高等数学专题解析

邵　剑　汤国桢　编著

浙江大学出版社

高等数学专题解析

邵　剑　汤国桢　编著

浙江大学出版社

高等数学专题解析
[illegible] 汤国桢 编著
责任编辑 徐宝澍
*
浙江大学出版社出版
(杭州玉古路 20 号 邮政编码 310027)
(E-mail: zupress@mail. hz. zj. cn)
浙江大学出版社电脑排版中心排版
余杭市供销印刷有限公司印刷
浙江省新华书店发行
*
787×1092 16 开 印张 24 614 千字
1998 年 8 月第 1 版 1999 年 12 月第 3 次印刷
印数 4001—7000
ISBN7-308-02047-9/O·227 定价:25.00 元

前　言

为提高高等数学的教学水平，特编著本《高等数学专题解析》.本书是一册具有一定深度和广度的教材，并且具有一定的特色.它注意数学思维与数学方法的论述，做到专题讲述与例题解析相结合，并以“注记”形式对有关专题加以分析和延拓，还对某些综合题配置“关键词”，以使学生更好地梳理知识和提高创造能力.本书既是学生学习高等数学的很好的辅助教材，又是报考硕士研究生的一册较为合适的复习用书，同时对于有关人员也有很好的参考价值.

在本书整个撰写过程中，始终得到吴迪光教授、张彬教授、金蒙伟博士、蔡燧林教授、吴明华副教授和何勇博士的热情支持与指教.他们还仔细审阅了书稿的有关章节，并提出了许多极为宝贵的意见，在此表示衷心的感谢.

本书的第一、二、三、八章由邵剑撰稿，第四、五、六、七章由汤国桢撰稿.

本书是我们多年教学经验与资料的总结，但因成册仓促，故可能有不当甚至差错之处，唯望多获教言以增益，我们不胜感谢.

邵剑　汤国桢

1997年9月

目　录

第一章　极限与连续

微积分学的核心和基础是极限，它的基本研究方法是极限方法，它的研究对象是函数.

极限是建立在无限基础上的概念，它考虑的是一个动态过程. 极限方法的无限性和动态性是与初等数学处理常量问题的方法有着本质的不同，但又是紧密联系的，其中后者的主要特性是它的有限性和静态性.

§1.1　极限的概念与性质

1.1.1　极限的分析语言

数学语言是一种特殊的语言. 数学语言借助于数学符号把思维过程扼要地表现出来，并能准确地、深刻地把现象的结构表现为其不变式. 数学语言，以它的简洁、和谐、有序、概括、精确、富于形象化、理想化的美的特征和形式，给人们以美的感受. 数学语言美是数学美的一种重要表现. 极限定义的分析语言描述是指，用$\varepsilon-\delta$、$\varepsilon-N$、$\varepsilon-X$等术语描述的一种语言，它是数学语言美的一个典范，我们应从中很好体会和掌握它.

各种极限基本上可以统一为函数极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 根据自变量$x$的目标值$x_0$和函数$f(x)$的目标值$A$的不同含义，如它们分别为$0$，$+\infty$，$-\infty$，$\infty$或某个有限值等，以及它们相应邻域的意义就可以得到不同形式极限的定义.

一般地来说，极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的定义蕴含着自变量$x$落在点$x_0$的充分小邻域内时，函数$f(x)$的值落在$A$的充分小邻域内. 极限的分析语言的描述，正是由于这一思想给出的. 极限的几何意义也是由此得出的. 为此，掌握各种邻域的概念及其表达形式是至关重要的. 它有利于理解极限的分析语言描述的精神实质.

函数极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的分析语言，即$\varepsilon-\delta$语言的定义是：

对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

这种描述深刻地刻划了当$x\to x_0$时，$f(x)\to A$的极限过程. 自变量x趋向于x_0是指动点x无限接近定点x_0，它以点x和x_0的距离$d(x_0,x)=|x-x_0|$来衡量动点x与定点x_0的接近程度. 同理，距离$d(f(x),A)=|f(x)-A|$的大小刻划了变量$f(x)$和常量A的接近程度.

距离的大小是要通过比较来认识的，而比较需要有个度量的标准，这个标准分别由正数 ε 和 δ 来担当. 因为要求 $f(x)$ 与 A 无限接近，所以描述它的度量标准 ε 是任意给定的. 正因为 ε 的任意性，才能刻划 $f(x)$ 与 A 的无限接近. 同时这个 ε 还应该是相对给定的，由此才能确定与任意给定的 $\varepsilon > 0$ 相应的 $\delta > 0$，而 δ 是刻划 x 与 x_0 的无限接近的程度. 这种描述方法深刻地刻划了极限的本质. 它体现了动态与静态的对立与统一的规律.

极限的分析语言，有两个典型的问题. 其一是用分析语言直接证明某一极限；其二是已知某些极限存在，利用分析语言证明有关结论. 两者的分析语言表述是不同的，需要仔细品味，深刻体会，正确描述.

