微分几何学

〔日〕佐佐木重夫 著　苏步青 译

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书是一本自始至终用活动标形论的方法深入浅出地阐述现代微分几何基础理论的书籍，接触到整体微分几何的内容．全书共分四章，即曲线论、合同变换群与微分形式、曲面论、曲面上的几何学．适宜于高等学校作为微分几何课程的教材或参考书．

微 分 几 何 学
佐佐木重夫
共立出版株式会社
*
微 分 几 何 学
苏 步 青 译
上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
新华书店上海发行所发行　上海新华印刷厂印刷
开本 850×1156　1/32　印张 7.125　字数 169,000
1963年5月第1版　1981年7月第4次印刷
印数 67,201—71,200
统一书号：13119·347　　定价：1.10元

譯者的話

本书是佐佐木重夫教授在一九五六年为日本出版的“基础数学讲座”編写成的，所采用的方法是活动标形論的方法，深入淺出，确是一本好书．在国际上用这样現代化的方法写成的微分几何学曾經有过一本，就是德国伯拉須开教授的“微分几何学引論”(1950版，另有俄文譯本)，此外就不多見了．去年在中国数学会召开的微分几何座談会上，大家推我为佐佐木教授著书的翻譯者，理由是它比伯拉須开教授的一本写得平易些．現在把它譯出来了．由于譯者水平有限，而时間匆促，誤譯之处在所不免，希望讀者随时指正．

譯文脫稿后，复旦大学数学系助教林鈞海同志校对过全文，提出了一些有益的意見，在这里表示謝意．

苏步青 1962年在上海

緒　言

在日本也已經出版了很多的微分几何著书，单是关于欧几里得微分几何的就有五种. 如果再要写一本欧几里得微分几何导論，便不免要和这些著书的內容重复；我以为，反正动了笔，同这些著书相比較总要有一些特点才有意义. 翻一翻已出版的欧几里得微分几何书籍，发觉这些著书或者光把微积分知識应用到解析几何中来，借以建立起微分几何的概念和定理，或者利用張量分析进行討論，所用的方法不外乎这两种. 另外还有一种显著的方法，即称为活动标形論的方法，虽然也有的书接触到它，但是从头到尾用这方法来写成的还沒有过. 活动标形法是由法国的 Darboux 和意大利的 Cesàro 所首創，而且法国的 Cartan 才使它完备起来的. 它不仅对欧几里得微分几何，而且进一步对黎曼几何和其他微分几何都是同样地可以适用的. 不但如此，这方法在和几何学有关联的李群論、微分形式論、拓扑学等，特别是在近年来有显著发展的其他数学分科里，也都有密切关系. 此外，在工程学上用活动标形来討論齿輪的齿廓曲綫和齿廓曲面理論这一类的問題，非常方便. 所以在本书里自始至終采用了活动标形法作为叙述欧几里得微分几何的工具. 这是本书的第一个特点.

其次，微分几何的原来目的是利用微积分来研究曲綫、曲面等图形的性质，从而在古典微分几何里主要是研究曲綫和曲面在其一点邻域的性质，而忽視了曲綫和曲面作为整体的性质的探討. 可

是，最近随着拓扑学和数学分析学的进展，开始注意对图形的整体性质的研究；在微分几何里不仅要討論所給定图形的局部性质，同时还涉及所論图形的整体性质的一类問題．称具有这种趋势的微分几何为整体微分几何，而相对地称原来的微分几何为局部微分几何．本书还接触到整体微分几何，这是它的第二个特点．

