

齿轮啮合理论

陈维荣 著

煤炭工业出版社

内 容 提 要

本书系统地论述了齿轮啮合的一般理论，并介绍了它在几种齿轮副和齿轮刀具设计中的应用。所采用的方法主要是“直接法”，并利用旋转矩阵作为主要分析工具。书中主要内容包括：平面啮合理论，空间单、双自由度啮合理论，平行轴齿轮副与齿条齿轮副，正交圆柱蜗杆副，平面包络环面蜗杆副，回转面工具以及滚刀齿廓的计算和不干涉条件等。

本书可供齿轮研究工作者、高等学校机械类有关专业的教师和研究生以及高年级学生、机械设计和机械制造技术人员参考。

责任编辑：向云霞

齿 轮 啮 合 理 论

陈 惟 荣 著

*

煤炭工业出版社 出版

(北京安定门外和平北路16号)

煤炭工业出版社印刷厂 印刷

新华书店北京发行所 发行

*

开本 $850 \times 1168^{1/32}$ 印张 $12^{5/8}$
字数 332 千字 印数 1—4,200
1986年5月第1版 1986年5月第1次印刷
书号 15035·2741 定价 3.70元

前 言

齿轮啮合理论是一门技术科学，它在高副机构的分析和综合、齿轮机床和齿轮刀具的设计、以及机械加工中应用广泛。由于生产发展的需要和电子计算机的使用，近年来齿轮啮合理论发展较快，其中我国学者作出了可贵的贡献。

本书是根据作者1981年在洛阳讲学的材料以及后来为齿轮课题研究生写的《齿轮啮合理论补充讲义》，经过补充、修改、整理而写成的，其中包括作者多年来的研究成果。

本书的目的是系统地论述齿轮啮合的一般理论，并介绍它在几种齿轮副和齿轮刀具设计中的应用。其中以啮合的一般理论作为重点，讨论了空间单、双自由度啮合的各个主要问题，如界限曲线、滑动率、诱导法曲率和干涉等。所采用的方法主要是直接法，并利用旋转矩阵作为主要分析工具。在论述中尽量注意理论的普遍性和系统性，使一般理论的结果(一般公式)能统一应用于工程中的各种特殊情况。此外，力求使推导简捷，并使所得结果便于实际应用。书中平面啮合理论单列一章，以使内容的叙述由浅入深、由简到繁，便于读者阅读；此外，也便于只需了解平面问题的读者查阅。

本书采用的直接法〔2〕简便有效，有些问题（如滚刀铲磨砂轮廓线的计算和曲率干涉条件）只有用直接法才能得出精确解〔27〕。书中的方程（包括曲面方程、啮合方程等）均写成矩阵——矢量形式，利用旋转矩阵的性质，可以在数组运算阶段把它们化为最简形式，从而使推导和运算大为简化，并能解决一些尚未解决的复杂问题；同时，利用“除去产形面沿自身的运动或附加包络面沿自身的运动”的方法，可以顺利地处理各种退化情况，从而使一般公式能应用于各种特殊情况（如盘形工具、指形工具、滚刀

以及螺旋齿轮齿廓的计算和曲率干涉条件等)。本书利用干涉界函数的符号作为曲率干涉的判据,改进了现有方法。书中把单自由度啮合理论的主要结果推广到双自由度的情况,首次形成系统的双自由度啮合理论^[14]。此外,还对齿轮副的起始曲面、共轭环面的形成、圆弧齿轮副的啮合分析等作了深入的讨论。

阅读本书应具有微分几何中曲线和曲面的基本知识,包括曲面的法曲率和短程挠率的知识,这方面可参阅文献^[3]中的有关章节。此外,在第四章中用到高等代数中二次型的基本知识。对于初次了解啮合理论的读者,可把第四章和第九章放在最后阅读。

作者在写作和研究工作中,得到南开大学、上海工具厂和天津手表厂等单位的帮助;研究生王晓蓉同志帮助绘图,并进行啮合区实例计算;洛阳工学院陈勋副教授帮助设计封面;本书的写作得到本院冯豫、王墨林副教授和郑州机械研究所林庆元工程师的大力支持;初稿承西安交通大学乐兑谦教授仔细审阅,提出了宝贵意见,在此一并表示衷心感谢。

