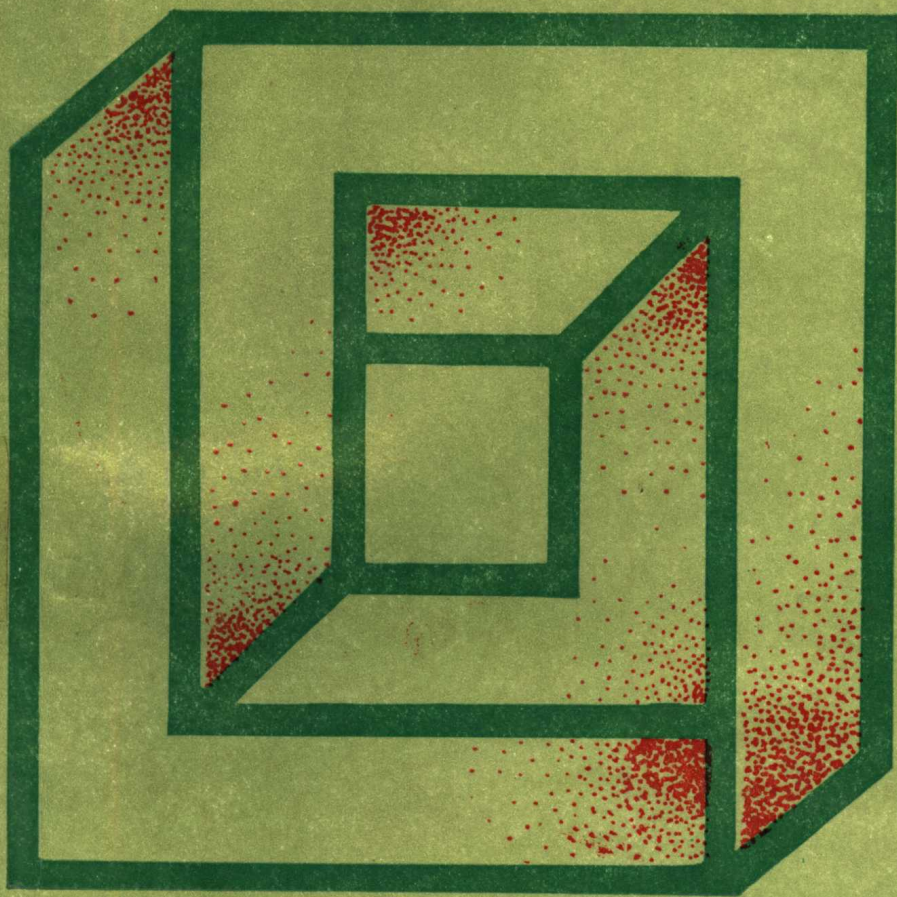


高等数学释疑解难

高等学校工科数学课程教学

指导委员会本科组



高等教育出版社

高等数学释疑解难

高等学校工科数学课程教学

北京人民大学出版社

高等教育出版社

(京)112号

内 容 提 要

本书是为促进学生深入学习高等数学课程而撰著的一本学习指导书,它针对学生在学习过程中经过思考而产生的疑难问题,采用问答形式予以解答。内容涉及对基本概念和基本理论的深入理解、对解题思路的启发诱导、对解题方法中常见错误的剖析以及某些重要概念和方法的小结等。

本书列出 213 个问题,用两种字体排印,使用时可根据各自的要求有所选择,但大部分的内容希望掌握。

本书书末附有征求意见表,请不吝赐教。

本书适用于工科院校各专业的学生,理科物理、化学等专业的学生以及科技人员均可采用。

责任编辑 丁鹤龄

高等数学释疑解难

高等学校工科数学课程教学
指导委员会本科组

*

高等教育出版社出版发行

河北省三河科教印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 12.75 字数 300 000

1992年8月第1版 1995年5月第2次印刷

印数 40 136—46 143

ISBN 7-04-004077-8/O·1178

定价 8.05 元

前 言

《高等数学释疑解难》是由全国高等学校工科数学课程教学指导委员会本科组(简称课委会本科组)为工科院校本科生编写的一本《高等数学》学习指导书。其目的是为学生深入学习《高等数学》释疑解难,也可供从事高等数学课程教学的教师作为参考书。