但是，由于篇幅有限，而且在叙述过程中或多或少还有过分周到之嫌，以致沒有能够把內容更好地充实起来，殊为遺憾，只好希望将来能得到弥补的机会．

著　者　1956年2月18日在仙台

目　录

第1章 曲 綫 論

1·1 向量記法

在三維欧几里得空間里选取直交笛卡儿坐标系. 习慣上,称普通笛卡儿坐标系的坐标軸为 x 軸、y 軸、z 軸,把点的坐标写成 (x, y, z), (x', y', z'), (x_1, y_1, z_1) 或 (a, b, c). 但是在本书里稍为改变記法,称坐标軸为 x_1 軸、x_2 軸、x_3 軸,从而采用 (x_1, x_2, x_3), (x'_1, x'_2, x'_3), (a_1, a_2, a_3) 等作为点的坐标. 有时,把 (x_1, x_2, x_3), (a_1, a_2, a_3) 表做 $x_i (i=1, 2, 3)$, $a_j (j=1,2,3)$. 又有时,預先規定 i, j, k 等为取动值 1, 2, 3 的記号,而单用 x_i, a_j 等来表达. 这个記法的优点在于能够把坐标是 (x_1, x_2, x_3), (a_1, a_2, a_3) 等等的点分别用有关的核文字 x, a 等等本质地表达出来. 从几何看来,只用一个記号表达一物,在直观地理解内容的問題上是重要的. 附在核文字 x, a 等的数字 1, 2, 3 称为**指标**,本书里用做指标的 i, j, k 都規定为取动值 1, 2, 3 的数.

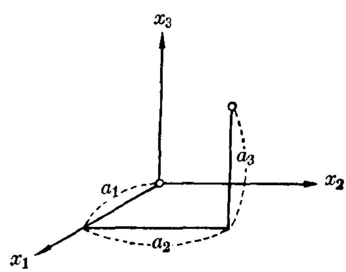

图 1·1

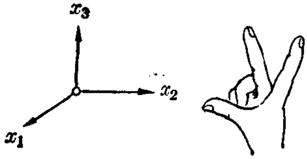

图 1·2

我們作出坐标軸形成右手制的規定. 所謂**右手制**是把右手的大拇指、

食指分别指向 x_1 軸、x_2 軸的正方向时，中指重合 x_3 軸的正方向的系統.（如果 x_3 軸的正方向与中指有反对的方向，便是左手制.）

对空間里定有顺序的两点从始点向着終点的綫段称为**有向綫段**或**向量**. 用 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 表达始点 A、終点 B 的向量. 当平行移动两向量 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ 中的一条使始点重合时，如果終点也重合，就称为相等. 当 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 与 $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ 相等时，記为

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}.$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 与 $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ 是不同的向量. 本书里，如沒有混淆不清时，为方便略去矢符.

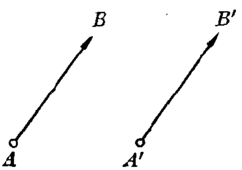

图 1.3

用点 A, B 的坐标 a_i, $b_i (i=1,2,3)$ 作成的 $b_i-a_i (i=1, 2, 3)$（詳細地，应写作 $(b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3)$）称为 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 的**支量**. 相等的向量有相等的支量；容易知道，反过来也成立. 把始点与終点一致的情况当作向量的特殊情况来看待，称为零向量而且記做 0. 它的支量是 (0, 0, 0).

向量虽不是数，但也可以考虑加法、减法、乘法. 設 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ 表示支量分别是 x_i, y_i, z_i 的向量，首先 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{Y}$ 的**和**（記号是 $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$）意味着以 x_i+y_i 为支量的向量. 当 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ 不平行时，把有同一始点的两向量 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ 当做两边，几何学地作出平行四边形；那末 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{Y}$ 的和是以这平行四边形的第四頂点为終点而且以公共始点为始点的向量（平行四边形法則）.

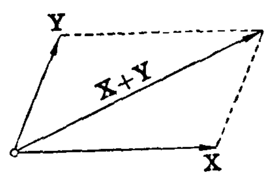

图 1.4

設 $\mathbf{X}$ 的支量是 x_i，以 $-x_i$ 为支量的向量記作 $-\mathbf{X}$. 这样，

$$\mathbf{X}+(-\mathbf{X})=0, \tag{1·1}$$

其中，右边是零向量. 减法决定于

$$\mathbf{X}-\mathbf{Y}=\mathbf{X}+(-\mathbf{Y}). \tag{1·2}$$

就是 $\mathbf{X}-\mathbf{Y}$ 意味着支量是 x_i-y_i 的向量.