由于作者水平有限,写作时间短促,书中疏误之处,恳请读者批评指正。

作 者

一九八四年五月

于山东矿业学院

目 录

前言	
第一章 绪论	1
§ 1-1 概述	1
§ 1-2 旋转矩阵及其性质	3
§ 1-3 矢量表示式的坐标系变换	9
§ 1-4 矢量导数的坐标系变换	11
第二章 平面啮合理论	13
§ 2-1 常用的平面曲线	13
§ 2-2 平面高副机构的瞬心线	19
§ 2-3 共轭曲线的方程式	25
§ 2-4 共轭曲线的奇异点和啮合界限点	33
§ 2-5 共轭曲线的滑动率和曲率	36
§ 2-6 Euler-Savary公式	39
§ 2-7 不发生曲率干涉的条件与干涉界限点	42
§ 2-8 等距曲线和圆族的包络线	50
§ 2-9 平面高副机构的压力角	53
§ 2-10 例题	55
§ 2-11 平面高副机构的传动规律	77
第三章 空间单自由度啮合理论	82
§ 3-1 圆柱螺旋面	82
§ 3-2 共轭曲面方程式	87
§ 3-3 共轭曲面的奇异点	96
§ 3-4 接触线族的包络线和判别曲线	97
§ 3-5 啮合界限曲线和极限法线点曲线	104
§ 3-6 共轭曲面的滑动率和平均法向速度	108
§ 3-7 曲面的曲挠矢和诱导曲挠矢	114
§ 3-8 共轭曲面的法曲率和诱导法曲率	120

§ 3-9	不发生曲率干涉的条件与切齿干涉现象	131
§ 3-10	空间高副机构的瞬轴面	137
§ 3-11	齿轮副的起始曲面	144
§ 3-12	啮合轴	152
§ 3-13	共轭廓面的形成方法	156
§ 3-14	等距曲面和等距共轭曲面	161
§ 3-15	例题	165
§ 3-16	空间高副机构的传动规律	184
第四章	空间双自由度啮合理论	186
I.	双自由度共轭曲面的一般理论	186
§ 4-1	共轭曲面的方程式和奇异点	186
§ 4-2	共轭曲面的参数曲线和退化条件	192
§ 4-3	共轭曲面的法曲率和诱导法曲率	193
§ 4-4	不干涉条件	199
II.	圆柱齿轮双自由度范成原理	200
§ 4-5	工具螺旋面的共轭工件曲面	200
§ 4-6	起始曲面和近似计算	205
§ 4-7	当量齿条曲面和共轭工具曲面	212
§ 4-8	交错轴斜齿轮副	216
§ 4-9	例题	217
第五章	平行轴齿轮副与齿条齿轮副	230
§ 5-1	平行轴齿轮副的一般情形	230
§ 5-2	齿条齿轮副的一般情形	240
§ 5-3	环面和法面圆弧螺旋面	246
§ 5-4	线接触圆弧齿轮副	249
§ 5-5	用齿条刀具加工圆弧齿轮	253
§ 5-6	点接触圆弧齿轮副	256
§ 5-7	双圆弧齿轮副	265
第六章	正交圆柱蜗杆副	268
§ 6-1	正交圆柱蜗杆副的一般情形	268
§ 6-2	直纹螺旋面圆柱蜗杆副	277
§ 6-3	圆弧齿圆柱蜗杆副	284
§ 6-4	圆环面包络圆柱蜗杆副	287

第七章	环面蜗杆副	294
§ 7-1	瞬时双线接触	295
§ 7-2	平面包络环面蜗杆副 (直接展成法)	304
§ 7-3	平面包络环面蜗杆副 (间接展成法)	315
§ 7-4	直廓环面蜗杆副	323
第八章	回转面工具的廓线计算和不干涉条件	337
§ 8-1	用盘形工具加工螺旋面	337
§ 8-2	用指形工具加工螺旋面	348
§ 8-3	用盘形砂轮铲磨滚刀	353
第九章	滚刀齿廓的计算和不干涉条件	362
§ 9-1	按给定工件螺旋面求滚刀螺旋面	362
§ 9-2	滚刀的齿廓及其切线的斜率	367
§ 9-3	不干涉条件	374
§ 9-4	滚刀有关参数的确定	376
§ 9-5	例题	382
附录 I	解析曲线的奇异点	384
附录 II	平面解析曲线族的包络线	389
附录 III	曲面么法矢的方向导数	393
参考文献		394

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100

第一章 绪 论

§ 1-1 概 述

一、啮合理论的性质和应用

齿轮机构是机器和仪器中应用最广的一种机构。齿轮啮合理论是从几何学和运动学观点来研究齿轮机构（指含三个构件的齿轮机构）的一门技术科学。啮合理论虽然最早是由于齿轮设计、制造的需要而发展起来的，但它的一般原理同样适用于其它高副机构（如凸轮机构）；如果把工具和工件看作构件，则它也适用于机械加工的情况。啮合理论在工程中有广泛的应用，概括起来主要有以下几个方面：

