蒋咏秋 主编

弹性力学基础

陕西科学技术出版社

弹性力学基础

西安交通大学　蒋咏秋　主　编
西安工业学院　李建勋　张治强

陕西科学技术出版社

弹性力学基础
蒋咏秋　主编
李建勋　张治强　编
陕西科学技术出版社出版
（西安北大街131号）
陕西省新华书店发行　国营五二三厂印刷
开本850×1168　1/32　印张11.75　字数255,000
1984年9月第1版　1984年9月第1次印刷
印数1—5,200
统一书号：7202·88　定价：2.25元

前　言

本书全面系统地阐述了弹性力学的基本理论及某些特殊问题，如薄板的弯曲等问题。介绍了求解弹性力学的变分法、有限差分法及有限元法。对于机械制造专业经常遇到的一些问题，如各种形状的等截面杆的扭转问题、组合筒、旋转圆盘、接触问题及用有限元法解空间轴对称问题等都有较详细地叙述，并在有关章节中结合机械制造的实际列举了许多实例。

本书由西安交通大学蒋咏秋教授主编，其中第一、九、十、十一和十二章由蒋咏秋编写，第二、三、四、五、七和八章由李建勋编写，第六和十三章由张治强编写。

本书供工程技术人员和科学研究人员参考，也可作为高等工业院校机械制造专业、动力机械类和土建类专业高年级学生及研究生的试用教材或参考书。

由于编者水平有限，书中一定有许多缺点甚或错误之处，敬希读者批评指正。

目　　录

第一章　绪论……………………………………………（1）
§1.1　弹性力学的任务……………………………………（1）
§1.2　弹性力学的基本假设………………………………（2）
§1.3　弹性力学的基本方法………………………………（3）
第二章　应力分析………………………………………（5）
§2.1　外力、内力及应力…………………………………（5）
§2.2　物体内一点的应力状态……………………………（7）
§2.3　平衡方程……………………………………………（13）
§2.4　坐标变换及其对应力分量的影响…………………（16）
§2.5　主应力、应力主轴…………………………………（19）
§2.6　最大剪应力…………………………………………（22）
第三章　应变分析………………………………………（26）
§3.1　位移、变形及应变…………………………………（26）
§3.2　几何方程……………………………………………（28）
§3.3　转动分量……………………………………………（33）
§3.4　应变分量的坐标变换　一点的应变状态……………………………………………………（36）
§3.5　主应变、应变主向及体积应变……………………（38）
§3.6　变形协调方程………………………………………（43）
第四章　应力与应变的关系……………………………（47）
§4.1　应力与应变的关系…………………………………（47）

§4.2　弹性体的应变能……………………………（49）
§4.3　弹性系数间的关系…………………………（53）
§4.4　各向同性体虎克定律………………………（56）
§4.5　各向同性体弹性系数间的关系……………（62）
第五章　弹性力学问题的解法…………………………（67）
§5.1　弹性力学基本方程…………………………（67）
§5.2　按应力求解弹性力学问题…………………（71）
§5.3　按位移求解弹性力学问题…………………（73）
§5.4　双调和函数…………………………………（75）
§5.5　圣维南原理…………………………………（78）
§5.6　弹性力学问题解答的唯一性定理…………（80）
附　录　贝尔特拉密——密乞尔方程的推导………（84）
第六章　柱体的扭转…………………………………（90）
§6.1　柱体的扭转…………………………………（90）
§6.2　应力函数……………………………………（97）
§6.3　椭圆截面柱体的扭转………………………（99）
§6.4　有小半圆槽的圆截面柱体的扭转…………（102）
§6.5　矩形截面柱体扭转…………………………（103）
§6.6　薄膜比拟……………………………………（107）
§6.7　开口薄壁截面柱体的扭转…………………（110）
§6.8　多连通薄壁截面柱体的扭转………………（114）
第七章　平面问题的直角坐标解……………………（123）
§7.1　空间问题与平面问题………………………（123）
§7.2　平面问题的基本方程………………………（126）
§7.3　平面问题的解法……………………………（130）
§7.4　应力函数……………………………………（133）