本书由课委会本科组委员所在的21所院校的广大数学教师收集了多年来与学生接触中发现的疑难问题,根据长期的教学经验提炼加工而成。内容涉及基本概念和基本理论的深入理解、解题思路的启发诱导、解题方法中常见错误的剖析以及某些重要概念和方法的小结等。本书以《高等数学课程教学基本要求》为主体,其中部分问题及解答的深广度高于基本要求。

区别于题解和一般的复习资料,本书从教学中的疑难问题出发,以问答形式编写了213个问题。为便于学生选读,各问题之间保持了相对的独立性。在问题的回答中,力求贯彻启发式,除深入浅出地讲解内容外,有的还结合所解答的问题对学生在思维方法和学习方法方面进行了指导。

为适应不同专业和不同层次学生的需要,本书将所写内容划分为两个档次:大部分问题是为深入理解高等数学课程的内容而写的,其中有的内容要求较高,读者可以根据自己的情况有选择地阅读;部分内容用楷体字排印供学有余力的学生阅读。凡整个问题排楷体字的,在目录上用“*”号标明。此外,有相当多的问题叙述,在正文中较长,我们在目录上只能反映其梗概。

参加本书初稿编写的院校(按由北到南顺序)有:哈尔滨工业

大学、吉林工业大学、东北工学院、清华大学、北京理工大学、北京印刷学院、天津大学、大连理工大学、西安交通大学、西北工业大学、湖北汽车工业学院、东南大学、合肥工业大学、同济大学、上海交通大学、电子科技大学、成都科技大学、华中理工大学、浙江大学、重庆大学、华南理工大学等。在各校分工编写初稿的基础上，由西安交通大学、同济大学、浙江大学集体加工整理定稿，由王福楹、孙家永、沈恒范、盛祥耀等四位教授初审，由课委会本科组复审。

《高等数学》是高等工科院校最主要的基础课之一。学生对它掌握的好坏，不仅直接关系到后继课程的学习，而且对今后的提高和发展以及工作中的贡献都有着深远的影响。通过《高等数学释疑解难》一书来对学生深入学习本课程进行指导是一种新的尝试。由于编写时间仓促，不妥之处在所难免。恳切希望广大读者提出批评、建议，关心扶植，使本书能不断丰富完善。

高等学校工科数学课程
教学指导委员会本科组

1992年3月

目 录

第一章 函数、极限、连续	1
问题 1.1 非单调函数是不是一定没有单值反函数.....	1
问题 1.2 怎样判断一个函数是不是周期函数.....	2
问题 1.3 $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$ 表示 x_n 越来越接近于 a , 对吗.....	3
*问题 1.4 极限定义中的两种修正说法对吗.....	4
*问题 1.5 怎样表述 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq A$	4
问题 1.6 数列极限定义中的 $N = N(\varepsilon)$ 是不是 ε 的函数.....	5
问题 1.7 数列 $\{x_n\}$ 与数列 $\{ x_n \}$ 是否同敛散.....	5
问题 1.8 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, 对吗.....	6
问题 1.9 求极限的首要问题是什么.....	7
*问题 1.10 关于数列及其子数列的极限问题.....	9
*问题 1.11 怎样证明数列发散.....	10
*问题 1.12 怎样证明数列 $\{x_n\}$ 无界.....	11
*问题 1.13 怎样证明数列不是无穷大.....	11
*问题 1.14 若 $x_{2n-1} \rightarrow a, x_{2n} \rightarrow a$. 则 $x_n \rightarrow a$ 对吗.....	12
问题 1.15 数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n b_n\}$ 的收敛性的关系怎样.....	12
问题 1.16 三角函数的角的度量为什么要采用弧度制.....	13
问题 1.17 两个无界函数的乘积仍然无界吗.....	14
问题 1.18 当 $x \rightarrow 0$ 时 $\sin\left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right)$ 与 $x^2 \sin \frac{1}{x}$ 等价, 对吗.....	15
*问题 1.19 什么叫无穷小的阶.....	16
问题 1.20 高阶无穷小有怎样的运算规律.....	17
问题 1.21 讨论函数极限时, 何时要考虑左、右极限.....	18
问题 1.22 怎样求幂指函数的极限.....	20
问题 1.23 怎样理解函数的间断点及其分类.....	21

