版
1978年9月第1次印刷
印数：1—34,000册
书号：15196·005 定价：0.38元

序

数字程序控制线切割机的使用和推广，促使了各种各样编程方法的出现。有手编程序方法，也有程序编制自动化语言，目的均在克服编程困难，提高编程效率。目前，在一般工业城市和工厂使用程序自动化语言的物质条件尚不具备，因此大量使用着的还是手编程序方法。本书只介绍此种方法。

由于机种不一，编程方法又正竞相出现，各执一是，一本小书难于面面俱到，因此本书只能就一个机种，一种方法给予系统的介绍。根据我们的体会，如果能掌握书中叙述的方法，那么其他方法也不难了解，因为它们的理论基础是相同的。

文中介绍的方法是在解析几何基础上形成的，其特点是根据图纸标注尺寸直接建立曲线方程，把计算归结为两种方程组，然后利用台式电子计算机解方程组算出结果。这样就使得编制程序的过程规范化，容易掌握，使用便利，而且精度高，从而提高了手编程序的效率。这个方法虽然是对复旦型数字程序控制线切割机讲的，但是对于其他类型线切割机和属轮廓控制的二坐标数控机床的程序编制同样有效，而且不难看出，在一般工程计算中采用此法亦远比用三角法简便。

本书第三章介绍了非圆曲线切割的编程方法。虽然此类问题可用三次样条插值得到一条二阶光滑曲线，但是由于要解线性方程组，计算繁复，在台式计算机上实现比较困难，因

此本书采用由差商插值多项式引出分段三次插值多项式，给出了一阶光滑曲线。为了照顾具有初中文化程度读者能读懂，对叙述方法作了一些改变。

这些材料于73年在常州市牵引电机厂线切割机使用过程中产生，并在常州市机械工人业余大学学员计算实习的基础上于75年总结成文，现修订成此书。由于我们实践面狭隘，水平有限，很可能是一孔之见，一得之功，不完整和错误之处在所难免，祈读者不吝指正。

宋建川

1978年1月

目　　次

第一章　基础部分

§1　向量的概念

在生产技术和科学实验中经常遇到各种不同性质的量，例如温度、密度、质量、功率、位移、速度、加速度、力等等。其中前面四种量具有这样的特点：在选定一定的量度单位后，它们均可由一个数来表示。当我们选定摄氏温标后，温度就由度数确定；当我们选定质量单位克后，物体质量就由克数确定。总之，对应于确定的量度单位，只要用一个数就能将这些量表达出来，这样的量叫做数量。后面四种量的特点则不是这样。例如，光说某个力为5公斤是不够的，因为我们知道，向左的5公斤力与向右的5公斤力作用于物体产生的运动效果是不同的，所以5公斤这个数值不足以完全表达力这个量的特点，还必须说出力在空间的方向。一般，象力那样，需由其大小及在空间的方向才能完全表达出来的量，我们将它们叫做向量或矢量。

向量不仅有大小之分，而且还有方向之别，因此要将向量表示出来就必须同时反映出它的大小和方向。我们可以用几何作图来表示向量，也可以用坐标法来表示向量。下面仅对平面向量给以说明。

向量的几何作图表示：在平面上取两点O和A，以O到A的指向表示向量的方向，线段OA的长度表示向量的大小，并以符号$\overrightarrow{OA}$记之，或以粗体字母$\mathbf{OA}$记之。O叫做向量

OA的起点，A叫做向量OA的终点。有时也用普通小写字母加箭头$\vec{a}$，或用粗体小写字母 **a** 来表示向量（见图1-1）。

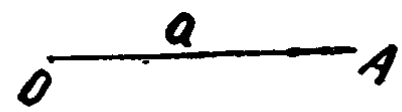

图 1 — 1

考察线切割机切割斜线的情形。由于钼丝对于工件具有一定的运动方向，所以斜线可以看成向量，切割一条斜线就相当于切割一个向量。在实际生产中用同一条斜线程序切割出来的斜线被认为是相同的，而且钼丝可以在工件不同位置上开始切割。这表明斜线向量可以平行移动至平面的任何位置。因此，在以后的讨论里，我们把大小相等、互相平行而具有同指向的向量看作是相等的。由此，一个向量的几何图形可以自由地平移，甚至为了一定的目的，我们将把几个向量的起点都移到平面的同一个点上。