§7.5　用多项式解平面问题……………………(135)
§7.6　悬臂梁的弯曲……………………………(139)
§7.7　承受均布载荷简支梁的弯曲………………(146)
第八章　平面问题的极坐标解……………………(155)
§8.1　基本方程…………………………………(155)
§8.2　极坐标中的应力函数及协调方程…………(162)
§8.3　应力与极角无关的轴对称问题……………(166)
§8.4　曲杆的纯弯曲……………………………(169)
§8.5　厚壁圆筒…………………………………(172)
§8.6　组合厚壁筒………………………………(176)
§8.7　无限大平板上圆孔的孔边应力集中………(180)
§8.8　楔形体在楔顶受力………………………(187)
§8.9　直线边界的二维半无限体的变形…………(190)
§8.10　两个平行轴圆柱的接触问题……………(193)
§8.11　旋转圆盘及转轴的应力…………………(199)
第九章　空间轴对称问题…………………………(205)
§9.1　轴对称问题的基本方程……………………(205)
§9.2　轴对称问题的解答…………………………(214)
§9.3　半空间无限体在边界平面上所受的
集中力……………………………………(216)
§9.4　半空间无限体在边界平面受局部分布载荷时
的情形……………………………………(221)
§9.5　两个球体的接触问题………………………(223)
第十章　热应力…………………………………(228)
§10.1　热传导的基本原理………………………(228)
§10.2　圆板的热应力……………………………(231)

§10.3　长圆柱体的温度应力……………………………(234)
§10.4　热应力的一般方程……………………………(239)
第十一章　弹性力学中的能量原理及变分法…………(242)
§11.1　变分概念……………………………………(242)
§11.2　虚位移原理…………………………………(243)
§11.3　最小势能原理………………………………(246)
§11.4　位移变分方程的应用………………………(250)
§11.5　最小余能原理………………………………(255)
§11.6　应力变分方程应用于平面问题……………(259)
§11.7　应力变分方程应用于扭转问题……………(263)
第十二章　有限单元法………………………………(272)
§12.1　概述…………………………………………(272)
§12.2　平面问题的三角形有限单元法……………(274)
§12.3　平面问题的三角形单元上的应变及应力…(278)
§12.4　三角形单元的刚度矩阵……………………(282)
§12.5　三角形单元整体刚度矩阵…………………(286)
§12.6　面积坐标……………………………………(290)
§12.7　载荷列阵……………………………………(393)
§12.8　平面问题三角形有限单元解法的计算
步骤…………………………………………(299)
§12.9　空间轴对称问题的有限单元法……………(300)
§12.10　空间轴对称问题有限元法的基本方程……(305)
§12.11　单元刚度矩阵………………………………(309)
§12.12　空间轴对称问题三角形单元的等效节点力
载荷列阵……………………………………(314)
§12.13　三角形面积上的数值积分…………………(319)

§12.14 压紧配合部件中的应力……………………(321)
§12.15 计算实例……………………………………(322)
第十三章 薄板的弯曲……………………………………(324)
§13.1 基本概念及假设………………………………(324)
§13.2 薄板弯曲的基本方程…………………………(326)
§13.3 薄板横截面上的内力…………………………(331)
§13.4 薄板的边界条件………………………………(333)
§13.5 矩形薄板的三角级数解………………………(338)
§13.6 等厚圆板的轴对称弯曲………………………(342)
§13.7 用变分法计算板的位移………………………(350)
§13.8 用差分法计算板的位移………………………(357)

第一章 绪　论

§1.1 弹性力学的任务

弹性力学是固体力学的一个分支学科。它的任务是研究机器构件和工程结构在弹性范围内工作时的应力，应变和位移，为强度和刚度计算提供依据。

弹性力学的任务与材料力学、结构力学的任务是相仿的，但是又有区别。材料力学和结构力学研究的对象是杆件和杆件系统，而弹性力学研究的对象将包括杆、板、壳、块体及由它们所组成的结构，例如机械工程方面的起重、运输机械和动力机械中的许多零部件，诸如叶轮、机壳、大轴、机座，底盘；土建工程中的桥梁、隧道、挡土墙和基础等。

