中等专业学校教学参考书

立体几何

工科中专数学教材编写组编

人民教育出版社

92

中等专业学校教学参考书

立 体 几 何

工科中专数学教材编写组编

·

人民教育出版社出版

天津人民出版社重印

天津市新华书店发行

天津市第一印刷厂印装

·

1960年6月第一版 1964年8月第二版

1978年7月天津第1次印刷

书号 13012·0152 定价 0.32 元

目　录

第一章 直线和平面

在平面几何里，我们研究了关于平面图形的一些基本性质和这些性质的应用，但是在生产实际中，只知道一些平面图形的性质是很不够的．例如：在修建一个土坝时，必须算出它需要多少方土；要用多大的一块铁，才能铸出某一机器的零件；在设计中，怎样画出某一建筑物或机器零件的平面图，这都需要知道一些空间图形的性质．

由点、线、面所构成的图形，当所有各点不完全都在同一平面上时，叫做空间图形．**立体几何学就是研究空间图形性质的科学．**

几何体是一种空间图形，它是物体所占的空间部分，由面把它和周围的空间分开，在研究时我们只考虑它的形状和大小，而不涉及物体的重量、颜色等物理性质．

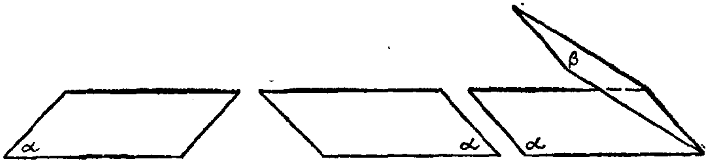
空间图形仍和平面图形一样具有下面的基本性质：任何图形都可以在空间移动，而不改变它的大小、形状及各部分的位置关系．

I．平　　面

§1-1 平面及其表示法

平面是广阔无涯的．平静的水面、窗玻璃面和课桌面等，都可看作平面的一部分．我们在适当的角度和适当的距离看

窗玻璃面和课桌面时，觉得它们都象平行四边形．因此，通常**用平行四边形表示平面**，并用希腊字母 α、β、$\gamma\cdots$ 等来表示(图 1-1)．至于点和直线的表示方法仍和平面几何一样，即用大写拉丁字母 A、B、$C\cdots M$、$N\cdots$表示点；小写拉丁字母 a、b、$c\cdots p$、$q\cdots$ 或两个大写拉丁字母 AB、$CD\cdots MN\cdots$ 表示直线．

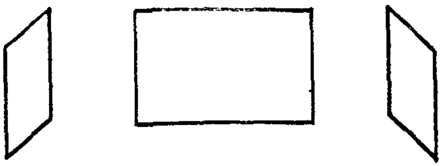


甲　　　　乙

图 1-1

在画一个水平放着的平面时，通常把平行四边形的锐角画成 45°，把横边画得大约等于另一边的两倍(图 1-1 甲)．如果一个平面的一部分被另一个平面遮住时，通常把被遮的部分的线段画成虚线或不画(图 1-1 乙)．这样，看起来就比较明显．

如果平面是直立的，那么可以画成以下的几种情况：



甲　　乙　　丙

图 1-2

如图 1-2 甲，平面是在观察者的左前方；图 1-2 乙，是在

观察者的正前方；图 1-2 丙，是在观察者的右前方.

§1-2 平面的基本性质

从生活实际和生产实践中积累的经验告诉我们，关于平面有下列几条公理：

公理 1 过不在一直线上的任意三点，可作一平面，且仅可作一平面(图 1-3).

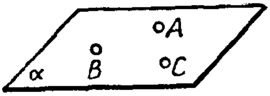


图 1-3

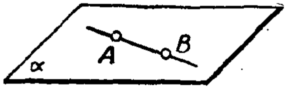


图 1-4

测量上所以采用三足架就是应用这个公理.

公理 2 如果一条直线上有两点在一个平面内，那么这条直线就全部在这个平面内(图 1-4).