表示向量大小的数值叫做向量的模。向量 OA 的模记为|OA|，或可记为$|\overrightarrow{OA}|$，$|\vec{a}|$，|**a**|。

向量的坐标表示法：在平面上引进直角坐标系 oxy（图1-2）。由于向量 **a** 可以平移，我们将 **a** 的起点平移至坐标原点O。假定向量 **a** 的终点是A，并设A的坐标为（a_x，a_y）。很明显，向量 **a** 完全决定了数组（a_x，a_y），反过来由数组(a_x，a_y)可以决定点A，从而完全决定了向量 **a**（起点为O点，终点为A）。这样，向量 **a** 和数组(a_x，a_y)可互相转化，因此，在这种条件下它们是同一的。

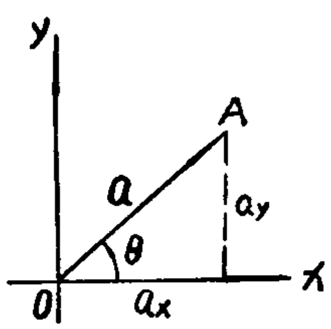

图 1 — 2

将这种情形表示为

$$\mathbf{a} = \{ a_x, a_y \}。$$

a_x 和 a_y叫做向量 **a** 的坐标。这就是向量的坐标表示。

由熟知的勾股定理，有

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}\ ,$$

而根据三角函数的定义，有

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a_y}{a_x}\ 。$$

前一式表示了应怎样由坐标确定向量的大小，后一式则表示了怎样由坐标确定向量的方向。

上述向量的坐标表示或许会使我们感觉抽象。实际上在线切割机上切割斜线的过程很好地体现着这一看法。我们知道，为了要切割一条斜线，只需知道斜线终点对于起点的坐标。即要确定作为斜线的向量，只要确定它的终点在以起点为原点的坐标系中的坐标。向量的坐标表示正是这种做法的抽象反映。

§2　量的加减和数乘

与数量一样，我们经常需要对向量进行运算。例如在线切割机上，设 x 拖板向正向匀速移动 30mm，同时 y 拖板向正向匀速移动了 40mm，这时钼丝就切割出一条 50mm 长的斜线（见图1—3）。这个斜线向量 $\mathbf{a}$ 是 x 拖板的位移向量 $\mathbf{X}$ 与 y 拖板位移向量 $\mathbf{Y}$ 合成的，并且是以 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 为边的平行四边形的对角线。

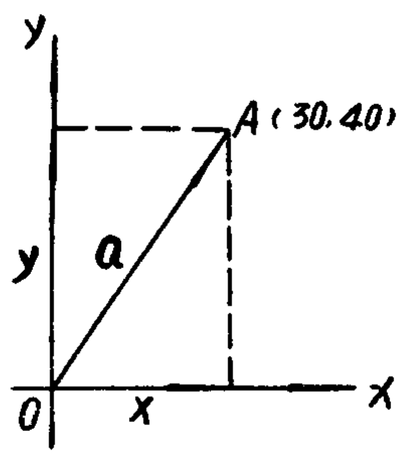

图 1—3

又如力的合成，速度的合成等等都有类似的情况。我们把向量这

种按平行四边形合成的规则叫做向量的加法。

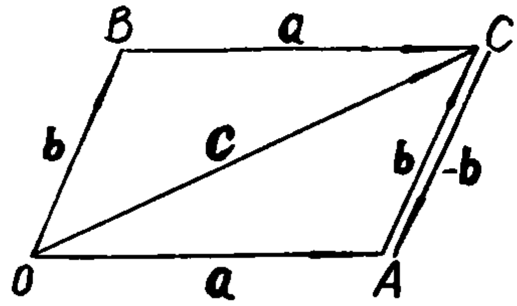

图1—4

设$\mathbf{OA}=\mathbf{a}$，$\mathbf{OB}=\mathbf{b}$（图1—4）。以$\mathbf{OA}$和$\mathbf{OB}$为边作一平行四边形$OACB$，取对角线向量$\mathbf{OC}$，记$\mathbf{OC}=\mathbf{c}$。向量$\mathbf{c}$叫做向量$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$的和，写为