问题 1.24	若 $f(x)$ 在 x_0 连续, 则 $f(x)$ 在 $U(x_0, \delta)$ 内连续, 对吗	22
*问题 1.25	函数极限与数列极限有什么关系	24
问题 1.26	极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)]$ 与 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$ 有什么关系	27
问题 1.27	在什么条件下求极限可作变量代换	28
问题 1.28	分段函数一定不是初等函数吗	32
问题 1.29	为什么说初等函数在它的定义区间连续	32

第二章 一元函数微分学

问题 2.1	关于导数等价定义的问题	34
问题 2.2	关于导函数 $f'(x)$ 与 Δx 的关系问题	36
问题 2.3	关于分段函数在分界点处的求导问题	37
问题 2.4	当 $x \rightarrow a^+$ 时, $f(x) \rightarrow \infty$ 与 $f'(x) \rightarrow \infty$ 有否必然联系	38
问题 2.5	函数在一点可导, 是否在该点的邻域也可导	39
问题 2.6	函数在一点可导, 是否在该点的邻域内函数必连续	41
问题 2.7	一个极限运算过程中出现的概念性错误	42
问题 2.8	关于函数的周期性及其导函数的周期性问题	43
问题 2.9	关于复合函数可导的条件问题	43
问题 2.10	函数的任意阶导数的求法	44
问题 2.11	求参数式函数的高阶导数时常犯的错误	48
问题 2.12	关于函数的奇偶性及其导函数的奇偶性问题	49
问题 2.13	微分 $dy = f'(x)dx$ 中的 dx 是否要很小	50
问题 2.14	关于罗尔定理的条件问题	51
问题 2.15	罗尔定理结论 $f'(\xi) = 0$ 中的点 ξ 是不是函数 $f(x)$ 的极 值点	51
问题 2.16	柯西中值定理的一种错误证法	53
问题 2.17	利用罗尔定理讨论方程 $f(x) = 0$ 根的存在问题时, 如何 构造辅助函数	56
问题 2.18	关于拉格朗日中值定理中区间 $[a, b]$ 与点 ξ 的关系问题	60
问题 2.19	关于分段函数在分界点处的求导问题	63
问题 2.20	不用定义求单侧导数的条件问题	64
问题 2.21	有关导函数性质的达布定理	66

问题 2.22	能用罗必塔法则证明两个重要极限吗	67
问题 2.23	有关正确使用罗必塔法则的问题	68
问题 2.24	任何“ $\frac{0}{0}$ ”或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型的未定式都可以用罗必塔法则求极限吗	71
问题 2.25	数列极限可以直接用罗必塔法则求吗	73
问题 2.26	关于求幂指函数的极限问题	74
*问题 2.27	有关泰勒公式的余项问题	77
问题 2.28	关于 $\sin x$ 的麦克劳林公式的余项问题	80
问题 2.29	有关函数单调性的判定问题	81
问题 2.30	用导数值在一点处的正负能判定该点邻域内函数的单调性吗	82
问题 2.31	函数的单调性与导函数的单调性是否一致	83
问题 2.32	当 $x > a$ 时, 能从 $f'(x) > g'(x)$ 得出 $f(x) > g(x)$ 吗	84
问题 2.33	在极值点的左邻域与右邻域内函数一定单调吗	85
问题 2.34	闭区间上的最大(小)值点一定是函数的极值点吗	86
问题 2.35	利用导数的知识证明不等式的常用方法有哪些	88
问题 2.36	解最值的应用问题时, 如何建立目标函数	92
问题 2.37	如何求曲线的斜渐近线	94