公理 3 如果两个平面有一个公共点，那么它们相交于过这点的一条直线(图 1-5).

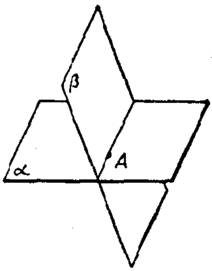


图 1-5

天花板和墙壁的交线，折纸的折痕等，都说明了两个平面相交是成一条直线的.

推论 1 过一条直线及线外一点，可以作一个平面，且仅可作一个平面.

设已知直线 AB 和线外一点 C (图 1-6). 在直线 AB 上任意取 A、B 两点，这样 A、B 和 C 组成不在一直线上的三点. 过这三点可以作一个

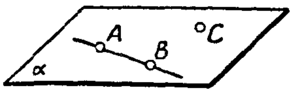


图 1-6

平面，且仅可作一个平面 α (公理 1)；由于直线 AB 有两点在所作平面 α 内，所以直线 AB 必全在平面 α 内(公理 2). 因此，平面 α 是过直线 AB 和点 C 的平面.

我们再进一步证明，这样的平面只可以作一个. 如果过直线 AB 和点 C 的平面除平面 α 外还有另一个平面 β，那么 A、B、C 三点也一定都在平面 β 内. 这样，过不在一条直线上的三点 A、B、C 就可以作两个平面 α 和 β 了. 这和公理 1 相矛盾. 所以过直线 AB 和点 C 的平面只有一个.

显然可见，经过一条直线(或经过两点)，可以作无限多个平面. 因为设空间已知直线为 p (图 1-7). 取这直线外的任意一点 A，过直线 p 及点 A 可作一个平面 α (推论 1)，在 α 外另取一点 B，则过 B 和 p 又可作一平面 β. 如此继续可以得到无限多个平面.

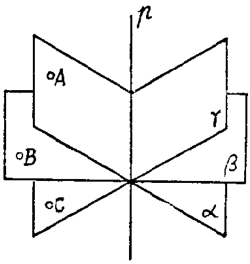


图 1-7

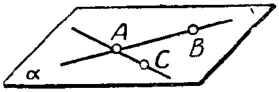


图 1-8

推论 2 过两条相交的直线，可以作一个平面，且仅可作一个平面.

如图 1-8，取相交直线 AB 和 AC 的交点 A. 又在 AB 上取 B 点，在 AC 上取 C 点，共得不在一直线上的三点 A、B 和 C，过这三点可以作一个平面，且仅可作一个平面 α (公理 1).

又 AB 和 AC 各有两点在所作平面 α 内，因而这两条直线也全在平面 α 内（公理 2）．因此，平面 α 是过相交直线 AB 和 AC 的平面．同时这样的平面只可以作一个．它的证明方法，和证明推论 1 相仿．

推论 3 过两条平行直线，可以作一个平面，且仅可作一个平面．

因为当两条直线在同一平面内且不相交时，叫做平行线（平行线的定义）．所以过两条平行直线 AB 和 CD，可以作一个平面 α（图 1-9）；同时这样的平面只可以作一个．因为如果过平行直线 AB 和 CD 还可以作一个平面 β，这就是说过直线 AB 和直线 CD 上一点可以作两个平面 α 和 β．这和推论 1 相矛盾．所以过平行直线 AB 和 CD 的平面只有一个．

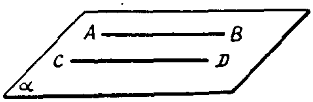


图 1-9

例如三角形、梯形都是平面图形．

因为 (1) $\triangle ABC$ 可以看作是由三点 A、B、C 所确定的（图 1-10）．根据公理 1、2 可知 $\triangle ABC$ 是一个平面图形．

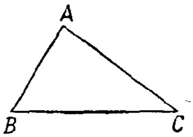


图 1-10

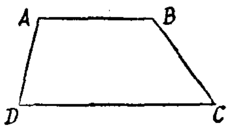


图 1-11

(2) 在梯形 $ABCD$ 中，设 $AB \parallel CD$．根据推论 3，可知线段 AB 和 CD 必定在同一平面内．也就是说：A、B、C、D 四点在同一平面内．再根据公理 2，可知线段 AD 和 BC 也必定在这个平面内，这就说明了梯形 $ABCD$ 也是一个平面图形（图

1-11).

