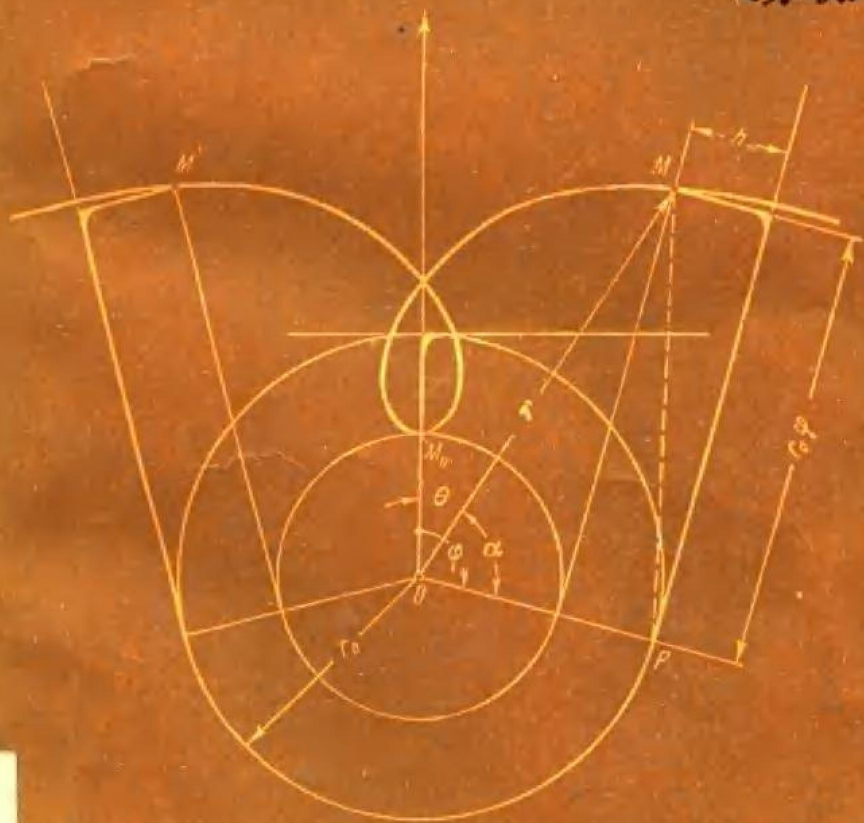


CHILUN NIEHE YUANLI

# 齿轮啮合原理

(第二版)

[苏联] Ф. Л. 李特文 著



上海科学技术出版社

## 内 容 提 要

本书系根据 Ф. Л. Литвин:“Теория зубчатых зацеплений”修订第二版译出。我社于 1964 年曾翻译出版过原书第一版。

全书共分啮合原理和啮合几何学两篇。第一篇叙述矩阵及坐标变换,平面啮合原理,空间啮合原理;第二篇叙述圆柱齿轮、圆锥齿轮、蜗杆蜗轮等各种型式齿轮传动的几何计算,还介绍了新的切齿法。

本书可供齿轮研究、设计和工艺人员阅读,也可用作高等学校教学参考书。

Теория зубчатых зацеплений

(второе издание)

Файдор Львович Литвин

Издательство «Наука»

1968 г. Москва

齿 轮 啮 合 原 理

(第 二 版)

[苏联] Ф. Л. 李特文 著

卢贤占 高业田 王树人 译

国 楷 校

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

本书由上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张 30.5 字数 733,000

1984 年 12 月第 1 版 1984 年 12 月第 1 次印刷

印数: 1-7,600

统一书号: 15119·2363 定价: 5.00 元

## 第二版前言

在准备本书这一版的过程中,几乎全书都做了修改,并且增补了大量的内容.为了尽量反映由于国内外学者的辛勤劳动而在啮合原理和啮合几何学方面所取得的最新研究成果,进行这样重大的修改是十分必要的.

本书共两篇:1)啮合原理;2)啮合几何学.

第一篇叙述了分析与综合齿轮啮合的普遍法.该篇第一次介绍了关于相互包络齿面曲率的求解和确定齿面不发生根切的有效方法,形成共轭齿面的原理,具有改进参数的近似啮合的综合问题,以及利用双参数包络法形成齿轮啮合的新内容等.

在本书新版中,扩大了矩阵运算的应用,不仅用于点和矢量投影的坐标变换,而且用来确定点的速度和加速度.

第二篇同样进行了很大的修改,这一部分包括各种型式齿轮传动的研究和几何计算.完全重写和大大扩充的章节有:渐开线啮合、螺旋齿轮传动、蜗杆传动和圆锥齿轮传动,并且首次介绍了圆柱圆锥齿轮传动、М. Л. Новиков 啮合传动、按连续分度法和螺旋成形法(helixform)加工的两种圆锥齿轮.

在本书再版过程中,书稿评阅人兼编辑 Л. В. Коростелев, 以及 Я. С. Давыдов, М. Л. Ерихов, И. А. Болотовский, Н. Т. Халевский, К. И. Гуляев, И. П. Бернацкий, Л. Я. Либуркин, Г. А. Лившиц, В. А. Зискиндович, В. В. Шульц 和 Б. Д. Зильберман 给了作者很大的帮助,他们阅读了本书部分章节的手稿,并且提出了许多有价值的批评和建议.对他们付出的劳动,作者表示衷心的感谢.

作者将感谢读者对本书提出批评和建议,来函请寄: Москва, Ленинский пр., 15, Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука».