1) 高副机构的设计和创新是以啮合理论作为基础的。对齿轮机构来说，几何计算就是啮合理论的直接应用。如所周知，轮齿的弯曲强度或齿面的接触强度，与齿形或两齿面的综合曲率有关，而齿形和综合曲率有赖于啮合理论来确定。此外如果不知道共轭齿面形成的基本规律，要创造一种新型齿轮是不可能的。

2) 齿轮机床是根据切齿方案来设计的，而切齿方案的拟定以及齿轮刀具的设计，也都要以啮合理论作为依据。

3) 在机械加工中，特别是精密、复杂曲面的加工，也要用到啮合理论。

由此可见，齿轮啮合理论和生产实践有密切的联系。

二、分析方法和数学工具

随着生产的发展，机器运转的速度和载荷日益增大，对齿轮提出愈来愈高的要求，新型齿轮不断出现，加以近年来电子计算机的广泛应用，这些都促进了啮合理论的发展。这里不叙述它的发展史，只是指出啮合理论发展的一个特点是：所用分析方法和数学工具不断更新，使问题的求解逐步简化，从而能解决愈来愈

复杂的问题。就确定共轭齿面的方法来说，先后有包络法、X. И. Гохман法、运动学法等〔1〕。运动学法由于比较简便，因而逐渐取代了其它方法。目前在国内外运动学法得到广泛的应用。这种方法根据运动学条件推导啮合方程式，具有鲜明的运动学意义。近年来提出了直接法〔2〕，它根据两齿面相切接触的几何条件推导啮合方程式，具有清晰的几何意义，并且也相当简便。本书采用的方法以直接法为主，以运动学法为辅。至于啮合理论中使用的数学工具，由于种类较多，此处不一一列举。本书采用旋转矩阵作为主要的数学工具。这种数学方法具有以下特点：

1) 基本旋转矩阵总共只有三个，用它可以方便地实现矢量的旋转和坐标系变换，并且使用直观，书写简洁。

2) 利用旋转矩阵的性质可以使运算显著简化。

3) 方程式写成矩阵——矢量形式，即式中既包含矩阵运算（矩阵的乘法、微分等），也包含矢量运算（矢量的标积、矢积等）。这种方程式的表达能力强，应用比较灵活。

由于采用了这种数学方法，从啮合函数、界限函数和诱导法曲率的一般公式出发，在各种特殊情况下都可以比较方便地得出相应公式的最简形式，使推导过程简化。

三、啮合理论的主要内容

啮合理论的研究对象是共轭轮廓曲面（对于齿轮机构来说是共轭齿面）。若两构件作给定的相对运动时，其轮廓曲面（或轮廓曲线，简称廓面或廓线）满足以下条件：

1) 两廓面（或两廓线）在任一瞬时一条曲线或一点（或以一点）接触——接触条件；

2) 两廓面（或两廓线）在任一接触点相切——相切条件；

3) 在任一接触点的邻域内两构件的实体不发生干涉——不干涉条件；

则称该两廓面（或廓线）在给定的相对运动下互为共轭廓面（或共轭廓线）。若两曲面（或曲线）满足接触和相切条件，则称该两曲面（或曲线）互为共轭曲面（或共轭曲线）。在任一瞬时以一条曲

线或一点接触的共轭曲面，分别称为线接触或点接触共轭曲面。

在啮合理论中，我们研究如何确定共轭曲面的方程式、界限曲线、滑动率、曲率以及不干涉条件，等等。

如果两构件之间的相对运动是平面平行运动，且其廓面是母线垂直于运动平面的柱面（如平行轴直齿轮副），这时只需研究运动平面内的啮合情况即可，于是对共轭曲面的研究就转化为对共轭曲线的研究。这种啮合情况称为平面啮合；而限于上述情况的啮合称为空间啮合。

在空间啮合中，两构件的相对运动一般具有一个或两个自由度，即它们的相对位置由一个或两个独立参数来确定，相应的共轭曲面分别称为单自由度共轭曲面和双自由度共轭曲面。应当指出，当给定一个曲面（产形面）为螺旋面（回转面或柱面可以看作是螺旋面的特殊情况）时，可以作三个（或两个）自由度的相对运动，其中一个自由度是该曲面绕自身轴线作螺旋运动，螺旋运动参数和螺旋面的螺旋参数相同。螺旋面的这种运动是沿自身的运动（即其上任一点的运动轨迹都在该曲面上），它不改变与之啮合的另一曲面在空间的位置，即不影响它和另一曲面的啮合，所以可以把这一自由度除去。这种共轭曲面实质上是双自由度（或单自由度）共轭曲面。