如果考察以实数的拼三小組为支量的所有向量，减法也就被包括在加法之中了。

容易驗証

(交換律)　$$\mathbf{X}+\mathbf{Y}=\mathbf{Y}+\mathbf{X}, \tag{1·3}$$

(結合律)　$$(\mathbf{X}+\mathbf{Y})+\mathbf{Z}=\mathbf{X}+(\mathbf{Y}+\mathbf{Z}). \tag{1·4}$$

乘法有三种．第一种：支量是 x_i 的向量 $\mathbf{X}$ 与常数 a 的积(記号是 $a\mathbf{X}$)，意味着支量是 ax_i 的向量．很明显地成立

(結合律)　$$a(b\mathbf{X})=(ab)\mathbf{X}, \tag{1·5}$$

(分配律)　$$a(\mathbf{X}+\mathbf{Y})=a\mathbf{X}+a\mathbf{Y}. \tag{1·6}$$

当 $a>0$ 时，$\mathbf{X}$ 与 $a\mathbf{X}$ 有同一取向.

第二种：称为**内积**或**数量积**，对于两向量 $\mathbf{X},\mathbf{Y}$，作出实数

$$(\mathbf{XY})\equiv\sum x_iy_i=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 \tag{1·7}$$

来定义它．写法是 $(\mathbf{XY})$，$\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}$ 等．特别是

$$(\mathbf{XX})\equiv\mathbf{X}^2\equiv\sum x_i^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2, \tag{1·8}$$

称为向量 $\mathbf{X}$ 的数量平方．很明显，$\sqrt{(\mathbf{XX})}$ 表示 $\mathbf{X}$ 的长，从而 $\dfrac{\mathbf{X}}{\sqrt{(\mathbf{XX})}}$ 表示与 $\mathbf{X}$ 有同一取向而长为 1 的向量．因此，它的支量是 $\mathbf{X}$ 的方向余弦．同样，由于 $\mathbf{Y}$ 的方向余弦是 $\dfrac{\mathbf{Y}}{\sqrt{(\mathbf{YY})}}$．当 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{Y}$ 所成的角是 θ 时，便得到

$$\cos\theta=\frac{(\mathbf{XY})}{\sqrt{(\mathbf{XX})(\mathbf{YY})}}. \tag{1·9}$$

从而，几何学地看来，$(\mathbf{XY})$ 是 $\mathbf{X}$，$\mathbf{Y}$ 的长与所成角的余弦相乘的数量．特别是从(1·9)可以明了，向量 $\mathbf{X}$，$\mathbf{Y}$ 垂直的条件是

$$(\mathbf{XY})=0. \tag{1·10}$$

容易得到

(交换律) $$(\mathbf{XY})=(\mathbf{YX}),\tag{1·11}$$

(分配律) $$\mathbf{X}\cdot(\mathbf{Y}+\mathbf{Z})=\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}+\mathbf{X}\cdot\mathbf{Z}.\tag{1·12}$$

第三种：称为**外积**或**向量积**，对于 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ 它意味着以

$$x_2y_3-x_3y_2,\quad x_3y_1-x_1y_3,\quad x_1y_2-x_2y_1\tag{1·13}$$

为支量的向量，用記号 $\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$ 来表它.

設行列式

$$|\mathbf{X}\ \mathbf{Y}\ \mathbf{Z}|=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}\tag{1·14}$$

表示以 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ 的支量为元的行列式，容易看出，

$$\begin{aligned}|\mathbf{X}\ \mathbf{Y}\ \mathbf{Z}|&=|\mathbf{Y}\ \mathbf{Z}\ \mathbf{X}|=|\mathbf{Z}\ \mathbf{X}\ \mathbf{Y}|=-|\mathbf{X}\ \mathbf{Z}\ \mathbf{Y}|\\ &=-|\mathbf{Y}\ \mathbf{X}\ \mathbf{Z}|=-|\mathbf{Z}\ \mathbf{Y}\ \mathbf{X}|,\end{aligned}\tag{1·15}$$

$$|\mathbf{X}\ \mathbf{Y}\ \mathbf{Z}|\,|\mathbf{X}'\ \mathbf{Y}'\ \mathbf{Z}'|=\begin{vmatrix}(\mathbf{XX}') & (\mathbf{XY}') & (\mathbf{XZ}')\\ (\mathbf{YX}') & (\mathbf{YY}') & (\mathbf{YZ}')\\ (\mathbf{ZX}') & (\mathbf{ZY}') & (\mathbf{ZZ}')\end{vmatrix}.\tag{1·16}$$