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}。$$

用平行四边形的对角线来确定向量之和的方法叫做向量加法的平行四边形规则。

由于$\mathbf{b}=\mathbf{OB}=\mathbf{AC}$，因此我们还可以这样来作出两个向量的和：将向量$\mathbf{b}$的起点平移到向量$\mathbf{a}$的终点上，这时以$\mathbf{a}$的起点作为起点，以$\mathbf{b}$的终点作为终点的向量就是$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$的和。这个方法叫做向量加法的三角形规则。三角形规则和平行四边形规则其实是相同的。

由图1—4可见

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a} \qquad \text{（加法交换律）。}$$

由图1—5可见

$$\mathbf{OC}=\mathbf{OA}+\mathbf{AC}=\mathbf{OA}+(\mathbf{AB}+\mathbf{BC})=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}),$$

而

$$\mathbf{OC}=\mathbf{OB}+\mathbf{BC}=(\mathbf{OA}+\mathbf{AB})+\mathbf{BC}=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c},$$

由此

$$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} \qquad \text{（加法结合律）。}$$

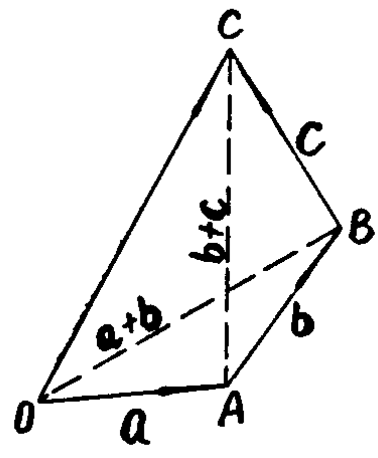

图1—5

若向量的模为0，则向量退缩为

一个点，因而无方向可言，这样的向量叫做零向量，记为**0**。显然

$$\mathbf{a}+\mathbf{o}=\mathbf{a}$$

与向量 **a** 的模相等，方向相反的向量叫做 **a** 的逆向量或反向向量，记为 $-\mathbf{a}$（见图 1—6）。

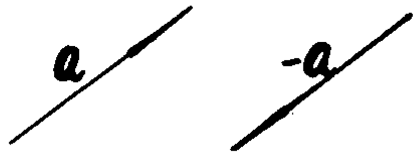

图 1—6

显然 $-(-\mathbf{a})=\mathbf{a}$。

由图 1—4 可见

$$\mathbf{c}+(-\mathbf{b})=\mathbf{a},$$

这个式子相当于将等式 $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$ 里的向量 **b** 变号移至另一端，因此仿照数量代数的移项规则，这个式子常常写成

$$\mathbf{c}-\mathbf{b}=\mathbf{a},$$

即

$$\mathbf{c}-\mathbf{b}=\mathbf{c}+(-\mathbf{b})。$$

于是两个向量之差的含义就是被减向量与减项向量逆向量之和。两个向量相减转化为相加，这同数量代数中关于减法的解释完全一样，所以向量减法和加法并没有根本的差别。

显然

$$\mathbf{a}-\mathbf{a}=\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{o}。$$