在平面啮合中，两构件只能作单自由度相对运动。

本书前一部分（第二章至第四章）讨论平面啮合和空间单、双自由度啮合的一般理论；后一部分讨论一般理论的应用，包括对几种齿轮副啮合特性的分析（第五章至第七章），以及在工具设计中的应用（第八、九章）。

§ 1-2 旋转矩阵及其性质

一、矩阵与矢量的乘积

设 U 为三维空间中的矢量， $S_j(O_j; x_j, y_j, z_j)$ ($j=1, 2, \dots$) 为右旋直角坐标系。矢量 U 在坐标系 S_j 中的表示式为^①：

① 在本书中用黑体字母表示矢量或矩阵。

$$\mathbf{U}^{(j)} = U_{x_j} \mathbf{i} + U_{y_j} \mathbf{j} + U_{z_j} \mathbf{k},$$

式中 U_{x_j} 、 U_{y_j} 、 U_{z_j} ——矢量 \mathbf{U} 在相应坐标轴上的投影。约定在矢量表示式中坐标轴单位矢量 \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 、 \mathbf{k} 不注下标，而用矢量符号右上角括号内的数字（坐标系的编号）指明其坐标系。矢量 \mathbf{U} 在 S_j 中也可表为矩阵形式，即

$$\mathbf{U}^{(j)} = \begin{pmatrix} U_{x_j} \\ U_{y_j} \\ U_{z_j} \end{pmatrix},$$

该矩阵称为矢量 \mathbf{U} 在 S_j 中的列阵。设 $\tilde{\mathbf{M}}$ 为三阶方阵。矩阵 $\tilde{\mathbf{M}}$ 与矢量 \mathbf{U} 在坐标系 S_j 中的乘积为一矢量 \mathbf{P} ，它在 S_j 中的列阵等于矩阵 $\tilde{\mathbf{M}}$ 与矢量 \mathbf{U} 在 S_j 中的列阵的乘积，即

$$\mathbf{P}^{(j)} = \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{U}^{(j)}.$$

显然，矩阵与矢量的乘法服从矩阵乘法的规则，如结合律、分配律以及乘积的微分法则等，并且交换律一般不成立，即

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}}_1 (\tilde{\mathbf{M}}_2 \mathbf{U}^{(j)}) &= (\tilde{\mathbf{M}}_1 \tilde{\mathbf{M}}_2) \mathbf{U}^{(j)}, \\ \tilde{\mathbf{M}} (a \mathbf{U}_1^{(j)} + b \mathbf{U}_2^{(j)}) &= a \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{U}_1^{(j)} + b \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{U}_2^{(j)}, \end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\lambda} (\tilde{\mathbf{M}} \mathbf{U}^{(j)}) = \left(\frac{d\tilde{\mathbf{M}}}{d\lambda} \right) \mathbf{U}^{(j)} + \tilde{\mathbf{M}} \left(\frac{d\mathbf{U}^{(j)}}{d\lambda} \right) \textcircled{1},$$

式中 a 、 b ——任意实数；

λ ——实参变数。

二、旋转矩阵

引入以下矩阵记号：

① 矩阵导数定义为矩阵中各元素的导数组成的矩阵。设 $\tilde{\mathbf{M}}$ 为 $m \times n$ 阶矩阵，其元素 a_{ij} 是 λ 的函数，即 $\tilde{\mathbf{M}} = \{a_{ij}\}_{m \times n}$ ，则 $\frac{d\tilde{\mathbf{M}}}{d\lambda} = \left\{ \frac{da_{ij}}{d\lambda} \right\}_{m \times n}$ 。不难直接验证，乘积的微分法则成立。

$$\tilde{I}_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \tilde{J}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

$$\tilde{K}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

在以上三式中，由任一式作轮换 $\tilde{K} \xrightarrow{I} \tilde{J}$ ，并且矩阵元素的行号和列号

作轮换 $3 \xrightarrow{1} 2$ ，即可得出其余两式。

现考察乘积 $\tilde{K}_\varphi U^{(j)}$ 的几何意义。

$$\begin{aligned} \tilde{K}_\varphi U^{(j)} &= (U_{x_j} \cos\varphi - U_{y_j} \sin\varphi) \mathbf{i} \\ &\quad + (U_{x_j} \sin\varphi + U_{y_j} \cos\varphi) \mathbf{j} + U_{z_j} \mathbf{k}. \end{aligned}$$