作 者

# 目 录

## 第二版前言

绪论 .....	1
----------	---

## 第一篇 啮合原理

第一章 矩阵、坐标变换.....5	§ 22 空间坐标变换 .....	68
§ 1 矩阵的初步知识 .....	§ 23 确定两构件相对运动速度的矢量法 .....	72
§ 2 矩阵的加法和乘法 .....	§ 24 确定两构件相对运动速度的矩阵法 .....	74
§ 3 矩阵的微分 .....	§ 25 两齿轮的相对运动螺旋轴、瞬轴面	
§ 4 坐标变换的矩阵法 .....	及节面 .....	80
§ 5 求逆矩阵 .....	§ 26 齿面、切面和法线的方程式 .....	87
第二章 平面啮合原理.....16	§ 27 螺旋面方程式 .....	90
§ 6 平面曲线、切线和法线的方程式 .....	§ 28 曲面族包络面的方程式 .....	92
§ 7 齿轮的瞬心线 .....	§ 29 确定接触线和包络面的 X. И. Гохман	
§ 8 Willis 定理.....	法 .....	95
§ 9 共轭齿廓 .....	§ 30 运动学法 .....	97
§ 10 采用的坐标系 .....	§ 31 啮合轴 .....	103
§ 11 曲线族包络的方程式 .....	§ 32 啮合枢纽线 .....	112
§ 12 用 X. И. Гохман 法计算平面啮合 .....	§ 33 接触点的运动参数 .....	115
§ 13 求齿廓啮合方程式的运动学法 .....	§ 34 单参数包络时齿面的曲率 .....	124
§ 14 齿廓法线法 .....	§ 35 双参数包络时齿面的曲率 .....	137
§ 15 齿廓的渐屈线 .....	§ 36 空间啮合的根切 .....	138
§ 16 Euler-Savary 方程式.....	§ 37 齿面的接触痕迹 .....	151
§ 17 平面啮合中接触点的运动参数 .....	§ 38 共轭啮合的综合 .....	158
§ 18 确定齿廓曲线族包络的曲率 .....	§ 39 在给定接触点邻域内具有最佳啮合	
§ 19 平面啮合的根切 .....	条件的近似啮合的综合 .....	166
§ 20 过渡曲线 .....	§ 40 确定空间齿轮机构的运动规律 .....	171
§ 21 确定平面齿轮机构的运动规律 .....	§ 41 误差的影响 .....	174
第三章 空间啮合原理.....68		

## 第二篇 啮合几何学

第四章 渐开线啮合 .....	§ 46 用齿条刀具切制的齿轮几何计算 .....	183
§ 42 概述、泛渐开线方程式 .....	§ 47 插齿刀和被切齿轮的外啮合 .....	197
§ 43 形成渐开线的方法和切齿方案 .....	§ 48 用插齿刀切制的外啮合齿轮几何计	
§ 44 齿轮和齿条刀具的啮合 .....	算 .....	198
§ 45 一对渐开线齿廓的啮合 .....	§ 49 插齿刀和被切齿轮的内啮合 .....	199

§ 50 内啮合齿轮传动的几何计算 .....	203	§ 86 瞬时接触线、啮合区 .....	340
§ 51 封闭图 .....	205	<b>第十一章 曲纹螺旋面圆柱蜗杆传动</b> .....	343
§ 52 例题 .....	206	§ 87 用盘状锥面刀具加工出的螺旋面 .....	343
<b>第五章 摆线啮合</b> .....	210	§ 88 蜗杆磨削成凹面齿的圆柱蜗杆传动 (I型) .....	347
§ 53 基本知识、循环曲线 .....	210	§ 89 蜗杆磨削成凹面齿的圆柱蜗杆传动 (II型) .....	351
§ 54 Camus 定理 .....	217	<b>第十二章 加工圆柱蜗杆和蜗轮的刀具 齿廓计算</b> .....	357
§ 55 普通型式的摆线啮合 .....	217	§ 90 飞刀的齿廓 .....	357
§ 56 针轮啮合 .....	220	§ 91 指状铣刀的齿廓 .....	364
§ 57 Roots 轮 .....	226	§ 92 盘状铣刀齿廓的计算 .....	366
<b>第六章 非圆形齿轮</b> .....	233	§ 93 用盘状铣刀和指状铣刀加工蜗杆时 的根切 .....	369
§ 58 应用 .....	233	<b>第十三章 弧面蜗杆啮合</b> .....	373
§ 59 瞬心线的计算 .....	237	§ 94 引言、蜗杆螺旋齿面 .....	373
§ 60 封闭瞬心线 .....	239	§ 95 瞬时接触线、啮合面 .....	375
§ 61 瞬心线为凸形的条件 .....	241	§ 96 蜗轮的齿面 .....	379
§ 62 具有相同瞬心线的两齿轮共轭 .....	243	§ 97 弧面蜗杆传动的修正 .....	381
§ 63 定轴轮系 .....	245	<b>第十四章 正交圆柱准双曲面齿轮传动</b> .....	384
§ 64 变形椭圆齿轮 .....	254	§ 98 概述 .....	384
§ 65 偏心圆齿轮和非圆形齿轮的共轭 .....	260	§ 99 圆柱准双曲面齿轮传动的啮合方程 式、瞬时接触线及啮合面 .....	385
§ 66 切齿方案 .....	263	§ 100 齿面方程式、确定齿轮不产生根切 和变尖的条件 .....	387
§ 67 渐屈线和齿廓 .....	267	§ 101 接触局部化 .....	389
§ 68 压力角 .....	272	§ 102 几何计算 .....	390
<b>第七章 平行轴螺旋齿圆柱齿轮</b> .....	274	<b>第十五章 正交圆柱圆锥齿轮传动</b> .....	392
§ 69 啮合条件 .....	274	§ 103 基本计算公式 .....	392
§ 70 渐开线斜齿轮 .....	276	§ 104 正交圆柱圆锥齿轮传动的几何计算 .....	393
§ 71 М. Л. Новиков 斜齿轮 .....	288	<b>第十六章 非正交圆柱圆锥齿轮传动</b> .....	395
<b>第八章 相错轴螺旋齿圆柱齿轮</b> .....	297	§ 105 啮合方程式、瞬时接触线和啮合面 .....	395
§ 72 相错轴的啮合条件 .....	297	§ 106 圆锥齿轮齿面、确定轮齿不产生根 切和变尖的条件 .....	396
§ 73 渐开线螺旋齿轮 .....	301	§ 107 非正交圆柱圆锥齿轮传动中的局部 化接触 .....	398
§ 74 新啮合型式的圆柱螺旋齿轮 .....	314	§ 108 非正交圆柱圆锥齿轮传动的几何计 算 .....	398
<b>第九章 圆柱蜗杆啮合</b> .....	319	<b>第十七章 直齿圆锥齿轮</b> .....	400
§ 75 节面和基本几何关系 .....	319		
§ 76 共轭啮合的形成 .....	323		
§ 77 正交蜗杆传动的修正 .....	324		
§ 78 选择蜗杆啮合合理的型式 .....	325		
§ 79 啮合方程式、瞬时接触线 .....	326		
§ 80 啮合区 .....	327		
§ 81 蜗轮轮齿的根切 .....	329		
§ 82 蜗杆传动的齿面曲率 .....	331		
<b>第十章 直纹螺旋面圆柱蜗杆传动</b> .....	333		
§ 83 泛渐开线螺旋面 .....	333		
§ 84 阿基米德螺旋面 .....	337		
§ 85 渐开线螺旋面 .....	338		