复习问题

1. 什么叫做空间图形？立体几何研究的对象是什么？

2. 平面有无界限？通常我们把它画成什么形状？画一个水平的、直立的或一部分被另一平面遮住的平面时，有何规定？

3. 说出关于平面的基本性质的公理和推论. 这些推论是怎样证明的？

习　题　一

1. 过一点任意作三条直线，它们是否在同一平面内？为什么？

2. 空间有四个点，它们中间的任何三点都不在一直线上，那么，过其中任意三点作一个平面，共可作几个平面？

3. 一条直线和两条平行线相交，这三条直线是否在同一平面内，为什么？

4. 过已知直线外一点向直线上三个定点分别连结三条线段，问这三条线段是否在同一平面内？为什么？

5. 三条直线两两平行，但不在同一平面内. 如果过其中任意两条各作平面，共可作几个平面？

6. 四条线段依次首尾相接，所得的封闭图形，一定是平面图形吗？为什么？

Ⅱ. 直线和直线的位置关系

§1-3　空间两直线位置关系的概念

在同一个平面内的两条不重合的直线，它们之间的位置关系只有两种：**相交或者平行**. 这是我们早已知道的.

不在同一平面内的两条直线，它们既不能相交也不能平行(因为如果相交或平行，它们就将在同一平面内). 例如教室里下垂的电线和黑板边沿的一条横线，便是这样的两条直线(图 1-12).

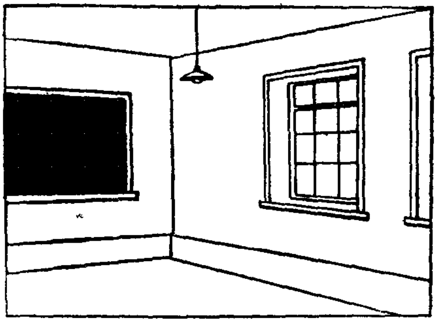


图 1-12

我们把不在同一平面内的两条直线,叫做**异面直线**.

由此可见,空间两直线的位置关系只有下列三种:

(1) **相交**; (2) **平行**; (3) **异面**.

画异面直线时,要把两条直线画在不同的平面内,这样才容易显出异面直线的特点. 例如画异面直线 a 和 b 时，图 1-13 甲 乙的画法比较明显;丙的画法就不明显.

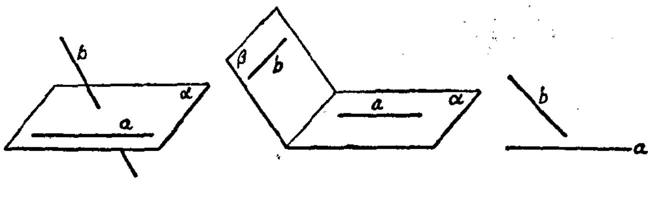


图 1-13

§1-4 空间直线的平行关系

定理1 如果两个相交平面，分别通过两条平行直线，那么这两个平面的交线，一定平行于这两条平行线。

已知：直线 $a \parallel b$，平面 α 通过直线 a，平面 β 通过直线 b，平面 α 和 β 的交线为 c，且 c 不和直线 a 及直线 b 重合(图1-14)。