第一类问题是用分析语言直接证明某个极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = A$. 它是对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，由 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 去确定与 ε 有关的 $\delta > 0$，使得自变量 x 与定点 x_0 的距离 $|x - x_0| < \delta$，$x \neq x_0$，此时的 ε 是相对给定的. 为了确定 $|x - x_0| < \delta$，就需要设法从 $|f(x) - A|$ 中分解出因子 $|x - x_0|$，让其余的因子是一个关于 x 的有界量. 即设法将不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 转化为不等式 $|x - x_0| < \varphi(\varepsilon)$. 从而，由此找到 $\delta > 0$. 注意，这里的 $\varphi(\varepsilon)$ 是与任意给定的 $\varepsilon > 0$ 有关，而与 x 无关，故所找到的 δ 也是与 ε 有关，而与 x 无关.

对于用分析语言证明极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x) = A$ 的问题. 只要考虑到无穷大邻域的表达形式就明白，现在应该考虑 $|x| > X$ 和 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 的两个不等式. 这时，为了确定 $|x| > X$，就需要设法从 $|f(x) - A|$ 中分解出因子 $\frac{1}{|x|}$，并转化为不等式 $|x| > \psi(\varepsilon)$，从而由此找到只与 ε 有关而与 x 无关的 X. 这样找到的 $X > 0$ 能使得对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，当 $|x| > X$ 时恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$. 即 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x) = A$. 同理，可以用分析语言证明其它各种类型的极限.

这一项工作要着重注意如下两点：

首先，在证明过程中的分析语言表达要正确. 只有这样，才会对极限意义有较深刻的理解.

其次，因为人们只关心与 ε 有关的 δ(或 X) 的存在，故只要找到符合定义要求的一个 δ(或 X) 就可以了，不一定要找最大的 $\delta > 0$(或最小的 $X > 0$)，所以在分析语言证明过程中，可以适当放大绝对值 $|f(x) - A|$，使放大后式子小于 ε 即能较方便地求得 $\delta > 0$(或 $X > 0$). 它有一定的技巧性，也是工作的另一个困难所在.

在证明过程中绝对值 $|f(x) - A|$ 的适当放大，可以通过利用 $x \to x_0$ 的特性的手段来实现. 例如，当 $x \to x_0$ 时，依照邻域的概念可以不妨假设 $|x - x_0| < 1$，把绝对值 $|f(x) - A|$ 放大，而不是缩小，并使之分解出因子 $|x - x_0|$；如果考虑 $x \to \infty$，则可以不妨假设 $|x|$ 大于某个有限的给定正数，在绝对值 $|f(x) - A|$ 放大过程中，使其分解出因子 $\frac{1}{|x|}$. 这是一种"有条件放大"技巧.

第二类问题是：已知某个极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = A$ 存在，利用分析语言去证明另一个极限存在的命题. 根据极限的分析语言定义，由已知的 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = A$ 便有：对任意给定的 $\varepsilon > 0$，总存在 $\delta_0 > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta_0$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$. 当然，对某个特定的 $\varepsilon_0 > 0$，必存在 $\delta_1 > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时有 $|f(x) - A| < \varepsilon_0$. 因极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = A$ 是已知的，故这里的 δ_0 或 δ_1 是已经找到的正数. 然后利用这个 δ_0 或 δ_1，以及有关不等式去分析证明待证的有关极限的命题，此时要找的 δ 不仅与 ε 有关，而且还与已经找到的 δ_0 或 δ_1 有关.

这两类问题对极限分析语言的使用是不一样的，应引起足够的注意.

另外，由函数极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的分析语言定义容易知道，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq A$的分析语言描述是：

存在某个$\varepsilon_0>0$，对任意的$\delta>0$，总存在某个点$\tilde{x}$满足$0<|\tilde{x}-x_0|<\delta$时使

$$|f(\tilde{x})-A|\geqslant\varepsilon_0.$$

例如，$\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}\neq 1$可以用如下$\varepsilon-\delta$语言验证：取$\varepsilon_0=1$，对任意的$\delta>0$，取正整数$n_1>\dfrac{1}{2\pi\delta}+\dfrac{1}{2}$，令$\tilde{x}=\dfrac{1}{(2n_1-1)\pi}$，则$\tilde{x}$适合$0<|\tilde{x}|<\delta$，然而$\left|\cos\dfrac{1}{\tilde{x}}-1\right|=2>\varepsilon_0$，故

$$\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}\neq 1.$$

大家应熟悉利用分析语言证得的几个基本极限的结论，它们在以后是常常要用到的. 如

$$\lim_{n\to\infty}nq^n=0,\quad |q|<1;\qquad \lim_{n\to\infty}q^n=0,\quad |q|<1;$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,\quad a>0;\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n\,!}}=0;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n\,!}=0,\quad a\text{ 为常数};\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n\,!}{n^n}=0;\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

另外，强调一下，函数$f(x)$的极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$是否存在以及存在时其值是多少，与函数$f(x)$在点$x_0$处的值是无关的. 即使极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在，但函数$f(x)$在点$x_0$处却可以有定义；又若极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，而函数$f(x)$在点$x_0$可以没有定义.