§ 109 瞬轴面和啮合参数 .....	400	第十九章 半滚切螺旋齿面的圆锥齿轮	
§ 110 直齿圆锥齿轮的切齿方案 .....	402	(helixform) .....	441
§ 111 产形面和啮合方程式 .....	404	§ 125 切齿方案和采用的坐标系 .....	441
§ 112 啮合面 .....	405	§ 126 产形面及其法线单位矢量的方程式	
§ 113 被切齿轮的齿面 .....	407	.....	445
§ 114 齿面的曲率 .....	408	§ 127 保证产形面呈线接触的条件 .....	448
§ 115 轮齿的根切 .....	409	§ 128 确定辅助参数 .....	451
第十八章 滚切弧齿圆锥齿轮 .....	412	§ 129 在机床上安装被切齿轮 .....	452
§ 116 基本知识 .....	412	§ 130 刀盘的安装 .....	454
§ 117 纵向齿廓为圆弧的产形面 .....	414	第二十章 产形轮纵向齿廓为摆线的圆	
§ 118 切齿方案 .....	415	锥齿轮 .....	457
§ 119 保证齿轮 1 和 2 的齿面在给定点相		§ 131 切齿方案 .....	457
接触的条件 .....	417	§ 132 产形面方程式、保证啮合共轭的条件	
§ 120 保证齿轮传动比的一阶导数在计算		.....	458
接触点为零的条件 .....	425	§ 133 计算刀盘和产形面的安装参数 .....	463
§ 121 接触痕迹的方向 .....	433	§ 134 确定啮合条件 .....	471
§ 122 齿面 $\Sigma_1$ 和 $\Sigma_2$ 的主曲率 .....	434	参考文献 .....	472
§ 123 轮齿的根切 .....	436		
§ 124 等高齿 .....	438		

# 绪 论

齿轮传动是机器和仪器中用得最广的一种机械传动。齿轮机构可以传递平行轴、相交轴和相错轴之间的回转运动,换句话说,它可以传递机器设计中已经应用的、任意配置的、两轴间的回转运动。齿轮啮合的各种元素有各种各样的结构形式。我们知道,有直齿、斜齿和螺旋齿齿轮;蜗杆传动中,蜗轮的外形,有时甚至蜗杆的外形都做成弧面;齿面做成柱面和锥面,直纹面和非直纹面。

到目前为止,主要应用主动构件和从动构件的速比为常数的齿轮机构。近年来,采用了非圆形齿轮来传递速比为变数的两构件间的回转运动。这种齿轮用于机器制造业中的各种自动机上;在仪器制造业中,由非圆形齿轮组成的机构,用来作为复示具有一个独立参数的函数的发生装置。

努力提高齿轮传动承载能力、切齿效率和制造精度,以及各种专利发明,都促使啮合型式日新月异,比先前应用的齿轮传动更臻完善。例如苏联发明 М. Л. Новиков 啮合<sup>[244, 245]</sup>, 美国出现锥形蜗杆啮合和螺旋锥齿轮的新切齿法(helixform), 西德和苏联研制成凹面齿蜗杆传动,等等。

齿轮的制造方法在不断地完善着。目前广泛采用滚切法切制齿轮;用这种方法加工时,工件和刀具处于连续啮合。机床制造业花了很大的力量来提高齿轮机床的精度,研制了新切齿法和新型设备,日益广泛地掌握齿面的精加工方法:剃齿、研齿和磨齿。