求证：直线 c 平行于直线 a 及直线 b。

证：直线 a 和 c 同在平面 α 内，假若不平行，就一定相交于一点 N。

因点 N 在 α、β 的交线 c 上，所以它既在平面 α 内也在平面 β 内。

另外点 N 既在直线 a 上，所以它一定在两平行直线 a 及直线 b 所决定的平面 γ 内。

这就是说，点 N 在平面 β 内又在平面 γ 内，也就是在 β 和 γ 的交线 b 上。

点 N 既在直线 a 上，又要在直线 b 上，因此它是直线 a 和 b 的公共点。这和假设 $a \parallel b$ 相矛盾。可见在同一平面 α 内的直线 a 和 c 不能相交。所以 $c \parallel a$。

同理可证 $c \parallel b$。

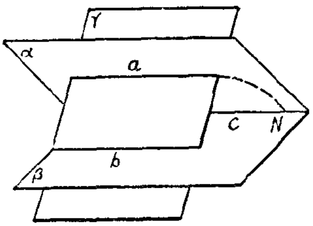


图 1-14

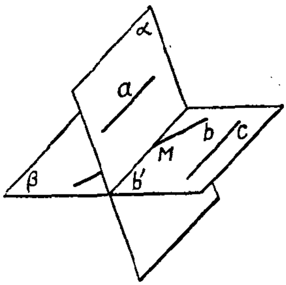


图 1-15

定理2 不在同一个平面内的三条直线，如果其中两条直线都平行于第三条直线，那么这两条直线也平行。

已知：直线 a、b 和 c 不在同一平面内，并且 $a \parallel c$ 及 $b \parallel c$（图1-15）。

求证：直线 $b \parallel a$.

证：在直线 b 上任取一点 M，过点 M 和直线 a 作平面 α，过点 M 和直线 c 作平面 β. 假设 α 和 β 的交线是过点 M 的直线 b'.

因为 $a \parallel c$，所以有

$$b' \parallel a \text{ 和 } b' \parallel c \text{（定理 1）}.$$

两平行直线 b' 和 c 可以决定一个平面，而这个平面和平面 β 都经过点 M 和直线 c. 所以它们一定重合（§ 1-2 推论 1）.

在平面 β 内，直线 b' 和 b 都经过点 M，并且都平行于直线 c，所以 b' 和 b 一定重合.

由于 $\qquad b' \parallel a$，

便可得到 $\qquad b \parallel a$.

这个定理的正确性是很明显的. 例如：图 1-16 是一个三棱尺，棱 BB_1、CC_1 都和棱 AA_1 平行，而棱 BB_1 和 CC_1 也平行；拿一张纸，在上面画三条平行线 a、b 和 c，以中间的一条 b 为折痕，把纸折过来（图 1-17），可以看到 a 仍然和 c 平行.

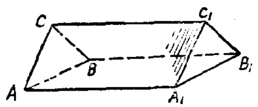


图 1-16

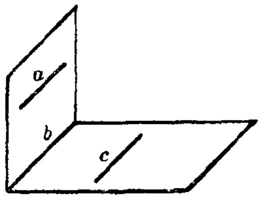


图 1-17

定理 3 空间的两个角，如果它们的对应边平行并且同向，那么这两个角相等.

已知：空间两个角 $\angle ABC$ 与 $\angle DEF$（图 1-18）中有 $BA \parallel ED$，$BC \parallel EF$，且都同向.

求证：$\angle ABC = \angle DEF$.

证：截取 $BM=EN$，$BP=EQ$. 连结 BE，MN，PQ，MP和 NQ. ∵ $BM \underline{\parallel} EN$，

∴ $BMNE$ 是平行四边形.

∴ $BE \underline{\parallel} MN$.

同理有 $BE \underline{\parallel} PQ$.

因此，$MN \underline{\parallel} PQ$，

∴ $MNQP$ 是平行四边形.

∴ $MP=NQ$.

于是 $\triangle BMP \cong \triangle ENQ$，

∴ $\angle ABC=\angle DEF$.