现在我们再来讨论向量的另一种运算——向量的数乘运算，即向量与数量的乘法运算。

向量 **a** 与数 λ 的乘积 λ**a** 究竟是什么意思呢？首先看一看下面的例子。

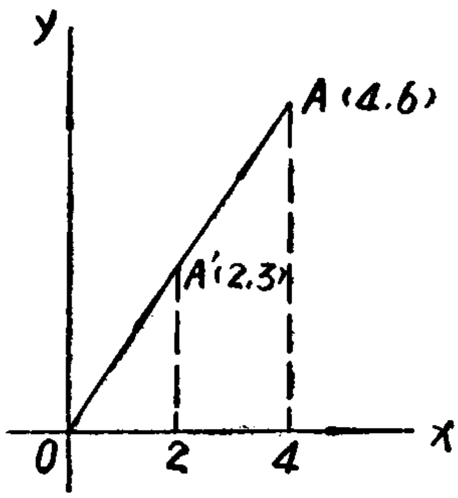

图 1—7

如图 1—7 所示，设点 A 的坐标为 $a_x=4\text{mm}$，$a_y=6\text{mm}$，则

斜线向量 **OA** 的切割程序为

$B\,4000\quad B\,6000\quad B\,006000\quad GY\quad L_1$。

根据编程规则，这个程序还可改为

$B\,2000\quad B\,3000\quad B\,006000\quad GY\quad L_1$。

我们从这个转换可以引出什么样的结论呢？按理，将向量 **OA** 的坐标 4mm 和 6mm 乘以数 $\frac{1}{2}$，应该得到一个以 2mm 和 3mm 为坐标的向量 **OA′**（见图1-7）。明显地，**OA′** 与 **OA** 同方向。所以当计数长度（表示着斜线向量的模）未变，程序 $B2000\ B3000\ B006000\ Gy\ L_1$ 还是切割出向量 **OA** 。如果将计数长度（模）也乘以 $\frac{1}{2}$，那么程序 $B2000\quad B3000\quad B003000\quad Gy\ L_1$ 恰好给出了斜线向量**OA′**。因此，我们把由向量**OA**转化为向量 **OA′** 的这一过程看成是对向量的一种运算——向量 **OA** 乘以数 $\frac{1}{2}$ 的数乘运算，即 $\frac{1}{2}$ **OA** 仍然是一个向量，其方向与 **OA** 相同，而模为 $\frac{1}{2}|\mathbf{OA}|$。显然，这个向量就是**OA′**，即 $\mathbf{OA}'=\frac{1}{2}\mathbf{OA}$。

将上面的情形加以推广，便有向量乘以数的数乘运算定义：

如果数 $\lambda>0$，则 $\lambda\mathbf{a}$ 表示一个向量，其方向与 **a** 相同，模为 $\lambda|\mathbf{a}|$；如果数 $\lambda<0$，则 $\lambda\mathbf{a}$ 表示一个向量，其方向与 **a** 相反，模为 $-\lambda|\mathbf{a}|$；如果 $\lambda=0$，则 $\lambda\mathbf{a}=0\mathbf{a}=\mathbf{0}$。

由数乘定义，不难直接验证

$$(m+n)\mathbf{a}=m\mathbf{a}+n\mathbf{a}, \qquad (1\cdot2\cdot1)$$

$$m(n\mathbf{a})=(nm)\mathbf{a}=n(m\mathbf{a}), \qquad (1\cdot2\cdot2)$$

而且由图 1—8 还可以看出

$$m(\mathbf{a}+\mathbf{b})=m\mathbf{a}+m\mathbf{b}。 \qquad (1\cdot2\cdot3)$$

若向量 $\mathbf{a}_0$ 的模 $|\mathbf{a}_0|=1$，且方向与 $\mathbf{a}$ 相同，则 $\mathbf{a}_0$ 叫做 $\mathbf{a}$ 的单位向量。由上述向量数乘的定义，有

$$\mathbf{a}=|\mathbf{a}|\mathbf{a}_0。\quad (1\cdot2\cdot4)$$

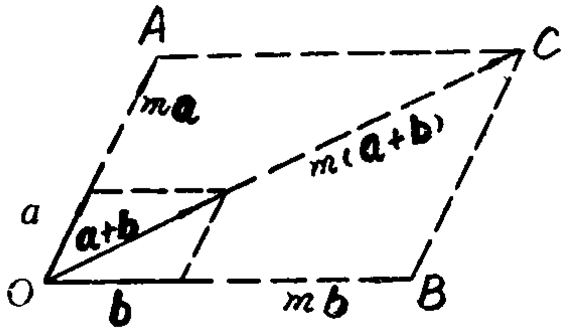

图1—8

设 $\mathbf{a}=\{a_x、a_y\}$，$\mathbf{i}$ 为 x 轴正向单位向量，$\mathbf{j}$ 为 y 轴正向量单位向量，则由式(1·2·4)(见图1-9)