上式右边前两个矢量之和表示矢量 $\tilde{K}_\varphi U^{(j)}$ 在 $x_j o_j y_j$ 平面上的投影，它与复数 $(U_{x_j} + iU_{y_j})e^{i\varphi}$ 相对应；由复数乘法的几何意义知，它可由矢量 U 在 $x_j o_j y_j$ 平面上的投影 U_{xy} 绕 z_j 轴旋转 φ 角后得到，矢量 $\tilde{K}_\varphi U^{(j)}$ 在 z_j 轴上的投影为 U_{z_j} 。因此， $\tilde{K}_\varphi U^{(j)}$ 在坐标系 S_j 中代表矢量 U 绕 z_j 轴旋转 φ 角（旋转方向按右手法则确定）后得到的矢量（参看图1-1）。 $\tilde{I}_\varphi U^{(j)}$ 和 $\tilde{J}_\varphi U^{(i)}$ 亦有类似的几何意义。 \tilde{I}_φ 、 \tilde{J}_φ 、 \tilde{K}_φ 称为基本旋转矩阵，简称旋转矩阵或旋转算子。由此可见，任一旋转矩阵与矢量在坐标系 S_j 中的乘积，等于该矢量绕 S_j 中相应的坐标轴旋转 φ 角后得到的矢量。

由定义容易得出，旋转矩阵与坐标轴单位矢量的乘积为：

$$\begin{aligned} \tilde{K}_\varphi \mathbf{k} &= \mathbf{k}, \quad \tilde{J}_\varphi \mathbf{j} = \mathbf{j}, \quad \tilde{I}_\varphi \mathbf{i} = \mathbf{i}, \\ \tilde{K}_\varphi \mathbf{i} &= \cos\varphi \mathbf{i} + \sin\varphi \mathbf{j}, \quad \dots\dots, \\ \tilde{K}_\varphi \mathbf{j} &= -\sin\varphi \mathbf{i} + \cos\varphi \mathbf{j}, \quad \dots\dots; \end{aligned}$$

公式后面的省略号“……”代表按顺序 $\tilde{K} \xrightarrow{I} \tilde{J}$ 、 $\mathbf{k} \xrightarrow{i} \mathbf{j}$ 或 $3 \xrightarrow{1} 2$

轮换而得的其余两个等式（在本节中以下同）。由以上各式可见，旋转矩阵与坐标轴单位矢量的乘积为该矩阵中相应的列阵。

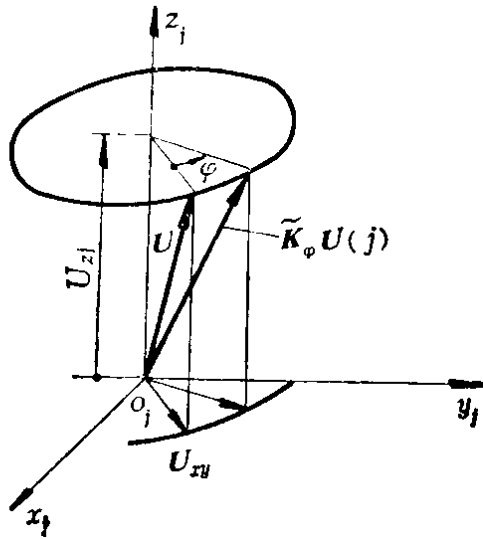


图 1-1 矢量绕坐标轴的旋转

三、旋转矩阵的性质

旋转矩阵具有以下性质：

$$1. \tilde{K}_0 U^{(j)} = U^{(j)}, \dots, \quad (1-1)$$

即 \tilde{I}_0 、 \tilde{J}_0 、 \tilde{K}_0 为单位矩阵；

$$2. \tilde{K}_{\varphi_1} \tilde{K}_{\varphi_2} U^{(j)} = \tilde{K}_{\varphi_2} \tilde{K}_{\varphi_1} U^{(j)} = \tilde{K}_{\varphi_1 + \varphi_2} U^{(j)}, \dots, \quad (1-2)$$