材料力学中除了一些必要的基本假设以外，为了简化问题，还根据不同的研究对象，添加了一些所谓“附加假设”，例如研究梁的弯曲时，引用了横截面保持为平面的假设。又如在材料力学中计算有孔的拉杆时，通常假设拉应力在净截面上均匀分布。可以看出，材料力学计算的结果只在一定的范围内才和实际情况接近，在此范围以外就不能应用。而弹性力学中摒弃了这些附加假设。

从上面的分析，可以看出弹性力学的任务是建立并给出用材料力学无法求解的问题的理论和方法，并且它能给出初等理论可靠性与精确度的度量。

§1.2 弹性力学的基本假设

在弹性力学里，为了能通过已知的量（如物体的几何形状和尺寸，物体所受的外力，温度变化或几何约束）求出应力，应变和位移等未知量。首先要从问题的静力学、几何学和物理学三方面出发，建立这些未知量所满足的弹性力学的基本方程和相应的边界条件。弹性力学研究的对象是物体，物体有各种各样，并且是千变万化的；因而，作为一门科学，要想找出一般的规律和计算方法，势必将千变万化的现象加以简化和概括，这就不能离开假设。当然，这些假设必须是根据实际由实践中得来，而不是主观忆测。在以后的计论中，将采用以下六条基本假设：

1. **连续性假设**：弹性力学作为连续介质力学的一部分，它的基本前提将可变形固体看作是连续密实的物体，即组成物体的质点之间不存在任何空隙。因此，物体中的应力、应变、位移等量是连续的，可以用坐标的连续函数表示。事实上，一切物体都是由微粒组成的，都不可能符合这个假设。但可以想象，当微粒尺寸以及各微粒之间的距离远比物体的几何尺寸小时，运用这个假设并不会引起显著的误差。

2. **完全弹性的假设**：所谓弹性，是物体在产生变形的外界因素（外力、温度变化等）被除去之后能恢复原形这一性质。所谓完全弹性，指的是物体能完全恢复原形而没有任何残余变形。同时还假设物体是服从虎克定律，即应力和应变呈线性关系。

3. **均匀性假设**：假定整个物体是同一类型的均匀材料所

组成的。这样，整个物体的所有各部分都具有相同的物理性质，因而物体的弹性模量、泊松系数等都是常数，而不是坐标的函数。不具备这种性质的物体叫非均质弹性体(例如玻璃钢)。

4. 各向同性假设：假定物体在不同的方向上具有相同的物理性质；不具备这种性质的物体称做各向异性体。木材和竹材是各向异性的，单晶体是各向异性的。钢材虽然由无数个各向异性的晶体组成，但由于晶体很小，而且排列是杂乱无章的，所以从宏观的意义上说是各向同性的。

凡是符合以上四个假设的物体，就称为理想弹性体。

5. 小变形假设：假定物体在外界因素作用所产生的位移远小于物体原来的尺寸，因而应变分量和转角都远小于1。这样，在研究物体的平衡时，可不考虑由于变形所引起的物体尺寸和位置的变化；在建立几何方程和物理方程时，可以略去应变及转角的二次幂或二次乘积以上的项，使得到的基本方程是线性偏微分方程。

6. 无初应力的假设：假定物体是处于自然状态，即在外界因素作用之前，物体内部没有应力。根据这个假设，由弹性力学方法求得的应力是由于外力或温度变化的作用所产生的。若物体内有初应力存在，则当物体受外界因素作用时，它的内部实际存在的应力，应等于初应力加上用弹性力学方法所求得的应力。