例 1 用分析语言证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n}{2n^2+n-6}=\dfrac{1}{2}$.

证明 对于任意给定的$\varepsilon>0$，要使不等式

$$\left|\frac{n^2-n}{2n^2+n-6}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$$

成立. 因为当$n\geqslant 6$时有

$$\left|\frac{n^2-n}{2n^2+n-6}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{6-3n}{2(2n^2+n-6)}\right|<\frac{3n}{4n^2}<\frac{1}{n},\tag{*}$$

故只要使$\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，取$N=\max\left\{6,\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$，则当$n>N$时，恒有

$$\left|\frac{n^2-n}{2n^2+n-6}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon,$$

所以原极限成立.

注记 这里，由不等式$|u_n-A|<\varepsilon$求解n比较困难，为此需要将$|u_n-A|$适当放大，以便使求N的运算更加简便. 本例式(*)中的第二个不等式$\dfrac{3n}{4n^2}<\dfrac{1}{n}$是一种无条件放大，第一个不等式是在$n\geqslant 6$时的有条件放大. 因数列的极限与它的前面有限项是无关的，故这种不等式放大是可行的，且能方便地求得$n>\varphi(\varepsilon)$而选取N. 注意$|u_n-A|$适当放大的要求应让放大后的式子随n增大而缩小，且能使该式小于ε. 例如，如果$|u_n-A|$是关于n的有理分式，则要求其分母n的次数高于分子n的次数.

例 2 用分析语言证明：当$|q|<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}nq^n=0$.

证明 对特殊情况$q=0$，显然有$\lim\limits_{n\to\infty}nq^n=0$.

对于 $0<|q|<1$,列举如下两种证法:

方法一:因 $\frac{1}{|q|}>1$,故不妨设 $\frac{1}{|q|}=1+h,h>0$. 利用二项式展开,当 $n\geqslant 2$ 时有不等式

$$\frac{1}{|q|^n}=(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots+h^n>\frac{n(n-1)}{2}h^2\geqslant\left(\frac{n}{2}\right)^2h^2,$$

即 $n|q|^n<\frac{4}{h^2}\frac{1}{n}$.

对于任意给定的 $\varepsilon>0$,要使 $|nq^n-0|=n|q|^n<\varepsilon$,只要 $n|q|^n<\frac{4}{h^2n}<\varepsilon$,即 $n>\frac{4}{h^2\varepsilon}$.

取 $N=\max\left\{2,\left[\frac{4}{\varepsilon\left(\frac{1}{|q|}-1\right)^2}\right]\right\}$,则当 $n>N$ 时恒有 $|nq^n-0|<\varepsilon$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}nq^n=0$.

方法二:因为 $0<|q|<1$,故存在 $N_1>0$,当 $n>N_1$ 时有 $n^2<\frac{1}{|q|^n}$.

对于任意给定的 $\varepsilon>0$,要使 $|nq^n-0|<n|q|^n<\varepsilon$,只要 $|nq^n|<n\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}<\varepsilon$,即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$. 取 $N=\max\left\{N_1,\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$,则当 $n>N$ 时恒有 $|nq^n-0|<\varepsilon$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}nq^n=0$.

注记 (i) 对特殊情况 $q=0$ 作特殊处理是命题证明中的一种常用方法.

(ii) 利用二项式展开建立所要求的不等式,不失是一个较好的方法.

例 3 设数列 $\{u_n\}$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A,A\neq 0$,试用分析语言证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$.

证明 对于任意给定的 $\varepsilon>0$,因为 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A,A\neq 0$,所以存在 $N_1>0$,使得当 $n>N_1$ 时有 $|u_n-A|<\frac{|A|}{4}\varepsilon$;也有 $|u_{n+1}-A|<\frac{|A|}{4}\varepsilon$.

另一方面,由 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A,A\neq 0$,故对给定的 $\varepsilon_0=\frac{|A|}{2}>0$,存在 $N_2>0$,使得当 $n>N_2$ 时有 $|u_n-A|<\frac{|A|}{2}$,而因 $|A|-|u_n|\leqslant|u_n-A|$,故当 $n>N_2$ 时有 $|u_n|>\frac{|A|}{2}$.

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$,则当 $n>N$ 时便有

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-1\right|=\left|\frac{u_{n+1}-A-(u_n-A)}{u_n}\right|\leqslant\frac{|u_{n+1}-A|+|u_n-A|}{|u_n|}$$

$$<\frac{\frac{1}{4}|A|\varepsilon+\frac{1}{4}|A|\varepsilon}{\frac{1}{2}|A|}=\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$.

注记 (i) 本例是一个重要的命题,且是上面分析的第二类问题. 它是由已知极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A,A\neq 0$,分别得出不等式 $|u_n-A|<\frac{1}{4}|A|\varepsilon$ 和 $|u_n|>\frac{1}{2}|A|$,它们在 $n>N$ 时分别用于所考虑绝对值的分子和分母的不等式放大,其中的 N_1 和 N_2 是给定的,把 N_1、N_2 的大者作为欲寻找的 N,便证得结论.