由此可见同类旋转矩阵的乘法服从交换律；

推论： \tilde{K}_φ 和 $\tilde{K}_{-\varphi}$ 互为逆矩阵，即 $\tilde{K}_{-\varphi} = \tilde{K}_\varphi^{-1}$ ；容易看出，旋转矩阵的转置相当于 φ 变号，故

$$\tilde{K}_\varphi^T = \tilde{K}_\varphi^{-1}, \dots;$$

由此可见，旋转矩阵是正交矩阵；

$$3. (\tilde{K}_\varphi U_1^{(j)}) (\tilde{K}_\varphi U_2^{(j)}) = U_1^{(j)} U_2^{(j)}, \dots; \quad (1-3)$$

$$4. (\tilde{K}_\varphi U_1^{(j)}) \times (\tilde{K}_\varphi U_2^{(j)}) = \tilde{K}_\varphi (U_1^{(j)} \times U_2^{(j)}), \dots; \quad (1-4)$$

推论：设 \tilde{M} 为若干基本旋转矩阵的乘积，则

$$(\tilde{M}, U_1^{(j)}) (\tilde{M}, U_2^{(j)}) = U_1^{(j)} U_2^{(j)},$$

$$(\tilde{M}, U_1^{(j)}) \times (\tilde{M}, U_2^{(j)}) = \tilde{M}, (U_1^{(j)} \times U_2^{(j)});$$

由此可见，在标积中旋转矩阵公因子可以消去；在矢积中旋转矩阵公因子可以提出；

$$5. \left(\frac{d\tilde{\mathbf{K}}_\varphi}{d\varphi} \right) \mathbf{U}^{(j)} = \tilde{\mathbf{K}}_\varphi (\mathbf{k} \times \mathbf{U}^{(j)}), \dots, \quad (1-5)$$

$$6. \tilde{\mathbf{J}}_{-\Sigma} \tilde{\mathbf{K}}_\varphi \tilde{\mathbf{J}}_\Sigma = \tilde{\mathbf{E}} + 2\sin \frac{\varphi}{2} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -\cos^2 \Sigma \sin \frac{\varphi}{2} & -\cos \Sigma \cos \frac{\varphi}{2} & -\sin \Sigma \cos \Sigma \sin \frac{\varphi}{2} \\ \cos \Sigma \cos \frac{\varphi}{2} & -\sin \frac{\varphi}{2} & \sin \Sigma \cos \frac{\varphi}{2} \\ -\sin \Sigma \cos \Sigma \sin \frac{\varphi}{2} & -\sin \Sigma \cos \frac{\varphi}{2} & -\sin^2 \Sigma \sin \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix},$$

(1-6)

$$\dots,$$

$$\tilde{\mathbf{I}}_{-\Sigma} \tilde{\mathbf{K}}_\varphi \tilde{\mathbf{I}}_\Sigma = \tilde{\mathbf{E}} + 2\sin \frac{\varphi}{2} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -\sin \frac{\varphi}{2} & -\cos \Sigma \cos \frac{\varphi}{2} & \sin \Sigma \cos \frac{\varphi}{2} \\ \cos \Sigma \cos \frac{\varphi}{2} & -\cos^2 \Sigma \sin \frac{\varphi}{2} & \sin \Sigma \cos \Sigma \sin \frac{\varphi}{2} \\ -\sin \Sigma \cos \frac{\varphi}{2} & \sin \Sigma \cos \Sigma \sin \frac{\varphi}{2} & -\sin^2 \Sigma \sin \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix},$$

(1-7)

式中 $\tilde{\mathbf{E}}$ —— 单位矩阵。

以上各式不难直接验证。今验证式 (1-5)。

$$\text{左边} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{x_j} \\ U_{y_j} \\ U_{z_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_{x_j} \sin \varphi - U_{y_j} \cos \varphi \\ U_{x_j} \cos \varphi - U_{y_j} \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textcircled{1}$$

$$\text{右边} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -U_{y_j} \\ U_{x_j} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_{y_j} \cos \varphi - U_{x_j} \sin \varphi \\ -U_{y_j} \sin \varphi + U_{x_j} \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix},$$

由此可见，左边 = 右边。证毕。

又

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\varphi} = \tilde{\mathbf{E}} + 2\sin \frac{\varphi}{2} \begin{pmatrix} -\sin \frac{\varphi}{2} & -\cos \frac{\varphi}{2} & 0 \\ \cos \frac{\varphi}{2} & -\sin \frac{\varphi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots,$$