在上述基本假设中，第5假设是属于几何假设，其他假设均属物理假设。

§1.3 弹性力学的基本方法

弹性力学解决问题的方法与材料力学的方法是不相同的。

在材料力学中，常用的是截面法。而在弹性力学中，常用的分离体是无数个平行六面体（内部）或四面体（表面）。考虑这些分离体的平衡，可写出一组平衡微分方程，但未知应力数总是超出微分方程数，所以弹性力学的问题总是超静定的。因此，只有静力平衡方程是不能解出应力来的，必须考虑变形条件。由于物体的连续性假设，物体发生变形后，还是一个连续体，因此应变必须协调，这样可得到一组表示应变协调的微分方程。并由虎克定律表示应力与应变之间的关系。此外，解上述微分方程必须知道边界条件，才能使问题有唯一确定的解。综上所述，解决弹性力学问题，必须考虑静力平衡方程，几何方程，物理方程以及边界条件，这就是所谓偏微分方程的边值问题。

由于弹性力学涉及的都是偏微分方程，通解往往不易求得，所以用逆解法。即先假设一解答，若这个解答能满足所有的微分方程，同时也满足边界条件，则这个解答就是正确的，也是唯一的。有时也用半逆解法，即先设一部分解答，另一部分在解题过程中求出。

我们知道，偏微分方程的解析解一般不易得到，所以人们通过二个途径去求近似解。一是数学上的近似，例如差分法；另一种是物理上的近似，如有限单元法。这两种方法都是常用的方法。

第二章　应力分析

§2.1　外力、内力及应力

任何一个物体所承受的外力，一般均可分为体积力及表面力两大类。

所谓体积力是指分布在物体整个体积内的外力。如物体在重力场中所受的重力、旋转时所承受的离心力、在磁场中的磁力……等，都是体积力。体积力一般可用单位体积上的力来表示。

若设矢量$\vec{F}$表示物体每单位体积的体积力，由于其随作用点位置不同而异，因而是各点位置坐标 x、y、z 的函数。

我们从物体中取出一平行六面微分体，如图 2.1—1 所示。使平行六面微分体的面与各坐标面平行，并设其边分别为 dx, dy, dz, 而其体积为 $dV=dx\cdot dy\cdot dz$。若将体积力分解为三个分量 X，Y，Z；则作用在这个六面微分体上的体积力为 XdV，YdV，ZdV。

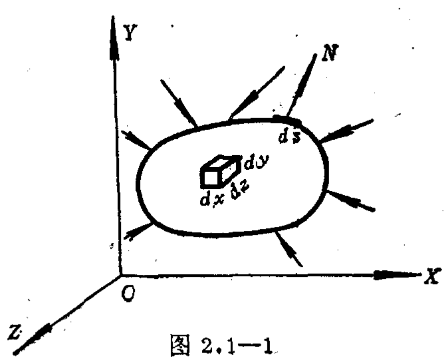

图 2.1—1

表面力是指作用在物体表面上的外力。它一般是分布力，用表面面积上的力表示，也可以是集中力，即分布在很小面积上

的外力。物体与气体，液体或另一种物体相接触所受的力都是表面力(本书中所提到的“物体”是指固体，而且是弹性体)。

若设矢量 $\vec{f}$ 表示物体单位面积的表面力，由于其随物体表面各点位置的不同而异，因而也应将表面力视为物体表面各点位置坐标 x，y，z 的函数。

和体积力一样，我们也可将表面力沿坐标轴分解为三个分量 X_N，Y_N，Z_N。则作用在外法线为 N 的微分表面 dS 上的表面力为 X_NdS，Y_NdS，Z_NdS。它们同样也是物体表面各点坐标 x，y，z 的函数。

不难想象，任何物体在外力作用下，其尺寸及几何形状将要发生改变，即产生所谓“变形”。同时在物体内部各部分之间，将有所谓“附加内力”的产生。弹性力学所要讨论的就是这种“附加内力”，简称之为内力。

内力仍然可用“截面法”予以确定。现考察一承受外力 P_1，P_2，……P_n 的任意形状的物体，如图 2.1—2 所示。要确定任意截面 $m-m$ 上的内力，则可假想用一个平面沿 $m-m$ 面将物体切开，所得两部分将在该面上有内力相互作用，即可借助静力平衡条件将用截面法暴露出的内力予以确定。一般来讲，不同截面上的内力是不同的，即使是通过同一点的不同方位截面上的内力也是不尽相同的。而且在同一个截面上，各点所作用的内力之大小与方向也不相同。