由于齿轮啮合理论的发展和这些理论的应用,齿轮传动设计和制造的技术革新才成为可能。

不知道共轭齿面形成的基本规律,建立一种新型啮合是不可想象的。在制定新型啮合时,还需详细研究共轭齿面的接触特性,以便评价所设计的齿轮传动的承载能力。刀具设计师在设计切齿刀具的齿廓时,也要用到啮合原理。齿轮机床设计师要根据以啮合原理为基础制定的切齿方案来设计齿轮机床。由此可以得到这样的结论:齿轮啮合原理与生产实践紧密结合,它所研究的问题是从生产需要中提出来的,而解决这些问题所取得的成果,又广泛地为工程师们利用。

齿轮啮合原理卓有成效地发展,是大批学者集体努力的结果。这里,不可能对齿轮啮合原理的发展给予比较全面的历史综述,我们对此仅做一个简短的介绍。

La-Hire, Poncelet 和 Camus 的贡献在于制定了平面啮合中求共轭齿廓的包络曲线法和旋轮曲线(Roulette)法。L. Euler<sup>[279]</sup>提出了圆柱齿轮的渐开线啮合,这种啮合后来在工业中获得了非常广泛的应用。

在 E. Buckingham<sup>[14]</sup>, X. Ф. Кетов<sup>[113]</sup>, Я. И. Дивер<sup>[65]</sup>, В. Н. Кудрявцев<sup>[145, 148]</sup>, В. А. Гавриленко<sup>[32~34]</sup>, И. А. Болотовский 及其合作者们<sup>[24]</sup>的著作中,渐开线啮合几何学已经探讨得非常详尽了。

杰出的法国几何学家 T. Olivier<sup>[288]</sup>和俄国学者 X. И. Гохман<sup>[45]</sup>的著作奠定了空间啮



合原理的理论基础。

T. Olivier 提出了求共轭齿面的普遍法——包络曲面法，论证了利用辅助曲面得到线接触和点接触共轭齿面的可能性。但是，T. Olivier 在探讨这些问题时，仅局限于一些几何模式，并且他还断言：“……啮合问题完全是画法几何学的问题……” X. И. Гохман 在肯定了 T. Olivier 无可争辩的贡献的同时，正确地批评了他的这种把啮合原理和解析法割裂开来的观点。

X. И. Гохман 的巨大功绩在于他建立了齿轮啮合解析原理的理论基础。在提出制定啮合研究的一般解析法这个课题时，他写道：

“啮合原理这个课题，尽管它的实际重要性很大，或许正是由于它的这种重要性，却成了数学文献中一个十分奇特的现象。果然如此，几乎在每一个稍为重要的数学问题中，都有一个总的指导思想，并且这个指导思想包罗了那个问题的各个方面，使研究者可以一下子把握住所选定的途径，并且沿着这一途径坚定地前进的时候，唯独啮合原理却没有这样一个总的指导思想——一般公式。因此，研究啮合原理的人，不得不摸索着前进，并且在每一步都要寻找立足点，有时甚至没有成效。” X. И. Гохман 成功地解决了 he 提出的任务，制定了研究齿轮啮合的新方法，这个方法的要点将在本书的 § 12 和 § 29 两节中讲述。H. И. Колчин<sup>[119]</sup> 和 И. А. Фрайфельд<sup>[247]</sup> 是 X. И. Гохман 苏维埃时代的继承者。在 H. И. Колчин的著作中，计算了现代空间齿轮啮合的许多型式，并且这些计算是结合切齿方法以及所采用的刀具型式进行的。И. А. Фрайфельд 成功地运用 X. И. Гохман 法设计了按滚切法工作的切齿刀具的齿形。А. Ф. Николаев<sup>[214]</sup> 在齿轮啮合原理方面完成了有重要意义的工作。В. Н. Кедринский 和 К. М. Писманик<sup>[110]</sup>，Н. Ф. Кабатов 和 Г. А. Лопато<sup>[101]</sup>，М. Г. Сегаль<sup>[233~237]</sup>，В. М. Денисов<sup>[63, 64]</sup>，М. Д. Злотопольский<sup>[94~96]</sup> 完成了一系列阐述圆锥齿轮啮合的著作。

在 X. И. Гохман 之后，研究齿轮啮合的解析法（建立啮合方程式，求特征线和包络齿面）简化成所谓运动学法。在苏联，В. А. Шипшов<sup>[258, 260]</sup>，Я. С. Давыдов<sup>[55]</sup> 和本书作者<sup>[167]</sup> 的著作讨论了运动学法。在国外，D. W. Dudley 和 H. Poritsky<sup>[278]</sup>，O. Saary<sup>[292]</sup> 的著作中也用这种方法研究空间啮合。运动学法的主要特点是利用下述原理：互为包络的两齿面，在其接触点处的相对运动速度矢量  $v$  垂直于齿面法线矢量  $n$ ，即  $nv=0$ 。

张量法的应用对机械原理及其分支——齿轮啮合原理的发展具有重要意义。在 Ю. Ф. Моршкин<sup>[209]</sup>，С. Г. Кислицын<sup>[115]</sup>，D. Mangeron<sup>[285]</sup>，张启先<sup>[254]</sup>，本书作者<sup>[170]</sup> 和其他人的著作中，论述了这种方法。利用矩阵法进行坐标变换（对空间啮合采用四阶矩阵），作者在本书初版里进行了讨论。在这一版中，矩阵法还被用于求点的速度和加速度。