利用上式容易得出式 (1-6) 和 (1-7)。

性质 1 和 2 的几何意义是很明显的。性质 3 表示：两矢量绕同一轴旋转 φ 角后其标积不变。性质 4 表示：两矢量绕同一轴旋转 φ 角后的矢积，可由两矢量的矢积绕该轴旋转 φ 角后得到。性质 5 表示：旋转矩阵的导数与矢量的乘积，可由相应的坐标轴单位矢量与该矢量的矢积旋转 φ 角后得到。

在含有矩阵和矢量的代数式中，规定矩阵与矢量的乘法运算先于矢量的乘法运算（矢积或标积）；乘法运算先于加法运算。

四、平面旋转矩阵

今讨论二维空间（平面）的情况。在一平面上取坐标系 S_j (o_j, x_j, y_j)。设 \mathbf{U} 为该平面上的矢量：

$$\mathbf{U}^{(j)} = U_{x_j} \mathbf{i} + U_{y_j} \mathbf{j}。$$

引入平面旋转矩阵：

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\varphi}^* = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}。$$

容易看出，矩阵 $\tilde{\mathbf{K}}_{\varphi}^*$ 相当于复数 $e^{i\varphi}$ ，矩阵 $\tilde{\mathbf{K}}_{\varphi}^*$ 与矢量 \mathbf{U} 的乘积 $\tilde{\mathbf{K}}_{\varphi}^* \mathbf{U}$ 为该矢量在平面内旋转 φ 角（当 $\varphi > 0$ 时逆钟向旋转； $\varphi < 0$ 时顺钟向旋转）后得到的矢量。

显然，上述旋转矩阵的性质 1~4 对于平面旋转矩阵也成立，而性质 5 为：

$$\left(\frac{d}{d\varphi} \tilde{\mathbf{K}}_{\varphi}^* \right) \mathbf{U}^{(j)} = \tilde{\mathbf{K}}_{\varphi}^* \tilde{\mathbf{K}}_{\frac{\pi}{2}}^* \mathbf{U}^{(j)}。 \quad (1-5')$$

如果把平面看作空间的一种特殊情况，则 $\tilde{\mathbf{K}}_{\varphi}^*$ 相当于 $\tilde{\mathbf{K}}_{\varphi}$ 。为书写方便计，以后把 $\tilde{\mathbf{K}}_{\varphi}^*$ 简写为 $\tilde{\mathbf{K}}_{\varphi}$ 。

§ 1-3 矢量表示式的坐标系变换

利用旋转矩阵可以方便地进行矢量表示式的坐标系变换。

一、有一轴重合的两坐标系

如图1-2所示,坐标系 S_1 和 S_2 中 y_1 轴和 y_2 轴重合, z_1 轴至 z_2 轴的有向角(对于 y_1 轴)为 Σ (Σ 的符号由 z_1 轴绕 y_1 轴至 z_2 轴的旋向按右手法则确定)。如果将 x_1 、 z_1 轴连同矢量 \mathbf{R} 一起绕 y_2 轴旋转 Σ 角,坐标系 S_1 将和 S_2 重合,而矢量 \mathbf{R} 旋转后得到矢量 \mathbf{R}' 。显然,矢量 \mathbf{R}' 在 S_2 中的表示式与矢量 \mathbf{R} 在 S_1 中的表示式相同,即

$$\mathbf{R}'^{(2)} = \mathbf{R}^{(1)};$$

$$\text{又} \quad \mathbf{R}^{(2)} = \tilde{\mathbf{J}}_{-\Sigma} \mathbf{R}'^{(2)},$$

$$\text{故} \quad \mathbf{R}^{(2)} = \tilde{\mathbf{J}}_{-\Sigma} \mathbf{R}^{(1)}, \quad (1-8)$$

$$\text{或} \quad \mathbf{R}^{(1)} = \tilde{\mathbf{J}}_{\Sigma} \mathbf{R}^{(2)}. \quad (1-8')$$

一般地,若两坐标系 S_i 和 S_j 有一轴重合,则矢量 \mathbf{R} 在 S_i 中的列阵等于 S_i 至 S_j 的旋转矩阵和该矢量在 S_j 中的列阵的乘积,即

$$\mathbf{R}^{(i)} = \tilde{\mathbf{M}}_{S_i \rightarrow S_j} \mathbf{R}^{(j)}. \quad (1-9)$$