可是，
$$\mathbf{X}\cdot(\mathbf{X}\times\mathbf{Y})=|\mathbf{X}\ \mathbf{X}\ \mathbf{Y}|=0,$$
$$\mathbf{Y}\cdot(\mathbf{X}\times\mathbf{Y})=|\mathbf{Y}\ \mathbf{X}\ \mathbf{Y}|=0,$$

所以 $\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$ 和 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ 都垂直. 另一方面，

$$\begin{aligned}(\mathbf{X}\times\mathbf{Y})^2&=\begin{vmatrix}x_2 & x_3\\ y_2 & y_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_3 & x_1\\ y_3 & y_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}^2\\ &=\begin{vmatrix}x_1^2+x_2^2+x_3^2 & x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3\\ x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 & y_1^2+y_2^2+y_3^2\end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix}(\mathbf{XX}) & (\mathbf{XY})\\ (\mathbf{XY}) & (\mathbf{YY})\end{vmatrix};\end{aligned}$$

設 θ 是 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ 所成的角，便有

$$(\mathbf{X}\times\mathbf{Y})^2=(\mathbf{XX})(\mathbf{YY})\begin{vmatrix}1 & \cos\theta\\ \cos\theta & 1\end{vmatrix}$$
$$=(\mathbf{XX})(\mathbf{YY})\sin^2\theta,$$

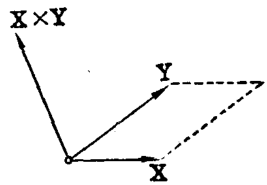

图　1.5

这是由向量 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ 所作成的平行四边形面积的平方，所以 $\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$ 的长等于以 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ 作成的平行四边形的面积.

現在按照 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$ 等三向量的順序作出行列式 $|\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{X}\times\mathbf{Y}|$，它等于 $(\mathbf{X}\times\mathbf{Y})^2$，所以是正数. 这表明按这順序的三向量 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$ 形成右手制.

从以上所述看出，向量积 $\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$ 可以几何学地解釋为这样的向量：它和 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ 都垂直，具有 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ 所作成的平行四边形的面积的长，而且 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ 和这向量形成右手制. 容易驗証

$$\mathbf{X}\times\mathbf{Y}=-(\mathbf{Y}\times\mathbf{X}),\tag{1·17}$$

$$\mathbf{X}\times(\mathbf{Y}+\mathbf{Z})=\mathbf{X}\times\mathbf{Y}+\mathbf{X}\times\mathbf{Z},\tag{1·18}$$

$$\mathbf{X}\cdot(\mathbf{Y}\times\mathbf{Z})=\mathbf{Y}\cdot(\mathbf{Z}\times\mathbf{X})=\mathbf{Z}\cdot(\mathbf{X}\times\mathbf{Y})$$
$$=|\mathbf{X}\,\mathbf{Y}\,\mathbf{Z}|.\tag{1·19}$$

又可証明下列关系式成立：

$$(\mathbf{X}\times\mathbf{Y})\times\mathbf{Z}=(\mathbf{XZ})\mathbf{Y}-(\mathbf{YZ})\mathbf{X},\tag{1·20}$$

$$(\mathbf{X}\times\mathbf{Y})(\mathbf{X}'\times\mathbf{Y}')=(\mathbf{XX}')(\mathbf{YY}')-(\mathbf{XY}')(\mathbf{YX}').\tag{1·21}$$

最后式称为 Lagrange 恒等式.