在制定空间啮合的综合方法方面，可以举出一系列重大成果。М. Л. Новиков<sup>[244, 245]</sup> 发明了新颖的设计点接触空间啮合的方法，Я. С. Давыдов<sup>[60]</sup> 和 В. И. Васильев 提出了借助两条产形线形成共轭齿面的方法，Н. Н. Крылов<sup>[140]</sup> 和 М. Л. Ерихов<sup>[78~82]</sup> 成功地制定了具有双参数包络的空间啮合的综合方法。

在确定包络齿面曲率的研究方法方面，也取得了很大的成果。这些成果反映在 H. И. Колчин<sup>[122, 123]</sup>，А. М. Павлов<sup>[215, 216]</sup>，Л. В. Коростелев<sup>[127~129]</sup>，И. И. Дусев<sup>[73, 74]</sup>，В. М. Васильев<sup>[28]</sup>，М. Л. Ерихов<sup>[81, 82]</sup>，Е. Г. Гинзбург<sup>[42]</sup>，张启先<sup>[177]</sup> 和作者<sup>[177, 185]</sup> 等人的著作里。空间啮合理论中最困难的问题之一——齿面的根切得到了解决。在 И. И. Дусев<sup>[71, 72]</sup>，



В. М. Васильев<sup>[27, 30]</sup>, М. Л. Ерихов<sup>[77, 78, 80]</sup> 和作者<sup>[178, 185, 195]</sup>的著作中论述了这个问题。

许多新型啮合的几何学, 在科研人员的许多著作中进行了阐述。

在 Н. Б. Фирун<sup>[174, 196]</sup>, К. И. Гуляев<sup>[53, 54, 196]</sup> 和作者<sup>[174, 196]</sup> 的文章里, 讨论了按连续分度法切制的螺旋锥齿轮的啮合几何学。当产形轮作螺旋运动时, 即利用螺旋成形法 (helixform) 可切制一种半滚切螺旋锥齿轮, 其啮合几何学在 G. M. Spear, C. B. King 和 M. L. Baxter<sup>[294]</sup>, М. Г. Сегаль<sup>[237]</sup>, В. Д. Зильберман 和作者<sup>[194]</sup> 的著作中得到了阐述。

В. В. Шульц 和作者<sup>[188]</sup> 的文章探讨了一种具有高承载能力的螺旋齿轮的啮合几何学。

И. С. Кривенко<sup>[136]</sup>, И. П. Бернадский<sup>[16, 19, 20, 190]</sup> 和作者<sup>[182, 190]</sup> 的著作讨论了凹面齿蜗杆传动。

Я. С. Давыдов<sup>[55, 56]</sup>, К. А. Боголюбовский, Л. Я. Либуркин<sup>[156~159]</sup> 等人的著作, 介绍了圆柱圆锥齿轮传动。

正在努力探讨螺旋圆锥齿轮和准双曲面齿轮近似啮合的综合方法, 关于这方面的论述有 К. М. Писманик<sup>[110, 219, 221, 222]</sup>, В. Н. Кедринский<sup>[110]</sup>, Н. Ф. Кабатов<sup>[97~104]</sup>, М. Г. Сегаль<sup>[233~237]</sup>, Ю. И. Шурыгин<sup>[264]</sup>, А. А. Заостровский<sup>[90]</sup>, Г. И. Шевелева<sup>[256]</sup> 和作者<sup>[174, 184, 186, 187, 189, 192]</sup> 的许多著作。

啮合原理的研究方法还成功地应用于相邻的学科。例如, И. А. Фрайфельд<sup>[247]</sup> 利用这种方法设计加工花键轴用的刀具的齿形。В. А. Зискиндович<sup>[93]</sup> 成功地运用啮合原理研究了空间凸轮机构, 并且论证了(和本书作者一起)离心泵叶轮表面的形成方法。

上面提到的齿轮啮合原理方面的许多著作, 仅仅是一小部分, 许多令人感兴趣和内容深湛的论著没有完全列出。许多研究成果, 包括讨论从前提出的各种啮合型式几何学的著作, 在本书正文和书末的参考文献里做了引证。



# 第一篇 啮合原理

## 第一章 矩阵、坐标变换

近年来,日益广泛地应用张量法确定空间机构位移、速度和加速度的函数。这反映在国内学者 А. И. Лурье<sup>[203]</sup>, Ю. Ф. Морозкин<sup>[209]</sup>, С. Г. Кислицын<sup>[115]</sup> 和本书作者<sup>[170]</sup> 等人的著作里;也反映在国外学者 I. Denavit<sup>[275]</sup>, D. Mangeron<sup>[285]</sup>, R. Beyer<sup>[269]</sup> 和 J. S. Beggs<sup>[268]</sup> 等人的著作里。

特别值得提出的是螺旋法,这种方法在 Ф. М. Диментберг<sup>[70]</sup> 的著作里做了详细介绍。

但是,得到最广泛应用的是矩阵法。在进行多次坐标变换时,这种方法可以使运算条理化,能够检查运算结果,并且可以简便地利用逆矩阵实现坐标的逆变换。作者认为,对空间坐标采用四阶矩阵是最有发展前景的(把点的坐标写成齐次坐标)。采用四阶矩阵进行坐标变换,不仅表达了绕坐标轴的旋转,而且也表示了坐标原点的移动。在进行多次坐标变换时,矩阵的运算只归结为矩阵的乘法。1954年,作者<sup>[170]</sup> 在齿轮啮合原理中采用了四阶矩阵。在作者指导下,张启先<sup>[254]</sup> 利用四阶矩阵研究了空间连杆铰链机构。

