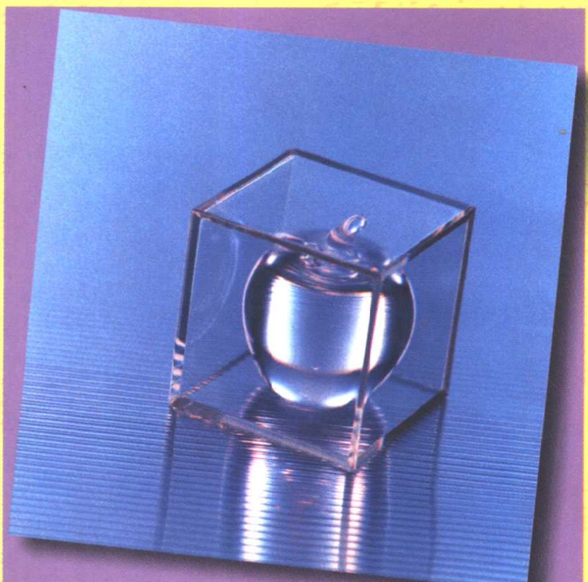
大学基础课学习辅导丛书

线性代数

习题集

XIANXING DAISHU



★
主编 王庆成 王晓易

科学技术文献出版社

大学基础课学习辅导丛书

线性代数习题集

主　编　王庆成　王晓易

编　委　刘俊荣　张利凯　崔现伟

王岩华　王述珍　刘淑霞

马守荣

科学技术文献出版社

Scientific and Technical Documents Publishing House

北　京

图书在版编目(CIP)数据

线性代数习题集/王庆成等主编.-北京:科学技术文献出版社,2002.8

(大学基础课学习辅导丛书)

ISBN 7-5023-4022-X

Ⅰ.线… Ⅱ.王… Ⅲ.线性代数-高等学校-习题 Ⅳ.0151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 019679 号

出　版　者:科学技术文献出版社
地　　　址:北京市复兴路 15 号(中央电视台西侧)/100038
图书编务部电话:(010)68514027,(010)68537104(传真)
图书发行部电话:(010)68514035(传真),(010)68514009
邮购部电话:(010)68515381,(010)68515544-2172
网　　　址:http://www.stdph.com
E-mail:stdph@istic.ac.cn;stdph@public.sti.ac.cn
策划编辑:王亚琪
责任编辑:孙江莉
责任校对:唐　炜
责任出版:刘金来
发　行　者:科学技术文献出版社发行　全国各地新华书店经销
印　刷　者:三河市富华印刷包装有限公司
版(印)次:2002 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
开　　　本:850×1168　32 开
字　　　数:352 千
印　　　张:10.75
印　　　数:1～15000 册
定　　　价:11.00 元

(京)新登字 130 号

内 容 简 介

本书收集大量国内外课本、手册、考试中出现的习题，分成七章。分别为行列式、矩阵、线性方程、二次型、线性空间、线性变换、欧氏空间共七章。每章每节均配有相关的练习题和详细答案。是广大的理工科学生、经济科读者学习线性代数的有价值的资料。对参加硕士研究生入学考试的广大读者也是很有意义的读物。

前　言

大学数学是工科、经济、农医乃至部分文科类院校的公共基础课，而线性代数是大学数学的重要组成部分，由于线性代数的内容概念纷杂，难以把握要领，所以在学习过程中很多学生感到做习题无法下手。

习题是数学著作的重要组成部分，有一位著名数学家曾经说过，学习数学如果不做习题，就等于人宝山而空返。认真学习数学的人有一条基本的经验：要切实掌握一门数学，达到能熟练运用的程度以致有所创新，就要做大量的、有一定难度的习题。在教科书中我们学到了很多的概念、定理、公式，但是教科书的正文由于受到课时和篇幅的限制，不可能对所有的问题都面面俱到，往往只能对最重要的内容做详细的陈述，而很多相关知识、反例、补充以及与实际相联系的应用在正文中都不能体现出来，也不可能介绍很多的解题技巧和解题中可能遇到的问题。通过精心设计的习题集就可以将上述问题加以组织和反映，从而使内容更加完善，使学生加强对所学知识的理解和巩固。

本书正是针对上述问题而编写，在编写过程中笔者查阅了大量的国内外文献资料，收集了各种典型的例题。笔者相信本书对理工科的同学学习数理统计，对普通高校非数学专业的学生参加各种形式的高等教育学习(考试)，以及参加硕士研究生的人学考试均会有很大的帮助。

由于笔者水平有限以及编写时间仓促，本书中定有错误、疏漏之处。希望广大读者批评指正。

目　　录

第一章　行列式

一、填空题

1. 排列$(2k)\cdot1\cdot(2k-1)\cdot2\cdot\cdots(k+1)k$ 的逆序数为______.