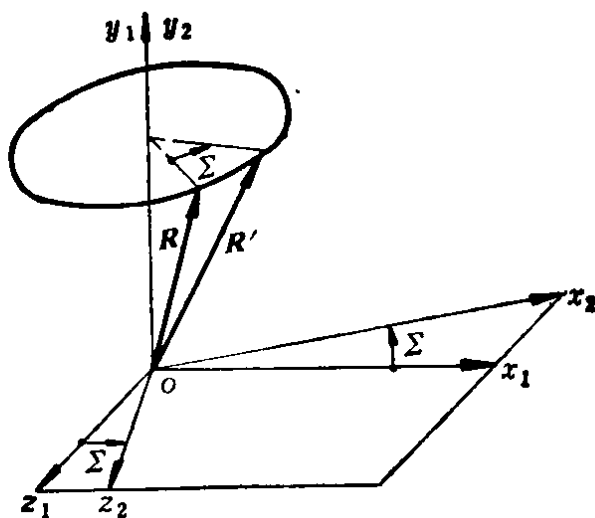


图 1-2 有一轴重合的两坐标系

二、任意两坐标系

设任意给定两坐标系 S_1 和 S_2 ,因坐标系平移后矢量的表示式不变,不妨取 S_1 与 S_2 的原点重合,如图1-3所示。取 x_2oz_2 平面和

x_1Oy_1 平面的交线为 x_3 轴, 并取 y_3 轴和 y_2 轴重合, 得坐标系 S_3 。再取 x_4 轴和 x_3 轴重合, z_4 轴和 z_1 轴重合, 得坐标系 S_4 。设 α 、 β 、 γ 分别表示 x_1 至 x_4 轴(对于 z_1 轴)、 y_4 至 y_3 轴(对于 x_3 轴)、 z_3 至 z_2 轴(对于 y_2 轴)所成的有向角, 则 S_4 可由 S_1 绕 z_1 轴旋转 α 角得到, S_3 可由 S_4 绕 x_4 轴旋转 β 角得到, S_2 可由 S_3 绕 y_3 轴旋转 γ 角得到。现求 $R^{(1)}$ 和 $R^{(2)}$ 之间的变换。

由式(1-9)知, 矢量 R 的表示式由 S_1 至 S_4 、 S_4 至 S_3 、 S_3 至 S_2 的变换为:

$$\begin{aligned} R^{(4)} &= \tilde{K}_{-\alpha} R^{(1)}, \\ R^{(3)} &= \tilde{I}_{-\beta} R^{(4)}, \\ R^{(2)} &= \tilde{J}_{-\gamma} R^{(3)}, \\ R^{(2)} &= \tilde{J}_{-\gamma} \tilde{I}_{-\beta} \tilde{K}_{-\alpha} R^{(1)}, & (1-10) \\ \text{故} & \\ \text{或} & \\ R^{(1)} &= \tilde{K}_{\alpha} \tilde{I}_{\beta} \tilde{J}_{\gamma} R^{(2)}. & (1-10') \end{aligned}$$

若 R 为某点 M 的径矢(即以原点 O 为始点、点 M 为终点的矢量), 将式(1-10)展开, 即得点 M 的坐标 (x_1, y_1, z_1) 至 (x_2, y_2, z_2) 的变换公式:

$$\begin{aligned} x_2 = & (x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha) \cos \gamma + [(y_1 \cos \alpha - \\ & - x_1 \sin \alpha) \sin \beta - z_1 \cos \beta] \sin \gamma, \end{aligned}$$

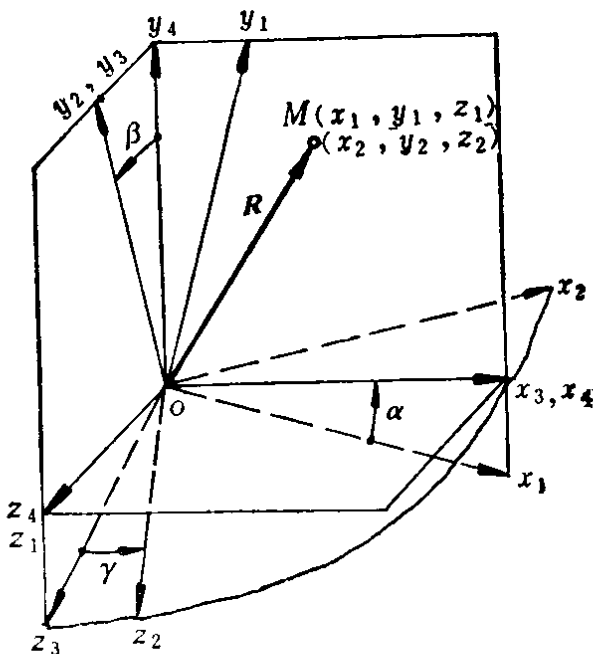


图 1-3 任意两坐标系