本章将简介矩阵的基本知识及运算法则。更详细地了解有关矩阵的知识,读者可以参考 Гантмахер<sup>[35]</sup>, Frazer, Duncan 和 Collar<sup>[249]</sup> 的著作。

### §1 矩阵的初步知识

矩阵是以一定的方式按着行和列排列的矩形数表。本书只利用实数矩阵。

下式是矩阵的一个例子

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad (1.1)$$

矩阵元素  $a_{ij}$  有两个下标,第一个表示行的序号,第二个表示列的序号,元素  $a_{ij}$  位于  $i$  行和  $j$  列的交点。例如,元素  $a_{34}$  的双下标表示  $a_{34}$  在第三行(第一个下标是 3)和第四列(第二个下标是 4)的交点。

行数和列数相等的矩阵叫方阵。

$m$  个元素排成一列的矩阵叫列矩阵。例如,在三维空间里,点的坐标可写成列矩阵

$$r = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

式中  $r$ ——径矢  $r$  列矩阵的记号。

矩阵的阶数表示它包含的行数和列数。上面提到的列矩阵  $r$  是  $3 \times 1$  阶矩阵。式(1.1)表示的矩阵  $A$  是四阶方阵。

单位矩阵  $E$  是这样一方阵, 其主对角线的诸元素是 1, 而所有其它元素都是零, 即

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

转置矩阵  $A'$  是由矩阵  $A$  按下述规则组成的: 矩阵  $A'$  的行分别是原矩阵  $A$  的列。例如, 原矩阵

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & -1 \end{vmatrix}$$

则

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 9 \\ 3 & 7 & -1 \end{vmatrix}$$

在对称矩阵中, 元素  $a_{ij}$  和  $a_{ji}$  相等。例如矩阵

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$a_{12} = a_{21} = 2$$

$$a_{13} = a_{31} = 3$$

$$a_{23} = a_{32} = -1$$

在反对称矩阵中, 各元素之间满足关系式  $a_{ij} = -a_{ji}$ , 而对角线上的元素等于零, 即

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$$

$$a_{12} = -a_{21} = 1$$

$$a_{13} = -a_{31} = 2$$

$$a_{23} = -a_{32} = 3$$

对称矩阵和反对称矩阵都是方阵。

## § 2 矩阵的加法和乘法

矩阵的加法按下述规则进行: 两个阶数 ( $m, n$ ) 相同的矩阵之和是一个同阶矩阵, 它的每个元素等于两个相加矩阵的对应元素之和。

因此, 已知矩阵

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

则

$$C = A + B = \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{vmatrix}$$

矩阵的和具有交换性质和结合性质, 即

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

矩阵  $A$  乘以数  $\alpha$ , 组成一个新矩阵  $B$ , 它的各个元素分别等于矩阵  $A$  的对应元素与数  $\alpha$  之乘积, 即

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$B = \alpha A = \begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} & \alpha a_{33} \end{vmatrix}$$

只有第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时, 才能进行两个矩阵的乘法运算。下面将用到两个方阵的乘法运算, 以及具有同样行数的一个方阵和一个列矩阵的乘法运算。

两个矩阵的乘法运算记作

$$C = AB \quad (2.1)$$

两个同阶方阵

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix}$$

的乘积是一个同阶方阵

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix}$$

方阵  $C$  的元素由下式计算

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + a_{i4}b_{4j} \quad (2.2)$$

例如, 需要求方阵  $C$  第三行和第二列相交处的元素  $c_{32}$ , 根据式 (2.2), 这个元素 ( $i=3, j=2$ ) 可由下式确定

$$c_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} + a_{34}b_{42}$$

不难看出, 所求的元素  $c_{32}$ , 就是方阵  $A$  的第三行 ( $i=3$ ) 各元素和方阵  $B$  的第二列 ( $j=2$ ) 的对应元素的乘积之和。方阵  $A, B$  和  $C$  的对应元素用框线划出如下

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \boxed{a_{31}} & \boxed{a_{32}} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & \boxed{b_{12}} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & \boxed{b_{22}} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & \boxed{b_{32}} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & \boxed{b_{42}} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & \boxed{c_{32}} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix}$$

两个矩阵  $A$  和  $B$  的乘法法则, 可以简单地说是“行乘列”法则。这个意思就是说, 为了确定矩阵  $C=AB$  的元素  $c_{ij}$ , 应当求出矩阵  $A$  的第  $i$  (所求元素  $c_{ij}$  的第一个下标) 行的各元素与矩阵  $B$  的第  $j$  (元素  $c_{ij}$  的第二个下标) 列的对应元素的乘积之和。

一个方阵和一个列矩阵的乘法运算, 同样按上述法则进行, 其乘积是一个列矩阵 (参看例题 2)。

矩阵乘法不具有交换特性, 即乘积与因子的顺序有关。换句话说, 除了特殊情况外, 一般

$$AB \neq BA$$

两个矩阵的乘法法则, 可以推广到任意个因子的情况。这时结合律成立, 即各个因子可以结合成若干组。例如

$$(AB)C = A(BC)$$

对第一种情况  $[(AB)C]$ , 先求出乘积  $D=AB$ , 然后求乘积  $DC$  (而不是  $CD$ ); 对第二种情况, 先求出乘积  $F=BC$ , 然后求乘积  $AF$  (而不是  $FA$ )。