(ii) 如果 $A=0$,那末极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 可能不存在,也可能存在;且若存在的话,也不一定等于 1. 例如,数列 $\{u_n\}=\left\{\frac{2+(-1)^n}{n}\right\}$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,但极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}$$

并不存在；又如，数列$\{u_n\}=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$有$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{3}$.

例 4 设$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$，试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}=A$.

证明 对于任意给定的$\varepsilon>0$. 由$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$知，存在$N_1>0$，使得当$n>N_1$时总有$|u_n-A|<\frac{\varepsilon}{2}$. 即有$|u_{N_1+1}-A|<\frac{\varepsilon}{2}$，$|u_{N_1+2}-A|<\frac{\varepsilon}{2}$，……

对于给定的N_1，记

$$C=(u_1-A)+(u_2-A)+\cdots+(u_{N_1}-A),$$

它是一固定的数. 由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{C}{n}=0$知，必存在$N_2>0$，使得当$n>N_2$时总有$\left|\frac{C}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$.

取$N=\max\{N_1,N_2\}$，则当$n>N$时就恒有

$$\left|\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}-A\right|=\left|\frac{u_1+\cdots+u_{N_1}+u_{N_1+1}+\cdots+u_n-nA}{n}\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{1}{n}[(u_1-A)+\cdots+(u_{N_1}-A)]\right|+\left|\frac{1}{n}[(u_{N_1+1}-A)+\cdots+(u_n-A)]\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{n}(n-N_1)\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

所以本命题成立. 当$A=\infty$时，也有类似的结论，请读者自行完成其证明.

注记 有些类型的题目可以利用这个命题的结论获得. 例如，设$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$，且$u_n>0$，$n=1,2,\cdots$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_1u_2\cdots u_n}=A$. 它等价于已知$\lim\limits_{n\to\infty}\ln u_n=\begin{cases}\ln A, & A>0\\ -\infty, & A=0,\end{cases}$证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\ln u_1+\ln u_2+\cdots+\ln u_n)=\begin{cases}\ln A, & A>0,\\ -\infty, & A=0.\end{cases}$$

又如，若$a_n>0$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=a$，$a>0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$的结论也可以通过$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}=\ln a$，利用本命题容易证得. 请读者完成它们的证明.

例 5 证明：若数列$\{u_n\}$的极限$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$.

证明 因$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，故对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数$N$，当$n>N$时有$|u_n-a|<\varepsilon$，从而有

$$\big||u_n|-|a|\big|\leqslant|u_n-a|<\varepsilon.$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$.

注记 这是一个重要的结论. 它的另一种表述是：

若$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|\neq|a|$，则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq a$.

特别，当u_n恒正或恒负时，数列$\{|u_n|\}$与$\{u_n\}$同时敛散. 但是，若u_n非恒正或非恒负，则当$\{|u_n|\}$收敛时，$\{u_n\}$可能收敛，也可能发散. 例如，$\{|(-1)^n|\}$是收敛的；但$\{(-1)^n\}$发散. 然而却有如下重要的结论：

命题 极限$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=0$当且仅当$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

对于函数的极限，也有类似的结论.

例 6 用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4x}{x+2}=3.$

证明 对于任意给定的 $\varepsilon>0$,要使

$$\left|\frac{x^2+4x}{x+2}-3\right|=\left|\frac{x^2+x-6}{x+2}\right|=\left|\frac{x+3}{x+2}\right||x-2|<\varepsilon.$$

因 $x\to 2$,故将 x 限制在 $x=2$ 的邻域内,不妨设 $0<|x-2|<1$,即 $1<x<3,x\neq 2$ 便有 $\left|\dfrac{x+3}{x+2}\right|<2$,所以只要 $2|x-2|<\varepsilon$,取 $\delta=\min\{1,\dfrac{\varepsilon}{2}\}$,则当 $0<|x-2|<\delta$ 时恒有 $\left|\dfrac{x^2+4x}{x+2}-3\right|<\varepsilon$,于是原极限成立.

注记 根据 $x\to 2$ 的变化趋势,限制自变量 x 在 $0<|x-2|<1$ 的范围内是可行的,当然也可限制 $|x-2|<\dfrac{1}{2}$ 等.由此适当地条件放大 $|f(x)-A|$,使之能方便地找到 δ,避免求解繁复不等式的过程,是用分析语言证明极限的常用方法.

例 7 试证明:若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A,A\neq 0$,且 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$.

证明 由 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A,A\neq 0$,知,对于 $\varepsilon_1=\dfrac{|A|}{2}>0$,必存在 $\delta_1>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时有 $\left|\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}-A\right|<\varepsilon_1=\dfrac{|A|}{2}$,而 $|A|-\left|\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right|\leqslant\left|\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}-A\right|$,故有 $\left|\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right|>\dfrac{|A|}{2}$,即 $|\beta(x)|<\dfrac{2|\alpha(x)|}{|A|}$.