2. $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}=$______.

3. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=$______.

4. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & 0 \end{vmatrix}=$______.

5. 方程$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \\ 1 & 4 & 9 & x^2 \\ 1 & 8 & 27 & x^3 \end{vmatrix}=$______.

6. 设 D 为五阶行列式,包含在 D 中前两行的二阶子式共有______个.

7. 若$\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 2 & 1 \end{vmatrix}=1$,则$\begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z-3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$______.

8. $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+d_1 & d_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+d_2 & d_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+d_3 & d_3+a_3 \\ a_4+b_4 & b_4+c_4 & c_4+d_4 & d_4+a_4 \end{vmatrix} =$ ______.

9. 计算 $\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix} =$ ______.

10. 若 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & x & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$，则 $x =$ ______.

11. 计算 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$ ______.

12. 计算 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} =$ ______.

13. 四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$

中 a_{32} 的代数余子式为______.

14. 设 $f(x) = \begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & x-a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & x-a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & x-a_{44} \end{vmatrix}$，

则 $f(x)$ 中 x^3 的系数为______.

二、选择题

1. 设 $p(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & 1 & 0 \\ x^3 & x & 2 & 1 \\ -x^4 & 0 & x & 2 \\ 4 & 3 & 4 & x \end{vmatrix}$,

则多项式 $p(x)$ 的次数是______.

(A)4　　(B)3　　(C)7　　(D)10

2. 设 $|A|$ 为 n 阶行列式,则 $|kA|=$______.

(A)$k|A|$　　(B)$|k|\cdot|A|$　　(C)$k^n|A|$　　(D)$|k|^n\cdot|A|$

3. 设 $|A|$,$|B|$ 均为 $n(n>2)$ 阶行列式,则______.

(A)$|A+B|=|A|+|B|$　　(B)$|A-B|=|A|-|B|$

(C)$|AB|=|A|\cdot|B|$　　(D)$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix}=|A|\cdot|B|$

4. 与三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

等值的行列式为______.

(A)$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}$

(B)$\begin{vmatrix} -a_{11} & a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix}$

(C)$\begin{vmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{12}+a_{13} & a_{13}+a_{11} \\ a_{21}+a_{22} & a_{22}+a_{23} & a_{23}+a_{21} \\ a_{31}+a_{32} & a_{32}+a_{33} & a_{33}+a_{31} \end{vmatrix}$

(D) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+a_{13} & a_{11}+a_{12}+a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+a_{23} & a_{21}+a_{22}+a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+a_{33} & a_{31}+a_{32}+a_{33} \end{vmatrix}$

5. 下列行列式中哪一个不等于零______.

(A) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$　(B) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(C) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$　(D) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

6. 已知 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 3$,则 $\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{31}-5a_{21} & 3a_{21} \\ a_{12} & 2a_{32}-5a_{22} & 3a_{22} \\ a_{13} & 2a_{33}-5a_{23} & 3a_{23} \end{vmatrix} =$ ______.

(A)18　(B) -18　(C) -9　(D)27

7. $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} =$ ______.

(A) $a_1a_2a_3a_4 - b_1b_2b_3b_4$

(B) $a_1a_2a_3a_4 + b_1b_2b_3b_4$

(C) $(a_1a_2 - b_1b_2)(a_3a_4 - b_3b_4)$

(D) $(a_1a_4 - b_1b_4)(a_2a_3 - b_2b_3)$

8. 记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$

为 $f(x)$,则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为______.

(A)1　(B)2　(C)3　(D)4

9. 设 A 为 n 阶方阵，则 $|A|=0$ 的必要条件是______.

(A) A 的两行元素对应成比例

(B) A 中必有一行为其余行的线性组合

(C) A 中有一行元素全为零

(D) A 中任一行为其余行的线性组合

10. A 是 3 阶矩阵，$|A|=2$，A 的伴随矩阵为 A^*，则 $|2A^*|=$______.

(A)4　(B)8　(C)16　(D)32

11. 方程 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3-x^2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 5-x^2 \end{vmatrix}=0$ 的根为______.

(A) $\pm 1, \pm\sqrt{3}$　　(B) $\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{5}$

(C) $\pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{2}$　　(D) $\pm 1, \pm\sqrt{5}$

三、计算与证明题

1. 解方程求 x

(1) $\begin{vmatrix} x-2 & 4 & 0 \\ -1 & x+3 & 0 \\ 5 & -6 & x-7 \end{vmatrix}=0$

(2) $\begin{vmatrix} 2-x & 2 & -2 \\ 2 & 5-x & -4 \\ -2 & -4 & 5-x \end{vmatrix}=0$

2. 设 4 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

求：(1) D 的代数余子式 A_{12}

(2) $A_{11}-2A_{12}+2A_{13}-A_{14}$

(3) $A_{11}+A_{21}+2A_{31}+2A_{41}$

3. 计算 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & & & \\ 1 & & 3 & \text{\Large 0} & \\ \vdots & \text{\Large 0} & & \ddots & \\ 1 & & & & n \end{vmatrix}$.