特别有趣的是下列形式的矩阵乘积

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

式中  $E$ ——单位矩阵。

矩阵  $A^{-1}$  叫做矩阵  $A$  的逆矩阵。逆矩阵  $A^{-1}$  仅在下述条件下存在: 矩阵  $A$  的行列式不等于零 ( $\det A \neq 0$ ) (参看 § 4)。在三维和二维空间进行坐标变换时, 将用到由给定的矩阵计算逆矩阵的方法, 我们将在 § 5 里介绍这个问题。

例题 1. 求下列两方阵的乘积

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & 7 & 4 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

答案

$$C = AB = \begin{vmatrix} 8 & 19 & 10 & 8 \\ 13 & 12 & 5 & -8 \\ 24 & 40 & 22 & 13 \\ 20 & 35 & 36 & 37 \end{vmatrix}$$

例题 2. 求下面方阵和列矩阵的乘积

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{vmatrix}$$

答案

$$AB = \begin{vmatrix} 30 \\ 19 \\ 76 \\ 72 \end{vmatrix}$$

### § 3 矩阵的微分

前几节介绍的矩阵知识是进行坐标变换所必需的。

在确定运动的速度时(参看 § 24), 需要对矩阵进行微分。

矩阵各元素可以是某个变量  $t$  的函数。由式(1.1)表示的矩阵  $A$  的导数按下式确定

$$\frac{dA}{dt} = \begin{vmatrix} \frac{da_{11}}{dt} & \frac{da_{12}}{dt} & \frac{da_{13}}{dt} & \frac{da_{14}}{dt} \\ \frac{da_{21}}{dt} & \frac{da_{22}}{dt} & \frac{da_{23}}{dt} & \frac{da_{24}}{dt} \\ \frac{da_{31}}{dt} & \frac{da_{32}}{dt} & \frac{da_{33}}{dt} & \frac{da_{34}}{dt} \\ \frac{da_{41}}{dt} & \frac{da_{42}}{dt} & \frac{da_{43}}{dt} & \frac{da_{44}}{dt} \end{vmatrix} \quad (3.1)$$

矩阵乘积  $C = AB$  的微分, 必须遵守下述法则

$$\frac{dC}{dt} = A \frac{dB}{dt} + \frac{dA}{dt} B \quad (3.2)$$

### § 4 坐标变换的矩阵法

本节和下文里将利用右手笛卡儿坐标系。在右手系中, 当观察者从  $z$  轴的正向观察时,  $x$  轴沿逆时针方向转至  $y$  轴。

已知两个坐标系  $S_j(x_j, y_j, z_j)$  和  $S_i(x_i, y_i, z_i)$ 。假定坐标系  $S_i$  绕  $x_j$  轴旋转了  $\varphi$  角, 并



且其原点移动了一个距离(图 1)。在以下的行文里,  $a$ ,  $b$  和  $c$  是决定旧坐标系  $S_j$  的原点  $O_j$  在新坐标系  $S_i$  中的位置的算术值。

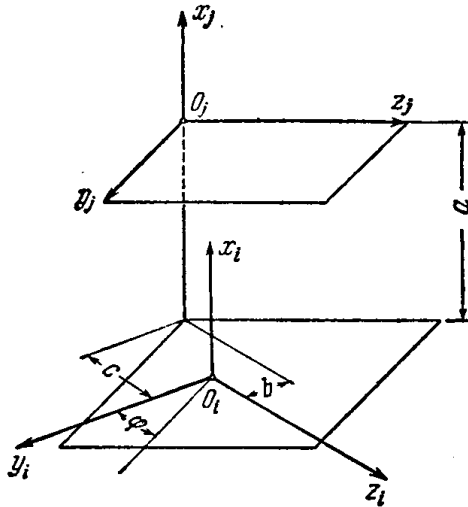


图 1

利用解析几何的一般法则, 点  $M$  在两个坐标系  $S_j$  和  $S_i$  中的各个坐标间的关系式为

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_j + a \\ y_i &= y_j \cos \varphi - z_j \sin \varphi - b \\ z_i &= y_j \sin \varphi + z_j \cos \varphi - c \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

如果  $\varphi$ ,  $a$ ,  $b$  和  $c$  是时间  $t$  的函数, 则方程式 (4.1) 表示, 坐标系  $S_i$  相对坐标系  $S_j$  运动时, 点  $M$  在坐标系  $S_i$  中的轨迹。此时, 把点  $M(x_j, y_j, z_j)$  的坐标看作常量。

显然, 坐标  $x_j, y_j, z_j$  的系数可以方便地表示成一个四阶矩阵的元素。为了利用这种四阶矩阵, 必须预先引进所谓齐次坐标。采用齐次坐标时, 一个点在坐标系  $x_j, y_j, z_j$  中的位置, 将由四个量  $x'_j, y'_j, z'_j, t'_j$  确定。四个新量不同时等于零, 并且与  $x_j, y_j, z_j$  的关系式为

$$x_j = \frac{x'_j}{t'_j} \quad y_j = \frac{y'_j}{t'_j} \quad z_j = \frac{z'_j}{t'_j}$$