对于任意给定的 $\varepsilon>0$,又因 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$,故对 $\dfrac{|A|}{2}\varepsilon>0$ 必存在 $\delta_2>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时有 $|\alpha(x)-0|<\dfrac{|A|}{2}\varepsilon$.

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时恒有

$$|\beta(x)-0|<\frac{2|\alpha(x)|}{|A|}<\frac{2}{|A|}\,\frac{|A|}{2}\varepsilon=\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$.

注记 (i) 根据待证极限的要求,先对已知极限分别用分析语言给出相应的不等式,然后利用这些不等式在 x_0 的公共邻域内估计所需证的不等式.这是一种很重要的思想.其中由 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,A\neq 0$,得出在 x_0 邻域 $\{x|0<|x-x_0|<\delta_0\}$ 内恒有 $|f(x)|>\dfrac{|A|}{2}>0$ 是函数极限的局部保号性性质,它是很有用的一种性质.

(ii) 实际上,本例又是一个重要的命题.且可把它改写为:

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=a,a\neq\infty$,且 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$.

它表明:$x\to x_0$ 时,若分式 $\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ 的极限存在,且其分母 $\alpha(x)$ 是无穷小,则它的分子 $\beta(x)$ 必定也是无穷小.显然,当 $a\neq 0$ 时,分子 $\beta(x)$ 是分母 $\alpha(x)$ 的同阶无穷小;当 $a=0$ 时,分子 $\beta(x)$ 是分母 $\alpha(x)$ 的高阶无穷小.这一性质在极限计算中是很实用的,请引起注意.

例 8 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$,且在 x_0 的某去心邻域内 $\psi(x)$ 满足 $0<K_1\leqslant|\psi(x)|\leqslant K_2$,试证明:

(i) $\lim\limits_{x\to x_0}[\varphi(x)+\psi(x)]=\infty$;　　(ii) $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\psi(x)=\infty$.

证明　对于任意给定的 $G>0$.

(i) 由 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$ 知,必存在 $\delta_1>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时恒有 $|\varphi(x)|>G+K_2$. 取 $\delta=\delta_1$,则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时恒有

$$|\varphi(x)+\psi(x)|\geqslant|\varphi(x)|-|\psi(x)|>G+K_2-K_2=G,$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0}[\varphi(x)-\psi(x)]=\infty$.

(ii) 由 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$ 知,对 $\dfrac{G}{K_1}>0$ 必存在 $\delta_2>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时有 $|\varphi(x)|>\dfrac{G}{K_1}$. 取 $\delta=\delta_2$,则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时恒有 $|\varphi(x)\psi(x)|>G$. 所以 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\psi(x)=\infty$.

注记　本题是用分析语言证明无穷大的例子,请注意它与前面诸例证明的区别. 本例的结论说明无穷大与有界量之间有如下关系:① 无穷大量与有界量之和是无穷大量;② 任意两个正(负)无穷大量之和是正(负)无穷大量,但任意两个非同号的无穷大量之和可能不是无穷大量,例如 $\{n\}$ 与 $\{-n\}$ 都是无穷大量,但它们的和显然不是无穷大量;③ 无穷大量 $f(x)$ 与满足 $|\psi(x)|\geqslant K_1>0$ 的 $\psi(x)$ 乘积仍是无穷大量.

1.1.2　极限存在的准则

一、充分条件与必要条件

数学中经常遇到必要条件和充分条件两个术语,我们必须深刻理解其意义.

一件事件的发生或不发生,一个结论的成立或不成立,总是在一定的条件下所说的.

假设由 P 成立必定推得 Q 成立. 一是指结论 P 成立必须具备条件 Q,称 Q 是 P 的必要条件;二是指条件 P 具备时,结论 Q 必然成立,则称 P 是 Q 的充分条件. 例如,摩擦生热是一真理,那末产生热量是摩擦的必要条件,而摩擦是生热的充分条件.

若 Q 是 P 的必要条件,则其必要条件的否定就有结论"若 Q 不成立,则 P 必定不成立",还有"Q 成立时,P 未必成立". 例如,结论"若没有热量产生,则一定没有摩擦现象"和"热量不一定是由摩擦产生"都是众所周知的真理. 故所谓必要条件就是"有之不必然,无之必不然".

若 P 是 Q 的充分条件,则必定还有"P 不成立时 Q 也可能成立"的结论,故所谓充分条件就是"有之必然,无之亦可然".

如果 P 既是 Q 的充分条件又是必要条件,即由 P 可推出 Q,又由 Q 可推出 P,则称 P 与 Q 是互为充分必要条件,简称为充要条件,又常用"当且仅当"一词表述,又称事件 P 和事件 Q 是互相等价的.

搞清楚每个命题中的条件是必要条件还是充分条件,或是充要条件,并进一步得出如上分析的相关结论,这对深入理解基本概念是很有帮助的.

二、极限存在的准则

数列 $\{x_n\}$ 的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 表示两层含义:一是 $\{x_n\}$ 收敛,二表示 $\{x_n\}$ 的极限为 a. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 已蕴含着确认当 $n\to\infty$ 时数列 $\{x_n\}$ 是收敛的,且其极限为 a.