第三章 一元函数积分学 98

一、不定积分 98

问题 3.1	关于原函数与不定积分的定义问题	98
问题 3.2	如何理解不定积分 $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	99
问题 3.3	关于原函数及其存在区间问题	99
问题 3.4	如何解不定积分 $\int x dx$	100
问题 3.5	如何解不定积分 $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$	101
问题 3.6	设 $f(x)$ 在区间 I 内有原函数, 问 $f(x)$ 在 I 一定连续吗	102
问题 3.7	求分段函数的原函数时, 应当注意什么	103

问题 3.8	关于等式 $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = 1 + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \dots = n + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$ 的理 解问题	105
问题 3.9	分部积分法的作用	106
问题 3.10	关于求无理函数的不定积分问题	108
问题 3.11	过点 $(-2, 0)$ 且切线斜率为 $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ 的曲线方程	111
问题 3.12	关于确定部分分式中的待定系数问题	112
问题 3.13	有理函数的不定积分, 必须都用部分分式法来解吗	115
二、定积分		116
问题 3.14	在定积分的定义中, 为什么要假定被积函数在有限区间 上有界	116
问题 3.15	定积分定义中为什么要强调两个任意性	119
问题 3.16	关于用定积分求和式的极限问题	121
问题 3.17	关于函数可积和原函数存在之间的关系问题	122
问题 3.18	关于牛顿-莱布尼兹公式成立的条件问题	123
*问题 3.19	如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 是否一定可 导	124
问题 3.20	连续的奇(偶)函数的原函数都是偶(奇)函数吗	125
问题 3.21	关于错误运用牛顿-莱布尼兹公式问题的剖析	126
问题 3.22	定积分换元法与不定积分换元法有何共同点与差别	128
问题 3.23	定积分换元时应注意的问题	130
问题 3.24	怎样运用奇、偶函数与周期函数的性质, 简化定积分的 计算	131
问题 3.25	怎样运用积分中值定理(包括推广的积分中值定理)	133
问题 3.26	关于正确运用积分中值定理问题	135
问题 3.27	怎样计算被积函数含有绝对值符号的定积分	136
问题 3.28	关于广义积分的定义及其与常义积分的关系问题	138
问题 3.29	求积分时应注意不要把广义积分当作常义积分解	139
问题 3.30	遇到分段连续函数的积分或广义积分, 怎样运用牛顿 -莱布尼兹公式计算	141
问题 3.31	怎样理解有的广义(常义)积分经过换元后成了常义(广	

	义)积分·····	144
问题 3.32	能用定积分来解决的实际问题有什么特点·····	146
问题 3.33	如何理解和运用微元法来解决可化为定积分的实际问题·····	147
问题 3.34	关于用微元法来解决可化为定积分的实际问题时所应注意的问题·····	149
问题 3.35	求旋转体体积的柱壳法·····	151
问题 3.36	用微元法求引力的一个实例·····	153
问题 3.37	直角坐标与极坐标并用求旋转体体积的一个实例·····	154
问题 3.38	无限区间上的广义积分的应用——第二宇宙速度·····	155
*问题 3.39	关于在区间上连续正函数的几何平均值问题·····	157
*问题 3.40	怎样借助于几何直观来帮助解决有些分析问题·····	158
问题 3.41	关于用罗必塔法则求含有变上限积分的未定式时应注意的问题·····	161

第四章 向量代数初步与空间解析几何····· 163

问题 4.1	怎样说明向量等式的几何意义·····	163
问题 4.2	向量运算中的某些错误是怎样产生的·····	163
问题 4.3	怎样确定一个向量·····	165
问题 4.4	怎样确定向量与坐标面的夹角·····	167
问题 4.5	如何用向量来解决几何题·····	169
问题 4.6	向量的数量积有什么用途·····	170
*问题 4.7	什么叫向量函数·····	172
问题 4.8	为什么向量能成为解析几何的有力工具·····	175
问题 4.9	怎样求两直线的交点·····	178
问题 4.10	平面束方程表示过某直线的平面吗·····	179
问题 4.11	怎样求异面直线之间的距离·····	180
问题 4.12	三元二次方程必定表示二次曲面吗·····	182
问题 4.13	曲面有参数方程吗·····	183
问题 4.14	怎样求曲面在坐标面上的投影·····	185
问题 4.15	如何求立体在坐标面上的投影区域·····	187