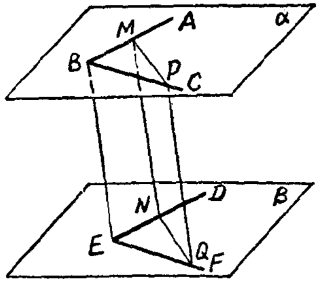


图 1-18

§1-5 空间直线的夹角

空间两条直线间的位置关系，我们可以用它们的夹角的大小来表示. 假若两条直线在同一平面内时，要是平行便组成 0° 的角，要是相交便组成 0° 到 180° 之间的角. 这在平面几何里是早已知道的. 假若两条直线不在同一平面内，它们就不能组成象平面几何中所定义的角. 下面我们给出异面直线夹角的定义：

定义 自空间任意一点所作平行于两条异面直线的两条射线所夹的角，叫做两**异面直线间的夹角**.

根据定义可作出异面直线 p 和 q 的夹角如下：

在空间任意取一点 O，过 O 点引两条直线 a 和 b，分别与 p 和 q 平行. 我们把 a 和 b 相交所成的四个角，叫做异面直线 p 和 q 的夹角(图 1-19). 根据 §1-4 定理 3 可知，这些角的大小，是由 p 和 q 的位置所决定的，而和 O 点的选择无关.

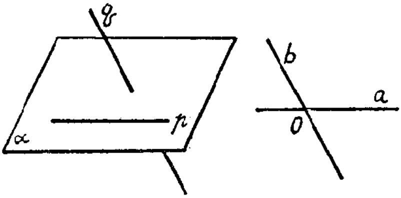


图 1-19

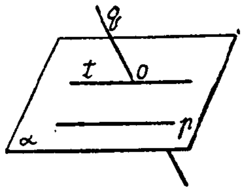


图 1-20

通常可在直线 q(或 p)上，任取一点 O，从而引直线 $t \parallel p$；t 和 q 的夹角，便表示 p 和 q 的夹角(图 1-20)．

如果 p 和 q 是两条有确定方向的射线，那么经过任意一点作两条射线分别与 p、q 平行且同向，这时所得到的唯一的一个角，就是 p 和 q 的夹角．

§1-6 空间直线的垂直关系

空间的两条直线，如果在同一平面内，它们的夹角成直角时，便称为互相垂直，这是我们早已知道的．对于两条异面直线，也有类似的定义．

定义 如果两条异面直线间的夹角是直角，则称这两条异面直线互相垂直．

例如，教室里下垂的电灯线和天花板与墙面的交线，便是互相垂直的异面直线．

例． 已知直线 a 和 b 互相垂直(不一定相交)，直线 c 和 a 互相平行，求证 c 和 b 也互相垂直(不一定相交)．

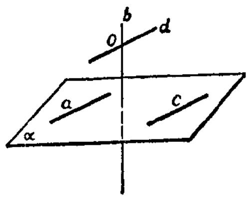


图 1-21

证：在直线 b 上任意取一点 O (图 1-21)，经过 O 作直线 $d \parallel a$，根据

§1-4 定理 2，我们有 $d \parallel c$.

又根据异面直线的夹角定义知：d 和 b 所成的角就是 a 和 b 所成的角，也就是 c 和 b 所成的角. 已知 a 和 b 相垂直，所以 c 和 b 也垂直.

复习问题

1. 空间两直线的位置关系有几种？

2. 什么叫做异面直线？怎样画异面直线？

3. 定理"不在同一平面内的三条直线，如果其中两条直线都平行于第三条直线，那么这两条直线也平行"，是怎样证明的？

4. "空间的两个角，如果它们的对应边平行且同向，那么这两个角相等."是怎样证明的？

5. 什么是异面直线的夹角？两条异面直线在什么情形下叫做互相垂直？

习 题 二

1. 把一张长方形的纸对折两次，展开后竖立在桌面上(图 1-22)，试说明为什么这些折痕是互相平行的.