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=1,x_{n+1}=1+2x_n,n=1,2,\cdots$. 如果茫然记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,对 $x_{n+1}=1+2x_n$ 两边求极限得 $a=-1$,而断定 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-1$,则这个结果显然是错误的,因为根据数列

$\{x_n\}$ 的构造规律易知 $x_n > 1$，由极限保号性知它的极限不可能是负值，从而断定 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不存在. 事实上，或者由

$$x_n = 1 + 2x_{n-1} = 1 + 2(1 + x_{n-2}) = 1 + 2 + 2(1 + x_{n-3}) = \cdots$$
$$= 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1},$$

便知 $\{x_n\}$ 单调上升且无上界，是发散的. 所以求极限的首要问题是判断其极限的存在性.

判断函数极限存在是一项重要的工作。例如，极限的四则运算都是以各个因子的极限存在为前提，在没有断定各个极限存在之前，不宜随意进行运算. 极限存在的充分条件和充要条件都可以作为判断极限存在的准则，主要有单侧极限准则、夹逼准则、单调有界准则和柯西收敛准则.

前两条准则不但可以用于判断某极限的存在，而且同时求得该极限值. 单侧极限准则往往多用于判断分段函数在分段点处的极限是否存在. 若它的左、右极限都存在且相等，则其极限存在且等于该值，否则相应的极限不存在. 例如，考虑极限 $\lim\limits_{x\to a} e^{\frac{1}{x}}$，因为

$$\lim_{x\to a^-} e^{\frac{1}{x}} = \begin{cases} e^{\frac{1}{a}}, & a \neq 0, \\ 0, & a = 0; \end{cases} \qquad \lim_{x\to a^+} e^{\frac{1}{x}} = \begin{cases} e^{\frac{1}{a}}, & a \neq 0, \\ +\infty, & a = 0, \end{cases}$$

所以，当 $a \neq 0$ 时，$\lim\limits_{x\to a} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{a}}$；当 $a = 0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$ 不存在.

夹逼准则多适用于所考虑的函数比较容易适度放大和缩小，而且放大和缩小后的函数容易求得相同极限的情形. 它的思想基础是把所求的极限转化为求放大和缩小后的函数极限. 夹逼法所要建立的不等式可以只在 n 充分大以后成立即可.

单调有界准则，若用于数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$，则证明数列 $\{u_n\}$ 单调性的常用方法有四种：证明 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 大于或小于 1；证明 $u_{n+1} - u_n$ 大于或小于零；利用数学归纳法；由 $u_n = f(n)$ 构造函数 $f(x)$，利用 $f(x)$ 的导数的正或负确定 $f(x)$，进而确定 $u_n = f(n)$ 的单调性.

利用单调有界准则，一般只断定所给数列的极限是存在的. 如果要求出它的极限值 A，则往往是对所给数列的递推关系式两边取极限，然后利用极限的唯一性和保号性而求得极限值 A.

当然，如果用其它方法正确地求得了极限值，则也就意味着它的极限是存在的.

例 9 对 n 个正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n, n \geqslant 2$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty} (a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x)^{\frac{1}{x}}$.

解 令 $A = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，则有

$$A^x < a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x \leqslant nA^x,$$

即有

$$A < (a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x)^{\frac{1}{x}} \leqslant n^{\frac{1}{x}} A.$$

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} n^{\frac{1}{x}} = 1$，故由夹逼准则得原极限存在，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} (a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x)^{\frac{1}{x}} = A$.

例 10 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = \sqrt{7}$，$x_2 = \sqrt{7 - \sqrt{7}}$，$x_{n+2} = \sqrt{7 - \sqrt{7 + x_n}}$，$n = 1, 2, \cdots$，证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求其值.

证明 考虑到

$$|x_{n+2}-2|=\left|\frac{3-\sqrt{7+x_n}}{\sqrt{7-\sqrt{7+x_n}}+2}\right|=\left|\frac{2-x_n}{(\sqrt{7-\sqrt{7+x_n}}+2)(3+\sqrt{7+x_n})}\right|<\frac{|2-x_n|}{6}.$$

由此经递推可得

$$0\leqslant|x_{2k}-2|\leqslant\frac{|x_{2k-2}-2|}{6}\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{6^{k-1}}|x_2-2|,$$

$$0\leqslant|x_{2k-1}-2|\leqslant\frac{|x_{2k-3}-2|}{6}\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{6^{k-1}}|x_1-2|.$$

因$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{6^{k-1}}=0$，故按夹逼准则得，$\lim\limits_{k\to\infty}(x_{2k}-2)=0$，$\lim\limits_{k\to\infty}(x_{2k-1}-2)=0$，即子数列$\{x_{2k}\}$、$\{x_{2k-1}\}$都收敛，且收敛于 2，所以数列$\{x_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

关键词　夹逼准则　递推方法　子数列

注记　本例证明的最后一步是利用命题"若数列$\{x_n\}$的奇数项子数列$\{x_{2k+1}\}$和偶数项子数列$\{x_{2k}\}$都收敛，且它们都收敛于同一极限a，则数列$\{x_n\}$也收敛于a"的结论. 读者可以用极限的分析语言证明这个结论.