設对于二向量 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ 成立 $a\mathbf{X}+b\mathbf{Y}=0$，而且存在不同时等于 0 的实数 a, b，就称为 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ **綫性相关**或者綫性不独立. 在相反的时候，称为 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ **綫性独立**. 从几何学看来，綫性相关有这样的解釋，把二向量安排到同一始点时，它們在一直綫上.

設在三向量 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ 之間成立

$$a\mathbf{X}+b\mathbf{Y}+c\mathbf{Z}=0,$$

而且存在不同时等于 0 的实数 a, b, c，或者不存在，那末分别称 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ 是綫性相关，或者綫性独立．这时几何学的解釋是这样：当三向量綫性相关时，把它們安排到同一始点，它們在一平面上．为了 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ 要綫性相关，充要条件是

$$|\mathbf{X}\,\mathbf{Y}\,\mathbf{Z}|=0.$$

【习題】

1．証明

$$(\mathbf{X}\times\mathbf{Y})\times(\mathbf{X}'\times\mathbf{Y}')=|\mathbf{X}\,\mathbf{X}'\,\mathbf{Y}'|\mathbf{Y}-|\mathbf{Y}\,\mathbf{X}'\,\mathbf{Y}'|\mathbf{X}$$
$$=|\mathbf{X}\,\mathbf{Y}\,\mathbf{Y}'|\mathbf{X}'-|\mathbf{X}\,\mathbf{Y}\,\mathbf{X}'|\mathbf{Y}'.$$

2．証明

$$|\mathbf{X}\times\mathbf{X}',\ \mathbf{Y}\times\mathbf{Y}',\ \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}'|=|\mathbf{X}\,\mathbf{X}'\,\mathbf{Y}'|\,|\mathbf{Y}\,\mathbf{Z}\,\mathbf{Z}'|-|\mathbf{X}\,\mathbf{X}'\,\mathbf{Y}|\,|\mathbf{Y}'\,\mathbf{Z}\,\mathbf{Z}'|.$$

1·2 曲綫的参数表示．切綫与密切平面

在微积分里，为表示平面曲綫，經常采用形如

$$y=f(x)$$

的方程．曲綫的这种表示法有三个缺点．第一，关于 x, y，方程的形状不对称；第二，在切綫平行于 y 軸的点，微商 f' 变为 ∞；第三，当 y 軸的平行直綫和所論曲綫在两点以上相交时，$f(x)$ 成为多值函数．为了除去这些缺点，普通采用形如

$$x=f(t),\quad y=g(t),\quad a\leqslant t\leqslant b$$

的参数表示．对于微分几何的目的說来，这个方式較为便利．

我們将主要研究不在一平面上的所有曲綫，卽所謂空間曲綫，同上式相类似地采用

$$x_i=f_i(t),\quad a\leqslant t\leqslant b$$

的参数表示来給定空間曲綫．可是，經常在微积分里把函数 $y=f(x)$ 的微商 f', f'' 写成 y', y'' 等的方式．旣然这样用了 y', y'' 而不用 f，順便連函数記号 f 也用 y 来表达，选取 $y=y(x)$ 来替

代 $y=f(x)$，显然是經济的．在这样意义下，我們把曲綫的参数表示写成

$$x_i=x_i(t),\quad a\leqslant t\leqslant b. \tag{1·22}$$

当然假定(1·22)的右边 $x_i(t)$ 都是連續函数．如果 $x_i(t)$ 仅仅是連續函数，如在数学分析和集合論中所討論的，呈現种种病态的曲綫必須列入討論．但是，在微分几何里为能广泛使用微分学，选取非病态的平滑曲綫做考察对象．从分析学看来，这意味着假定了函数 $x_i(t)$ 的微分可能性．