第五章 多元函数微分学..... 191

问题 5.1 二元函数极限的两个等价定义.....191

*问题 5.2 二重极限的三种不同定义的差异.....192

问题 5.3 二重极限中动点 $P(x, y)$ 趋向于定点 $P_0(x_0, y_0)$ 的方式...195

*问题 5.4 用极坐标变换式求二重极限.....196

问题 5.5 判定二重极限不存在, 有哪些常用方法..... 197

*问题 5.6 二重极限与累次极限的联系.....198

问题 5.7 求比较简单的函数 $f(x, y)$ 的二重极限有哪些常用的方法202

问题 5.8 如果一元函数 $f(x, y)$ 在 y_0 处连续, $f(x, y_0)$ 在 x_0 处连续, 那末二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处是否必连续204

问题 5.9 计算偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$ 时, 能否将 $y=y_0$ 先代入 $f(x, y)$ 中, 再对 x 求导205

*问题 5.10 混合偏导数 $f''_{yx}(x, y)$ 与 $f''_{xy}(x, y)$ 是否一定相等206

问题 5.11 偏导数恒为零的充要条件211

问题 5.12 二元函数的连续性与可导性的关系.....212

问题 5.13 二元函数可微必连续, 那么反之如何.....214

问题 5.14 二元函数的可微性与可导性的关系如何.....215

问题 5.15 函数的极限、连续、可导与可微等基本概念之间的关系216

问题 5.16 如何用全微分定义验证一个可导函数的可微性.....217

问题 5.17 二元函数全微分的几何意义218

问题 5.18 多元复合函数的结构复杂, 怎样正确掌握其求导法则...220

问题 5.19 从两种不同解法看多元复合函数求导法则的条件.....226

问题 5.20 一阶全微分形式不变性在多元函数微分学中有 什么作用227

问题 5.21 抽象的多元复合函数, 在求二阶偏导数时应特别注意些什么.....231

问题 5.22 同是函数 u 关于自变量 x 在同一点处的偏导数, 为什么会不相同233

问题 5.23 由方程组确定的隐函数(包括反函数)如何求偏导数.....235

*问题 5.24	二元函数 $\begin{cases} v=f(x, y) \\ v=g(x, y) \end{cases}$ 与其反函数 $\begin{cases} x=\varphi(u, v) \\ y=\psi(u, v) \end{cases}$	
	的偏导数之间有何联系	239
问题 5.25	求隐函数的二阶偏导数用什么方法较简便	241
问题 5.26	能否用求空间曲线的切向量和曲面的法向量的方法来 求平面曲线的切向量和法向量	244
问题 5.27	方向导数与偏导数有何差异	245
问题 5.28	如果二元函数在有界闭区域 D 内有唯一的极小值点 M_0 , 那末该函数是否必在 M_0 处取得最小值	246
问题 5.29	曲面外一定点 M_0 到曲面的最短距离	247
问题 5.30	如果二元函数 $z=f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 处取得极值, 那末一元函数 $\varphi(r)=f(x, y_0)$ 及 $\psi(y)=f(x_0, y)$ 在该点 必定取得极值. 问反之是否也如此	249
问题 5.31	如果点 (x, y) 在过 $M_0(x_0, y_0)$ 的任意一条直线 L 上变动 时, 函数 $z=f(x, y)$ 都在 M_0 处取得极小值, 那末能否断 定函数在 M_0 处取得极小值	249
问题 5.32	用拉格朗日乘法求条件极值的难点之一在于求解一 个多变量的方程组. 对此方程组有哪些解法	251