因此, 四个新量  $x'_j, y'_j, z'_j, t'_j$  仅有三个量是独立的。

同理, 为了确定一个点在坐标系  $x_i, y_i, z_i$  中的位置, 我们将利用齐次坐标  $x'_i, y'_i, z'_i, t'_i$ , 这里

$$x_i = \frac{x'_i}{t'_i} \quad y_i = \frac{y'_i}{t'_i} \quad z_i = \frac{z'_i}{t'_i}$$

假定  $t'_j = t'_i = 1$ , 可以很简单地将齐次坐标变换为普通坐标, 或进行相反的变换。这样, 采用齐次坐标时,  $M$  点在相应的两个坐标系中的位置分别表示为

$$M(x_j, y_j, z_j, t_j) \quad \text{和} \quad M(x_i, y_i, z_i, t_i)$$

这里  $t_j = t_i = 1$ 。

利用新的记法, 公式 (4.1) 可写成下式

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_j + t_j a \\ y_i &= y_j \cos \varphi - z_j \sin \varphi - t_j b \\ z_i &= y_j \sin \varphi + z_j \cos \varphi - t_j c \\ t_i &= t_j = 1 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

在  $x_i, y_i, z_i, t_i$  的表达式中, 我们可将  $x_j, y_j, z_j, t_j$  之前的各个系数写作下述矩阵的元素

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & -b \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (4.3)$$

矩阵  $M_{ij}$  中的下标“ $ij$ ”表示从坐标系  $x_j, y_j, z_j$  变换到坐标系  $x_i, y_i, z_i$ 。同理, 如果矩阵为  $M_{ji}$ , 则表示从坐标系  $x_i, y_i, z_i$  变换到坐标系  $x_j, y_j, z_j$ 。

利用双下标记法, 矩阵  $M_{ij}$  可写成

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

在两个坐标系中, 坐标轴  $x, y, z$  分别用号数 1, 2, 3 表示.

在矩阵  $M_{ij}$  中, 元素  $a_{kl}$  ( $k=1, 2, 3; l=1, 2, 3$ ) 是号数为  $k$  的新坐标轴和号数为  $l$  的旧坐标轴所组成的夹角的余弦. 号数  $k=1, 2, 3$  分别表示新坐标轴  $x_i, y_i, z_i$ , 而号数  $l=1, 2, 3$  表示旧坐标轴  $x_j, y_j, z_j$ . 采用这种记法时, 例如, 元素  $a_{23} = \cos(\widehat{y_i, z_j})$ . 元素  $a_{14}, a_{24}, a_{34}$  表示旧坐标系  $(x_j, y_j, z_j)$  的坐标原点  $O_j$  在新坐标系  $(x_i, y_i, z_i)$  中的投影.

公式(4.2)可以看作一个方阵和一个矢量列矩阵相乘的结果, 即

$$\begin{vmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ t_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \\ t_j \end{vmatrix} \quad (4.4)$$

简写为

$$r_i = M_{ij} r_j \quad (4.5)$$

式中  $r_i$  和  $r_j$ ——同一点在坐标系  $S_i$  和  $S_j$  中的两个径矢的列矩阵.

应当指出, 方阵  $M_{ij}$  必须位于列矩阵  $r_j$  的左边. 这条法则必须遵守, 因为矩阵的乘法不具有交换性质, 即乘积与因子的顺序有关.

下面我们将确定同一个矢量在不同坐标系中的投影间的关系. 例如, 已知法线矢量在坐标系  $S_j(x_j, y_j, z_j)$  中的投影为  $n_{xj}, n_{yj}, n_{zj}$ , 现在要求它们在坐标系  $S_i(x_i, y_i, z_i)$  中的投影  $n_{xi}, n_{yi}, n_{zi}$ . 因为坐标系原点移动时, 矢量的投影不变, 所以投影变换公式为

$$\left. \begin{aligned} n_{xi} &= a_{11}n_{xj} + a_{12}n_{yj} + a_{13}n_{zj} \\ n_{yi} &= a_{21}n_{xj} + a_{22}n_{yj} + a_{23}n_{zj} \\ n_{zi} &= a_{31}n_{xj} + a_{32}n_{yj} + a_{33}n_{zj} \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

将公式(4.6)表示为方阵和矢量列矩阵的乘积, 则

$$\begin{vmatrix} n_{xi} \\ n_{yi} \\ n_{zi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n_{xj} \\ n_{yj} \\ n_{zj} \end{vmatrix} \quad (4.7)$$

简写为

$$n_i = L_{ij} n_j \quad (4.8)$$

如果从方阵  $M_{ij}$  中划去第四行和第四列, 则得到方阵  $L_{ij}$ .

现在研究方程式(4.2). 当  $\varphi, a, b$  和  $o$  的值固定时, 方程组(4.2)对坐标  $x_j, y_j, z_j, t_j$  是线性方程组, 给出这些坐标值, 就可唯一地确定坐标  $x_i, y_i, z_i, t_i$  的值. 方程组(4.2)表示坐标系  $S_j$  中的点在坐标系  $S_i$  中的线性映射.

我们来证明, 如果  $|M_{ij}| \neq 0$  (矩阵  $M_{ij}$  的行列式不等于零), 逆映射——坐标系  $S_i$  中的点在坐标系  $S_j$  中的映射——也将是唯一的.

给出方程式(4.2)中  $x_i, y_i, z_i, t_i$  的值需要求出  $x_j, y_j, z_j, t_j$  的值. 为此, 必须解由四个线性方程式组成的方程组(4.2). 由线性代数可知, 如果  $|M_{ij}| \neq 0$ , 方程组的解将是唯