例 11　设数列$\{u_n\}$的$u_n>0$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n-1}}=r$，$r<1$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

证法一　因$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n-1}}=r$，$r<1$，故对$\varepsilon_0=\frac{1}{2}(1-r)>0$，必存在正整数$N$，使得当$n>N$时恒有

$$\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}-r\right|<\varepsilon_0=\frac{1}{2}(1-r),$$

即

$$0<\frac{u_n}{u_{n-1}}<r+\frac{1}{2}(1-r)=\frac{1+r}{2}.$$

由关系式$0<u_n<\frac{1+r}{2}u_{n-1}$，经递推得

$$0<u_n<\frac{1+r}{2}u_{n-1}<\left(\frac{1+r}{2}\right)^2u_{n-2}<\cdots<\left(\frac{1+r}{2}\right)^{n-N}u_N.$$

因$0<\frac{1+r}{2}<1$，故$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+r}{2}\right)^{n-N}u_N=0$. 根据夹逼准则证得$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

关键词　夹逼准则　递推方法　极限定义

注记　本例利用极限的定义，由已知极限给出相应的不等式。再由该不等式利用递推关系，建立夹逼准则所需要的不等式. 这类不等式只要在n充分大以后成立即可. 注意，利用递推关系建立相应的不等式是一种重要的常用技巧.

证法二　由条件有$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)=1-r>0$. 根据极限的保号性知，存在正整数$N$和$\eta>0$，使当$n>N$时有$1-\frac{u_n}{u_{n-1}}>\eta>0$，即$u_n<u_{n-1}$，故数列$\{u_n\}$单调减少且有下界零，由单调有界准则得极限$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$存在，设它为$l$，即$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=l$.

由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n-1}}=r$，有$\frac{u_n}{u_{n-1}}=r+\alpha_n$，其中$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$，于是

$$u_n=ru_{n-1}+\alpha_nu_{n-1}.$$

因$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=l$，故$\{u_{n-1}\}$是有界的，从而$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_nu_{n-1}=0$. 对上式取极限得$l=rl+0$，$r\neq1$，所以$l=0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

关键词　单调有界准则　极限的保号性　无穷小

注记　容易发现，当 $|q|<1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}nq^n=0$ 是本例的特殊情况. 因为此时

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}q\,\frac{n}{n-1}=q<1.$$

例 12　设 $a>0,u_1>0,u_{n+1}=\frac{1}{3}(2u_n+\frac{a}{u_n^2}),n=1,2,\cdots$，证明数列 $\{u_n\}$ 是收敛的. 并求其值 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

解　先用极限存在性准则证明数列 $\{u_n\}$ 的极限是存在的，由算术平均值不小于几何平均值得

$$u_{n+1}=\frac{1}{3}\left(u_n+u_n+\frac{a}{u_n^2}\right)\geqslant\sqrt[3]{u_n\cdot u_n\cdot\frac{a}{u_n^2}}=\sqrt[3]{a}.$$

即数列 $\{u_n\}$ 有下界 $\sqrt[3]{a}$. 又有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{3}\left(2+\frac{a}{u_n^3}\right)\leqslant\frac{1}{3}\left(2+\frac{a}{(\sqrt[3]{a})^3}\right)=1,$$

故数列 $\{u_n\}$ 单调减少有下界，则由单调有界准则知，数列 $\{u_n\}$ 必有极限.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$，则有

$$\lim_{n\to\infty}u_{n+1}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(2u_n+\frac{a}{u_n^2}\right),$$

即有 $3A=2A+aA^{-2}$，解得实根 $A=\sqrt[3]{a}$. 由极限的唯一性知 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\sqrt[3]{a}$.

关键词　平均值不等式　单调有界准则　极限唯一性

注记　本题的结果具有普遍性，即：设 $a>0,u_1>0,u_{n+1}=\frac{1}{m}\left[(m-1)u_n+\frac{a}{u_n^{m-1}}\right]$，$n=1,2,\cdots$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\sqrt[m]{a}$.

例 13　设数列 $\{u_n\}$ 的 $u_1=\sqrt{2},u_{n+1}=\sqrt{2u_n},n=1,2,\cdots$，证明数列 $\{u_n\}$ 的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 存在，并求其值.

证法一　用归纳法证明 $\{u_n\}$ 有上界 2：显然 $u_1=\sqrt{2}<2$，设 $u_n<2$，则 $u_{n+1}=\sqrt{2u_n}<\sqrt{4}=2$. 由 $u_n<2$ 得 $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$，故 $\{u_n\}$ 严格增加. 则按单调有界准则即知数列 $\{u_n\}$ 的极限存在，记 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$.

对等式 $u_{n+1}=\sqrt{2u_n}$ 两边令 $n\to\infty$ 得 $A^2-2A=0$. 因 $\{u_n\}$ 单调增加，故 $u_n\geqslant\sqrt{2}$. 按极限的保号性知，$A=2$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=2$.