当函数 $f(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ 具有 r 阶 $(r\geqslant 1)$ 为止的微商，而且这些微商又是連續函数时，称为 C^r **級函数**．当曲綫 (1·22) 中的 $x_i(t)$ 都是 C^r 級，并且 $\dfrac{dx_i}{dt}\equiv\dot{x}_i$ 不同时等于 0，即

$$\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2>0 \tag{1·23}$$

的时候，称它为 C^r **級曲綫**．

对一条有参数表示的曲綫附上参数增加的方向，在它的各点都有对应的参数值．

当曲綫的参数表示是 C^r 級 $(r\geqslant 1)$ 时，曲綫是其切綫連續地变更的所謂平滑曲綫．說到参数表示是 C^r 級，曲綫本身要受到限制的同时，它的参数表示也要受到限制．

在本书里如无特别声明，都規定曲綫是 $C^r(r\geqslant 3)$ 級的．

例 取一个以 x_3 軸为軸，半徑等于 a 的正圓柱，把一張用紙做的一角等于 α 的直角三角形卷到它的上面，使 α 角的頂点落在 $(a,0,0)$ 的点，而且

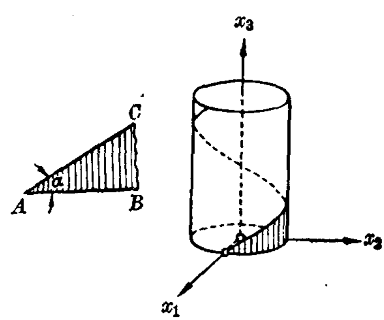

图 1·6

非斜边的夹边圍成 x_1x_2 平面上的半徑 a 和中心 $(0, 0, 0)$ 的圓周。这时，直角三角形斜边上的点是由方程

$$x_1=a\cos t,\quad x_2=a\sin t,\quad x_3=at\tan\alpha \tag{1·24}$$

表示的曲綫的点。

如果考虑到曲綫在圓柱的 $x_3<0$ 部分也同样卷上的情况，(1·24) 式的 t 的变域是 $-\infty<t<+\infty$。我們也可以按照图 1·6 的斜綫部分关于 x_1x_3 平面是对称的位置把三角形的紙头卷上圓柱。这些空間曲綫称为**常螺綫**。这圓柱的軸称为常螺綫的軸。

(1·24) 式的右边函数都是无穷次可微分的，并可展开为幂級数(所謂解析函数)。此外，

$$\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2>0.$$

称这种曲綫为**解析曲綫**或 C^ω **級曲綫**。

在曲綫 $C: x_i=x_i(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$ 上，对应于参数 t 的点用向量記法簡写为 $\mathbf{x}(t)$，或者有时候称它为点 t。

根据微积分里所教的內容，C 的长是用具有支量 $\dot{x}_i=\dfrac{dx_i}{dt}$ 的向量 $\dot{\mathbf{x}}$ 的数量平方

$$L=\int_a^b\sqrt{\dot{\mathbf{x}}^2}\,dt$$

来給定的。从而，从点 $\mathbf{x}(a)$ 到 C 上的一般点 $\mathbf{x}(t)$ 为止的 C 的弧长是

$$s=\int_a^t\sqrt{\dot{\mathbf{x}}^2}\,dt. \tag{1·25}$$

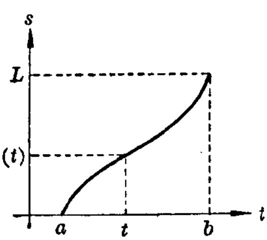

图 1·7

由于 (1·25) 式中的被积分函数是正的，把 s 看作 t 的函数时，$s(t)$ 是 t 的严格单調增加函数 (图 1·7 是 $s(t)$ 的图表的一例)。这样，$a\leqslant t\leqslant b$ 的点与 $0\leqslant s\leqslant L$ 的点做成一对一的对应，所以可以选取弧长 s 为曲线 C 的

参数．从(1·25)得到

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\dot{\mathbf{x}}^2}>0,$$

$s(t)$ 是 t 的 C^r 級函数，而反过来逆函数 $t(s)$ 也是同样的。把 $t=t(s)$ 代进(1·22)，便获得 C 的按照 s 的参数表示

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(t(s)),\quad 0\leqslant s\leqslant L.$$