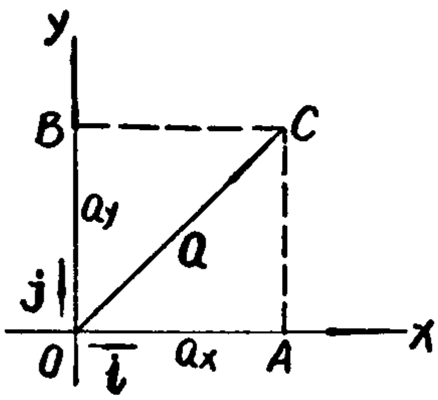

图1—9

$$\mathbf{OA}=|\mathbf{OA}|\ \mathbf{i}=a_x\mathbf{i},$$

$$\mathbf{OB}=|\mathbf{OB}|\ \mathbf{j}=a_y\mathbf{j}。$$

由此

$$\mathbf{a}=\{a_x,a_y\}=\mathbf{OA}+\mathbf{OB}$$

$$=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}。\quad (1\cdot2\cdot5)$$

这个表达式叫做向量 $\mathbf{a}$ 关于单位向量 $\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$ 的分解式。利用这个分解式，向量的加减，向量的数乘运算均可转化为数量运算：

设 $\mathbf{a}=\{a_x,a_y\}$，$\mathbf{b}=\{b_x,a_y\}$，则

$$\mathbf{a}\pm\mathbf{b}=\{a_x\pm b_x,\ a_y\pm b_y\};$$

$$\lambda\mathbf{a}=\{\lambda a_x,\ \lambda a_y\}。$$

事实上，根据(1·2·1)，(1·2·2)，(1·2·3)，我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\pm\mathbf{b}&=(a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j})\pm(b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j})\\&=(a_x\mathbf{i}\pm b_x\mathbf{i})+(a_y\mathbf{j}\pm b_y\mathbf{j})\\&=(a_x\pm b_x)\mathbf{i}+(a_y\pm b_y)\mathbf{j}\\&=\{a_x\pm b_x,\ a_y\pm b_y\},\end{aligned}$$

$$\lambda \mathbf{a} = \lambda(a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}) = \lambda(a_x \mathbf{i}) + \lambda(a_y \mathbf{j})$$
$$= (\lambda a_x)\mathbf{i} + (\lambda a_y)\mathbf{j} = \{\lambda a_x, \lambda a_y\}$$

【例1】 设点A的坐标为$(-1,2)$，点B的坐标为$(4,3)$。现需加工从A到B的斜线，程序应如何编制？（不考虑钼丝补偿）

【解】 加工从A到B的斜线，编制程序的关键在于确定B在以A为原点的坐标系中的坐标，也就是$\mathbf{AB}$的坐标。

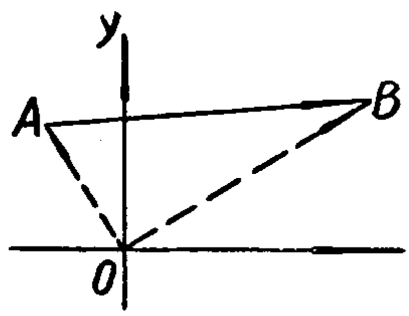

图 1—10

由图 1-10

$$\mathbf{OA} = \{-1, 2\},$$
$$\mathbf{OB} = \{4, 3\},$$

于是

$$\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA} = \{4-(-1), 3-2\} = \{5, 1\}。$$

将这个问题一般化，即已知A的坐标为$\{x_1, y_1\}$，B的坐标为$\{x_2, y_2\}$，求向量$\mathbf{AB}$。按例1的同样分析，得

$$\mathbf{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}。\qquad (1\cdot2\cdot6)$$

这就是说，要编出斜线$\mathbf{AB}$的程序，只要知道A和B在同一个坐标系里的坐标，而且斜线的坐标值分别等于终点B与起点A的同名坐标值之差。这一结论希望读者细心体会，因为在以后的编程计算里常常要用到它。