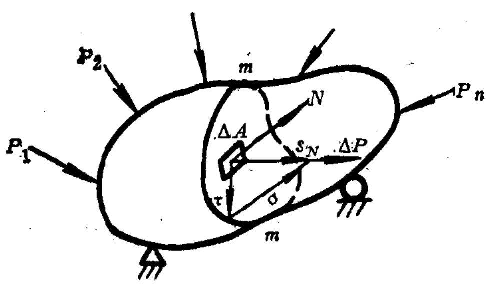

图 2.1—2

现研究外法线为 N 的 $m-m$ 截面上任意一点 M。根据连续性假设，可围绕 M 点取一微分面积 $\triangle A$，并以 $\triangle\vec{P}$ 表示微分面积 $\triangle A$ 上的微小内力，则有：

$$\vec{S_N} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta A} \tag{2.1—1}$$

称为外法线为 N 的 $m-m$ 面上任一点处的全应力。

显而易见，所谓一点处的应力，就是一点处分布内力的集度。它反映了截面上一点处内力的大小与方向。一般来讲，同一截面上不同的点具有不同的应力，而且即使是同一点，随着通过该点截面的方位不同，应力的大小及方向也会发生变化。可见，一点处的应力也是该点位置坐标及所取截面方位的函数。

由于应力是矢量，在进行应力分析时，根据大量物体变形与破坏的实际情况，同时也为了处理问题方便，一般可将应力分解成为两个分量。一个分量沿着截面的法线方向，称为正应力；并以符号 σ 表示。另一个分量则沿着截面的切线方向，称为剪应力，并以符号 τ 表示。

应力矢量的分解与合成可按矢量的有关规则进行。

§2.2 物体内一点的应力状态

所谓一点的应力状态，就是指通过一点的各个截面上的应力情况。

在研究一点的应力状态时，可围绕被考察的点，用平行于三个坐标平面的三对平行面切出一平行六面微分体，即所谓单元体。当其棱边尺寸 dx，dy，dz 足够小时，单元体即趋于

宏观上的一“点”，因此，研究此单元体的各个截面上的应力状况，即可代表被考察点的应力状态。

现研究物体内任一点 M 处的应力状态。为此，围绕 M 点取出一平行六面微分体，即单元体，如图 2.2—1 所示。

由于通过一点的不同平面上的应力不同，所以单元体的每个侧面上，都应有不同的应力存在。若将每个侧面上的全应力分解成为三个与坐标轴平行的应力分量，即一个正应力分量与

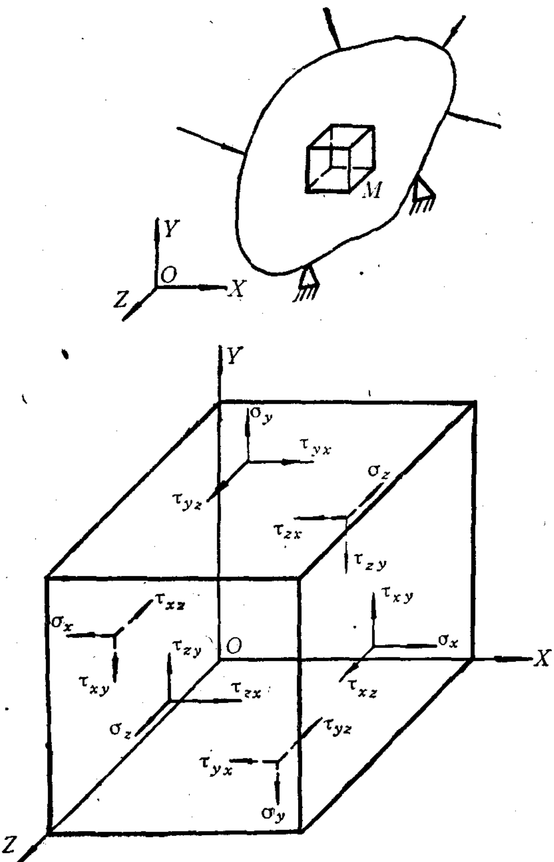

图 2.2—1