第六章 多元函数积分学

一、重积分

问题 6.1	二重积分化为二次积分时, 怎样画域、定限	255
问题 6.2	交换二次积分顺序时, 要注意什么问题	258
问题 6.3	利用对称性简化二重积分的计算	260
问题 6.4	怎样计算被积函数含有绝对值符号的二重积分	263
问题 6.5	计算三重积分的“先重后单”法	265
问题 6.6	用球面坐标计算三重积分时的定限问题	266
问题 6.7	在球面坐标系、柱面坐标系下计算三重积分与在极坐标 系下计算二重积分的关系问题	268
问题 6.8	在处理被积函数为抽象函数的三重积分时应注意的问题	270
问题 6.9	重积分应用中的“微元法”与定积分应用中的“微元法”	

	的异同点	271
问题 6.10	用重积分解应用问题时,如何适当选择坐标系	273
*问题 6.11	可用定积分替代重积分来处理的问题	276
*问题 6.12	重积分的换元问题	280
二、曲线积分与曲面积分		287
问题 6.13	曲线积分化为定积分的关键是什么	287
*问题 6.14	关于应用积分中值定理问题	289
问题 6.15	夹角和转角问题	290
问题 6.16	线积分调换积分路线必须满足的条件	292
问题 6.17	计算对坐标的空间曲线积分,主要有哪几种方法	293
问题 6.18	关于利用对称性计算曲线积分问题	295
*问题 6.19	关于二重积分化为曲线积分计算问题	299
问题 6.20	计算对坐标的曲面积分应注意的问题	301
问题 6.21	利用高斯公式计算三重积分时一个常犯的错误	302
问题 6.22	关于利用对称性计算两类曲面积分时的差异问题	302
问题 6.23	利用高斯公式必须满足公式成立的条件	303
问题 6.24	关于计算曲面积分时,积分域怎样向坐标面投影的问题	305
*问题 6.25	定积分与二重积分作为特殊的曲线积分与曲面积分应属于哪一类	306
问题 6.26	二重积分在多元函数积分学中的地位与作用问题	307
问题 6.27	可化为线、面积分的实际问题中,怎样的问题属第一类,怎样的问题属第二类	308
*问题 6.28	牛顿-莱布尼兹公式、格林公式和高斯公式之间有什么联系	309
*问题 6.29	斯托克斯公式成立与以积分路线为边界所张的曲面是否无关	312
第七章 无穷级数		314
问题 7.1	级数是否可以任意加括号	314
*问题 7.2	比值审敛法与根值审敛法两者相比,各有什么优点	315
问题 7.3	如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,那末 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, 对吗	318

- *问题 7.4 什么是积分审敛法.....319
- 问题 7.5 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l \neq 0$, 那末级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散,
对吗320
- *问题 7.6 用比较审敛法时, 怎样寻找用于比较的标准级数.....321
- 问题 7.7 当条件 $u_n \geq u_{n+1}$ 不满足时, 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 一定发散吗324
- 问题 7.8 能用级数来考察数列极限的存在性吗.....325
- 问题 7.9 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 那末 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 一定收敛, 对吗.....326
- 问题 7.10 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 条件收敛, 那末 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径是
多少.....327
- 问题 7.11 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ 不存在, 那末幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛
半径怎样求328
- 问题 7.12 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , 那末 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{R}$,
对吗.....329
- 问题 7.13 两个函数项级数相加时 应注意什么.....330
- 问题 7.14 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ 的收敛域有什么
关系.....331
- 问题 7.15 在一点的邻域内任意阶可导的函数在该点一定能展开
成泰勒级数吗.....332
- 问题 7.16 求任意阶可导函数 $f(x)$ 的导数值 $f^{(n)}(0)$ 是否有较为简
便的方法334
- 问题 7.17 求幂级数的和函数有什么规律? 一般步骤如何.....335