顺便提一提，由上式及§1关于由坐标表达模的公式，有

$$|\mathbf{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}。$$

这个式子就是两点之间的距离公式。

【例2】 若$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$平行，试确定它们坐标之间应该满足的

关系。

【解】 设 $\mathbf{a}=\{a_x, a_y\}$，$\mathbf{b}=\{b_x, b_y\}$，由于 $\mathbf{a}$ 平行于 $\mathbf{b}$，则由向量数乘的定义，必定能找一个数 λ，使

$$\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}\ 。$$

由此

$$\{a_x,\ a_y\}=\{\lambda b_x,\ \lambda b_y\}\ ,$$

或

$$a_x=\lambda b_x,\ a_y=\lambda b_y\ 。$$

最后得

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\lambda\ 。$$

所以若向量相互平行，那么它们的坐标成比例；反之亦然，即若两个向量的坐标成比例，那么它们必定互相平行。

【例3】 设圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的半径为 $R5$，起点 $A(-3,4)$，终点 $B(1,4.899)$。为了切割出圆弧 $\overset{\frown}{AB}$，必须考虑钼丝补偿。如果钼丝在圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 外面进行切割(见图 1-11)，那么应该计算 A' 和 B' 的坐标。现在我们来解决这个问题。

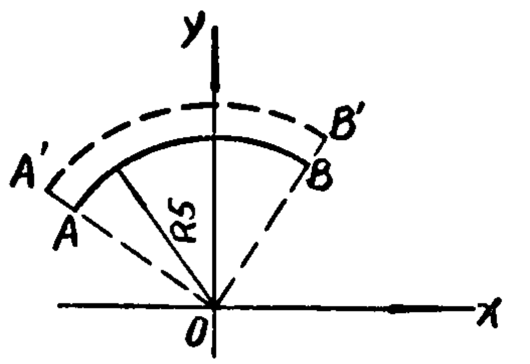

图 1—11

假定钼丝补偿半径为 0.06。要求出点 A' 的坐标，无异是要确定向量 $\mathbf{OA'}$ 的坐标，已知的条件是 $|\mathbf{OA'}|=5.06$，而且平行于向量 $\mathbf{OA}=\{-3,4\}$。

由 (1·2·4)，向量 $\mathbf{OA}$ 的单位向量

$$\mathbf{a}_0=\frac{1}{|\mathbf{OA}|}\mathbf{OA}=\left\{-\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right\}\ 。$$

因为 $\mathbf{a}_0$ 也是 $\mathbf{OA'}$ 的单位向量，所以

$$\mathbf{OA'} = |\mathbf{OA'}|\mathbf{a}_0 = \left\{5.06\times\frac{-3}{5},\ 5.06\times\frac{4}{5}\right\},$$

即点 A' 的坐标为

$$\begin{cases} x = 5.06\times\dfrac{-3}{5} = -3.036, \\ y = 5.06\times\dfrac{4}{5} = 4.048。\end{cases}$$

同样，点 B' 的坐标为

$$\begin{cases} x = 5.06\times\dfrac{1}{5} = 1.012, \\ y = 5.06\times\dfrac{4.899}{5} = 4.958。\end{cases}$$

因为在编程计算中钼丝补偿经常需要考虑，所以本例中对圆弧段使用的补偿方法读者应熟练地掌握。

§3 向量的数量积

若将向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的起点平移至一点 O。所谓 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角 α（见图 1-12）规定如下：

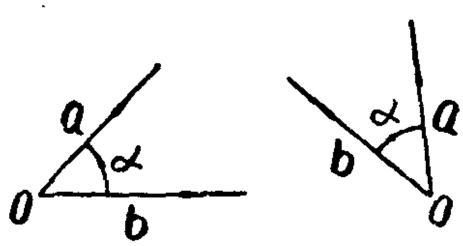

图 1—12

将 $\mathbf{a}$ 或将 $\mathbf{b}$ 绕 O 顺着逆时针方向旋转至另一向量正向重合时所需的最小旋转角。显然，$0\leqslant\alpha\leqslant\pi$。

设 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ 为任意二向量，它们的夹角为 α，数值 $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\alpha$ 叫做向量 $\mathbf{a}$ 与向量 $\mathbf{b}$ 的数量积。$\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的数量积记为 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$。由此，按定义

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\alpha \text{。} \tag{1·3·1}$$