关键词　单调有界准则　归纳法　极限保号性

证法二　易知

$$u_n=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=2^{1-\frac{1}{2^n}}$$

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=2$. 所以数列 $\{u_n\}$ 极限存在.

注记　由于已经正确地求得了数列 $\{u_n\}$ 的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=2$，因而也就证明了它的极限存在.

例 14 设 $x_n = (1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)$，$0 \leqslant a < 1$，证明数列 $\{x_n\}$ 必收敛.

证明 由不等式 $1+x \leqslant e^x$，$x \geqslant 0$，得

$$x_n \leqslant e^a \cdot e^{a^2} \cdots e^{a^n} = e^{a+a^2+\cdots+a^n} = e^{a\frac{1-a^n}{1-a}} < e^{\frac{a}{1-a}}.$$

又有 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + a^{n+1} \geqslant 1$，故数列 $\{x_n\}$ 是单调增加且有上界，按单调有界准则知数列 $\{x_n\}$ 必收敛.

例 15 设数列 $\{x_n\}$ 由 $2x_1 = 1$，$2x_{n+1} = 1 - x_n^2$，$n = 1,2,\cdots$，确定，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求其值.

证明 先用归纳法证明数列 $\{x_n\}$ 的有界性. 因 $x_1 > 0$，$2x_2 = 1 - x_1^2 = \dfrac{3}{4}$，故有 $0 < x_2 < \dfrac{1}{2}$. 假设 $0 < x_n < \dfrac{1}{2}$ 则由 $x_{n+1} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}x_n^2$ 知，$0 < x_{n+1} < \dfrac{1}{2}$.

其次，考虑数列 $\{x_n\}$ 的单调性. 容易发现，数列 $\{x_n\}$ 不是单调的，但是 $x_{n+1} - x_n$ 的正负号是交错变化的，即 $\{x_n\}$ 的子数列 $\{x_{2k}\}$ 是单调增加的，$\{x_{2k-1}\}$ 是单调减少的. 现用归纳法证明之. 易见，$x_1 > x_3$，$x_2 < x_4$. 假设 $x_{2k-1} > x_{2k+1}$，则

$$x_{2k} - x_{2k+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_{2k-1}^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_{2k+1}^2\right) = \frac{1}{2}(x_{2k+1}^2 - x_{2k-1}^2) < 0,$$

即得 $\{x_{2k}\}$ 单调增加. 又有

$$x_{2k+1} - x_{2k+3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_{2k}^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_{2k+2}^2\right) = \frac{1}{2}(x_{2k+2}^2 - x_{2k}^2) > 0,$$

即知 $\{x_{2k-1}\}$ 单调减少，根据单调有界准则知，$\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k}$ 存在，$\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1}$ 也存在.

设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = A$，$\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = B$，由 $0 < x_n < \dfrac{1}{2}$ 有 $0 \leqslant A \leqslant \dfrac{1}{2}$，$0 \leqslant B \leqslant \dfrac{1}{2}$. 由 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}x_{2k-1}^2\right)$ 得 $A = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}B^2$；由 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}x_{2k}^2\right)$ 得 $B = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}A^2$. 两式相减得 $(A-B)(2-A-B) = 0$. 因 $A + B \leqslant 1$，故 $A = B$，即 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = \sqrt{2} - 1$.
所以数列 $\{x_n\}$ 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2} - 1$.

关键词 单调有界准则　归纳法　子数列

例 16 设函数 $f(x)$ 满足条件

1° $-\infty < a \leqslant f(x) \leqslant b < +\infty$，$x \in [a,b]$

2° $|f(x') - f(x'')| \leqslant q|x' - x''|$，$0 < q < 1$，$x', x'' \in [a,b]$；

对于 $x_1 \in [a,b]$，由 $x_n = f(x_{n-1})$，$n = 2,3,\cdots$，定义数列 $\{x_n\}$，证明数列 $\{x_n\}$ 是收敛的.

证法一 对于任意的正整数 n 与 p，由条件有

$$\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &= |x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} + \cdots - x_{n+1} + x_{n+1} - x_n| \\
&\leqslant |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\
&= |f(x_{n+p-1}) - f(x_{n+p-2})| + |f(x_{n+p-2}) - f(x_{n+p-3})| + \cdots + |f(x_n) - f(x_{n-1})| \\
&\leqslant q|x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + q|x_{n+p-2} - x_{n+p-3}| + \cdots + q|x_n - x_{n-1}| \\
&= q\{|f(x_{n+p-2}) - f(x_{n+p-3})| + |f(x_{n+p-3}) - f(x_{n+p-4})| + \cdots \\
&\quad + |f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})|\} \leqslant \cdots \leqslant (q^p + q^{p-1} + \cdots + q + 1)q^n|x_2 - x_1| \\
&= \frac{1-q^{p+1}}{1-q}q^n|x_2 - x_1| < \frac{q^n}{1-q}|x_2 - x_1|.
\end{aligned}$$