问题 7.18	怎样利用幂级数去求常数项级数的和·····	340
*问题 7.19	怎样用三角多项式逼近函数, 关于傅立叶系数的若干固有性质·····	341
第八章	微分方程 ·····	344
问题 8.1	是否所有的微分方程都存在通解·····	344
问题 8.2	微分方程的通解是否包含它所有的解·····	344
问题 8.3	求微分方程的通解时, 怎样写好任意常数·····	347
问题 8.4	关于解分离变量的微分方程时两边积分的问题·····	348
问题 8.5	解微分方程时是否会丢解·····	349
问题 8.6	已知微分方程的解如何求微分方程·····	350
问题 8.7	关于解未知函数出现在积分号下的方程问题·····	352
问题 8.8	关于微分方程的解的叠加原理问题·····	356
问题 8.9	已知二阶线性齐次方程的一个解求其通解·····	357
*问题 8.10	关于欧拉方程的解的问题·····	360
问题 8.11	怎样用微分方程解应用题——几何问题、力学问题、热学问题、电路问题等十例·····	361
征求意见表 ·····		387

第一章 函数、极限、连续

问题 1.1

单调函数必有单值反函数，不单调的函数是不是一定没有单值反函数？

[答] 不是的。一个函数是否存在单值反函数，取决于它的对应规则 f 在定义域 D 与值域 W 之间是否构成一一对应的关系。如果是一一对应，那末必有单值反函数；否则就没有单值反函数。函数在区间 I 上单调只是一种特殊的一一对应关系，因此单调仅是存在单值反函数的充分条件，而不是必要条件。

例如函数

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -1 \leq x \leq 0, \\ x+1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

在区间 $[-1, 1]$ 上不单调(图 1.1(a))，但它存在单值反函数(图 1.1(b))

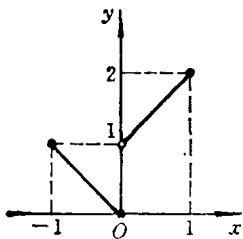


图 1.1(a)

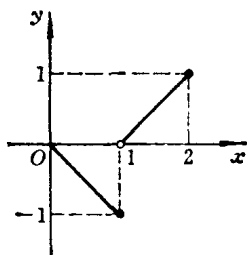


图 1.1(b)

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x \leq 1, \\ x-1, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

又如函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } x \text{ 为有理数,} \\ -x, & \text{当 } x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 内不单调,但有单值反函数 $\varphi^{-1}(x) \equiv \varphi(x)$.

问题 1.2

怎样判断一个函数是不是周期函数?

[答] 我们在考察函数时,往往比较注意它是否具有周期性,因为周期函数具有一些良好的性质. 如:

1° 只须考察它在一个周期内的性态,其余可以根据 $f(x+T) = f(x)$ 推知;

2° 可导的周期函数,其导函数仍是周期函数(见问题 2.8).

3° 可积的周期函数,在任何一个周期 $[a, a+T]$ 上的积分是与 a 无关的常数.

要判断一个函数是不是周期函数,有时可以用如下一些方法:

(i) 设周期函数的定义域为 D ,周期为 T .若 $x_0 \in D$,则 $x_0 \pm T \in D$,从而 $\{x_0 \pm nT\} \subset D$ (n 为整数).因此, D 既无上界也无下界^①.反之,若某函数的定义域是有上界或有下界的,则此函数必非周期函数.

(ii) 若 $f(x)$ 为周期函数,则函数 $f(x) - f(x_0)$ 的零点(即方程 $f(x) - f(x_0) = 0$ 的根)必呈周期性.反之,若 $f(x) - f(x_0)$ 的零点不呈周期性,则 $f(x)$ 必非周期函数.

(iii) 按周期函数的定义讨论如下:

假设 $f(x)$ 满足 $f(x+T) \equiv f(x)$,取定一点 x_0 ,应有 $f(x_0+T)$

① 设 X 是一个数集.如果数 M (数 m)使一切 $x \in X$ 都满足不等式

$$x \leq M \quad (x \geq m),$$

则称数 M (数 m)是数集 X 的上界(下界).