很显然，二向量 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ 的数量积是向量间的一种运算。但相乘的结果不是向量，而是数。所以将这种乘法命名为数量积。由(1·3·1)式可知，若 $0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$，则 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}>0$；若 $\frac{\pi}{2}<\alpha\leqslant\pi$，则 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}<0$；若 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，则 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$。

现在，我们引进向量在有向轴上投影的概念。设 $\mathbf{a}$ 为任一向量，$\mathbf{u}$ 为一有向轴（具有正方向的一条直线）见图 1-13。过 $\mathbf{a}$ 的起点 A 和终点 B 分别作 $\mathbf{u}$ 的垂直线，得交点 A'，B'。所谓向量 $\mathbf{a}$ 在轴 $\mathbf{u}$ 上的投影为一数量，记为 a_u。当 $\mathbf{A'B'}$ 与 $\mathbf{u}$ 同向，则 $a_u=A'B'$；当 $\mathbf{A'B'}$ 与 $\mathbf{u}$ 反向，则 $a_u=-A'B'$。

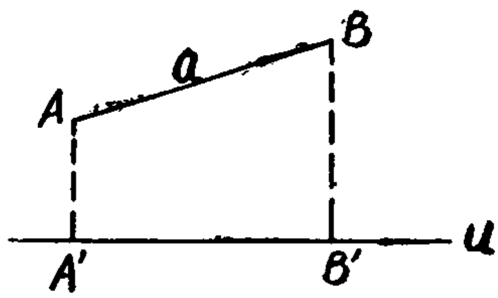

图 1—13

如果以向量 $\mathbf{b}$ 替换上述定义中的轴 $\mathbf{u}$，那么可以得到向量 $\mathbf{a}$ 在向量 $\mathbf{b}$ 上的投影定义。

设向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 α，则向量 $\mathbf{a}$ 在向量 $\mathbf{b}$ 上的投影 a_b 为

$$a_b=|\mathbf{a}|\cos\alpha \text{。} \tag{1·3·2}$$

代入(1·3·1)内，得数量积的另一种表达式

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{b}|\,a_b \text{。} \tag{1·3·3}$$

向量的数量积满足下列性质：

(1) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$；　　　　　　　　(交换律)

(2) $m(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=(m\,\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot(m\mathbf{b})$；(与数乘的结合律)

(3) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$。　　　　(分配律)

(1)、(2)式由数乘定义可以直接验证。现证明(3)式如下。

设 $\mathbf{a}_0$ 为 $\mathbf{a}$ 的单位向量，见图 1-14，则由(1·3·3)得

$$\mathbf{a}_0\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=|\mathbf{a}_0|(b+c)_{a_0}$$
$$=(b+c)_{a_0}=OC',$$

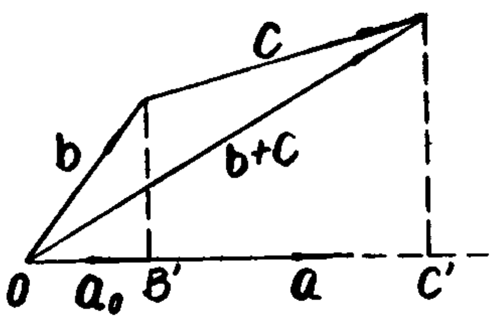

图 1 —14

同样

$$\mathbf{a}_0\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}_0|\,b_{a_0}$$
$$=b_{a_0}=OB',$$

$$\mathbf{a}_0\cdot\mathbf{c}=|\mathbf{a}_0|\,c_{a_0}=c_{a_0}=B'C',$$

但是

$$OC'=OB'+B'C',$$

所以

$$\mathbf{a}_0\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}_0\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}_0\cdot\mathbf{c}\ 。$$

再在此式两端乘以$|\mathbf{a}|$，并由式(1·2·4)，于是得(3)式成立。

由定义式(1·3·1)，向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角 θ 适合

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|}\ 。\qquad(1\cdot3\cdot4)$$

并由此推知：

(4) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=|\mathbf{a}|^2$；

(5) 若 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ 都不是零向量，则 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ 互相垂直的条件为 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$。