4. 已知 n 阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & \cdots & 2n-1 \\ 1 & 2 & & & \\ 1 & & 3 & & \text{\Large 0} \\ \vdots & & \text{\Large 0} & \ddots & \\ 1 & & & & n \end{vmatrix},$$

求其代数余子式 $A_{11} + A_{12} + \cdots + A_{1n}$ 之和.

5. 计算行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ -a_1 & a_2 & & \\ & -a_2 & a_3 & \text{\Large 0} \\ \text{\Large 0} & & -a_3 & a_4 \end{vmatrix}, \text{其中 } a_i \neq 0, (i = 1,2,3,4).$$

6. 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

7. 计算 $n+1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & \cdots & a_1 b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & \cdots & a_2 b_2^{n-1} & b_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}, \text{其中 } a_i \neq 0 (i = 1,2,\cdots,n+1).$$

8. 解方程

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1}+a_n-x \end{vmatrix} = 0$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个互不相同的数,且 $a_1 \neq 0$.

9. 计算

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \beta_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \beta_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n & 0 \end{vmatrix}$$

10. 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

11. 设 n 为奇数,试证

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

12. 求 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

13. 设 $a_i \neq 0(i = 1,2,\cdots,n)$,求 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

14. 证明

$$\begin{vmatrix} c_{11}\cdots c_{1n} & b_{11}\cdots b_{1m} \\ \cdots & \cdots \\ c_{m1}\cdots c_{mn} & b_{m1}\cdots b_{mm} \\ a_{11}\cdots a_{1n} & \\ \cdots & 0 \\ a_{n1}\cdots a_{nn} & \end{vmatrix} = (-1)^{m\times n} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

15. 证明

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = (a+b+c+d) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

16. 证明

$$\begin{vmatrix} a_1 & -1 & & 0 & & \cdots & 0 \\ a_2 & x & & -1 & & \cdots & \vdots \\ a_3 & 0 & & x & & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \cdots & -1 \\ a_n & 0 & & 0 & & & x \end{vmatrix}$$

$= a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$

17. 设

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n & x \\ 1 & 4 & 9 & \cdots & n^2 & x^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2^n & 3^n & \cdots & n^n & x^n \end{vmatrix}$$

求导函数 $f'(x)$ 的零点个数及所在区间.

18. 证明：n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} p+q & p & 0 & \cdots & 0 \\ q & p+q & p & \ddots & 0 \\ 0 & q & p+q & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & p \\ 0 & \cdots & 0 & q & p+q \end{vmatrix}=\frac{p^{n+1}-q^{n+1}}{p-q}\ (p\neq q)$$

19. 若齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=0 \end{cases}$$ 只有零解，则 λ 应满足的条件：__________.

20. 给定线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=\lambda x_1 \\ 2x_1+x_2+2x_3=\lambda x_2 \\ 2x_1+2x_2+x_3=\lambda x_3 \end{cases}$

当 λ 取何值时，方程组有非零解?

21. 求线性方程组

$$\begin{cases} x_2-3x_3+4x_4=-5 \\ x_1-2x_3+3x_4=-4 \\ 3x_1+2x_2-5x_4=12 \\ 4x_1+3x_2-5x_3=5 \end{cases}$$

的全部解.

22. 用克莱姆法则解下列线性方程组

$$(1)\begin{cases}3x_1+3x_2+4x_3-x_4=13\\5x_1+x_2-x_3+2x_4=9\\2x_1+3x_2-7x_3+3x_4=14\\4x_1-4x_2+3x_3-5x_4=4\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3-2x_4=-6\\x_1+7x_2+x_3-x_4=5\\3x_1+5x_2-5x_3+3x_4=19\\x_1-x_2-2x_3+x_4=4\end{cases}$$

$$(3)\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6\\2x_1-x_2-2x_3-3x_4=8\\3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4\\2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-8\end{cases}$$

$$(4)\begin{cases}5x_1+6x_2=1\\x_1+5x_2+6x_3=-2\\x_2+5x_3+6x_4=2\\x_3+5x_4+6x_5=-2\\x_4+5x_5=-4\end{cases}$$

23. 证明下列齐次线性方程组只有零解.

$$\begin{cases}x_1-3x_2+4x_3-5x_4=0\\x_1-x_2-x_3+2x_4=0\\x_1+2x_2+5x_4=0\\2x_1-x_2+3x_3-2x_4=0\end{cases}$$

习题答案

一、填空题

1. $(2k-1)+(2k-3)+\cdots+3+1=k^2$

2. $2(bc-ad)$

3. x^4