写出

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds}=\mathbf{x}'$$

并注意

$$\mathbf{x}'=\dot{\mathbf{x}}\frac{dt}{ds},$$

就可看出

$$\mathbf{x}'^2=1. \tag{1·26}$$

从(1·25)看出点 $\mathbf{x}(t)$，$\mathbf{x}(t+\Delta t)$ 間的弧长是

$$\Delta s=\int_t^{t+\Delta t}\sqrt{\dot{\mathbf{x}}^2}\,dt.$$

当 Δt 是无穷小时，除了高次无穷小外，改变量 Δs 等于 $\Delta s=\sqrt{\dot{\mathbf{x}}^2}\Delta t$。写 $\Delta t=dt$，并且称 $ds=\sqrt{\dot{\mathbf{x}}^2}\,dt$ 为函数 $s(t)$ 的微分。同样，函数 $\mathbf{x}(t)$ 的微分是 $d\mathbf{x}=\dot{\mathbf{x}}\,dt$，所以得到

$$ds^2=(d\mathbf{x})^2=dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2. \tag{1·27}$$

称 ds 为曲綫的**綫素**。

在微分几何里把(1·27)說成是决定曲綫上两个无限邻近点間的距离的式子。dx_1, dx_2, dx_3 是微分，从而是无穷小量，表示趋近于 0 的状态而并不是有什么确定的大小。因此，此式的意义似乎模糊不明，但实际使用它的时候，是在(1·25)式的形式下来使用的，从而不发生模糊。

仅以无穷小量相隔的两点 $\mathbf{x}(t)$，$\mathbf{x}(t+dt)$ 間的距离，按照毕

塔哥拉斯定理，除了高次无穷小量略而不計外，等于上述的 ds^2，所以把曲綫的长定义为内接多角形的长的上限时，(1·27) 式直观地表明了这个长的定义.

如所知，曲綫 C 上的点 $\mathbf{x}(t)$ 的**切綫**是連接点 $\mathbf{x}(t)$ 与点 $\mathbf{x}(t+\Delta t)$ 的直綫当 $\Delta t\to 0$ 时处在极限位置的直綫.

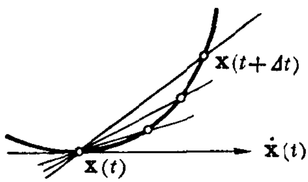

图 1·8

連接点 $\mathbf{x}(t)$ 到 $\mathbf{x}(t+\Delta t)$ 的向量具有支量

$$x_i(t+\Delta t)-x_i(t).$$

用同一 Δt 来除这些支量，大小虽有改变，而向量的方向不变. 由于曲綫是 C^r 級 $(r\geqslant 3)$，那末当 $\Delta t\to 0$ 时，

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x_i(t+\Delta t)-x_i(t)}{\Delta t}$$

存在，而且等于 $\dot{x}_i(t)$. 因此，在点 $\mathbf{x}(t)$ 的切綫的方程是

$$\mathbf{X}-\mathbf{x}(t)=\rho\dot{\mathbf{x}}(t), \tag{1·28}$$

式中 ρ 表示参数. 以点 $\mathbf{x}(t)$ 为始点而有支量 $\dot{x}_i(t)$ 的向量 $\dot{\mathbf{x}}$ 称为 C 在点 $\mathbf{x}(t)$ 的**切綫向量**.

特別是，当参数 t 是弧长 s 时，切綫向量 $\mathbf{x}'$ 是单位向量，从而它的支量 x_i' 表示切綫的方向余弦.

我們用 $\mathbf{x}(t)$ 与 $\mathbf{x}(t+\Delta t)$ 的連綫当 $\Delta t\to 0$ 时所处的极限位置定义了切綫，类似于这种的极限过程的操作在微分几何里是重要的方法. 为了直观地叙述这样的极限过程，有时把它說成"切綫是通过曲綫上两个邻点的直綫". 虽然并沒有紧密地与点 $\mathbf{x}(t)$ 相邻接的点，但是，如果照上面所述加以解釋，就可以看作严密的术語了.

設 a_i 是同时不等于 0 的常数，且以 a_i 为支量的单位向量是 $\mathbf{a}$，