2. 在两个平面内的两条直线是否一定是异面直线？为什么？

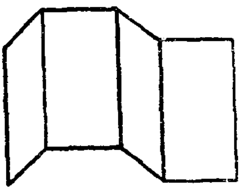


图 1-22

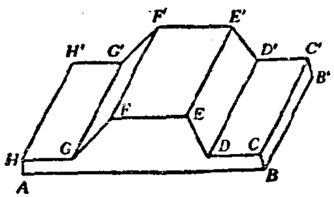


图 1-23

3. 在图 1-23 所示的一块铸件上，任意找出几对相交直线和异面直线.

4. 一条直线和两条异面直线都相交，每两条直线确定一个平面，一共可以确定几个平面？

5. 试证：顺次连结空间四边形 $ABCD$（四顶点不在一个平面内的四边形叫做空间四边形，如图 1-24）的各边中点 E、F、G、H，构成一个平行四边形。

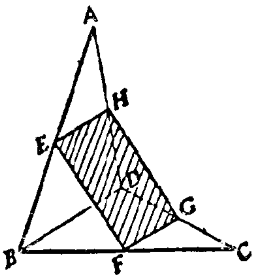


图 1-24

Ⅲ. 直线和平面的位置关系

§1-7 直线和平面位置关系的概念

根据§1-2 公理 2 可以知道，一条直线和一个平面如果有两个公共点，这条直线就全部在这平面内．这时叫做直线在这平面内，或叫做平面通过直线(图 1-25 甲)．另外直线和平面之间的位置关系还有下面的相交和平行两种．

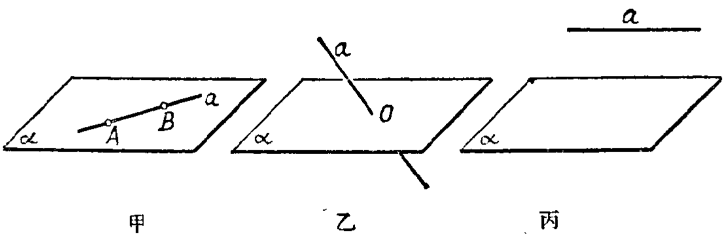


图 1-25

定义 1 如果一条直线和一个平面只有一个公共点，就叫做这条直线和这个平面相交(图 1-25 乙)．

画直线和平面相交时，要把直线的两端画出表示平面的

平行四边形的外面．如图 1-26 甲的画法比较好，乙的画法就不明显．

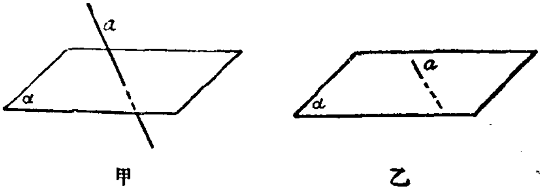


图 1-26

定义 2 如果一条直线和一个平面没有公共点，叫做这条直线和这个平面平行(图 1-25 丙)．

画直线和平面平行时，要把直线画在表示平面的平行四边形的外面，并且和平行四边形的一边平行．如图 1-27 甲的画法比较好，乙的画法就不明显．

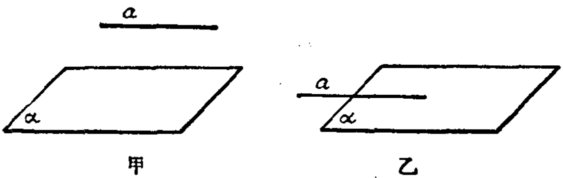


图 1-27

§1-8 直线和平面平行的判定

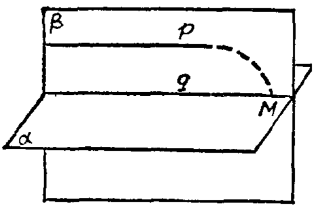


图 1-28

定理 如果平面外的一条直线平行于平面内的一条直线，那么，这条直线就和这个平面平行．

已知：直线 p 在平面 α 外(图 1-28)，直线 q 在平面 α内．