$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j \\ 0 \text{ при } i \neq j \end{cases}$$

Сборник задач по линейной алгебре

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{e}\,'_1 &= \vec{e}_1, \\ \vec{e}\,'_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{e}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{e}_3, \\ \vec{e}\,'_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{e}_3. \end{aligned}\right\}$$

$$(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj}.$$

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования БССР в качестве учебного пособия для студентов инженерно-технических специальностей высших учебных заведений

Минск
«Вышэйшая школа»
1980

ББК 22.13я73
С23
УДК 512.8 (076)

Рецензенты: кафедра высшей математики Киевского политехнического института (зав. кафедрой канд. физ.-мат. наук, доц. *Ф. П. Яремчук*), *В. В. Пугин*, зав. кафедрой высшей математики Могилевского машиностроительного института, канд. физ.-мат. наук.

Сборник задач по линейной алгебре: [Учеб. по-
С23 собие для инж.-техн. спец. вузов] / Р. Ф. Апатенок, А. М. Маркина, Н. В. Попова, В. Б. Хейнман.— Мн.: Выш. школа. 1980.— 192 с. с ил.
В пер.: 50 коп.

Изложен материал по следующим разделам линейной алгебры: матрицы, определители, системы линейных уравнений, линейные пространства и линейные преобразования, квадратичные формы, применение матриц в теории дифференциальных уравнений. В каждом разделе даются краткие сведения по теории, решения типовых задач и задачи для самостоятельного решения.
Для студентов всех специальностей технических вузов.

$С\frac{20203-025}{М304(05)-80}$ 22—80 1702030000

ББК 22.13я73
517.1

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время математические методы находят широкое применение в самых различных областях науки и техники. Это предъявляет повышенные требования к математической подготовке инженеров. Весьма актуальными для современного инженера являются вопросы линейной алгебры. В ныне действующей программе по высшей математике для технических вузов раздел линейной алгебры занимает значительное место.

Данное учебное пособие, предназначенное для студентов всех специальностей технических вузов, содержит краткие сведения по теории и задачи по всем вопросам раздела «Линейная алгебра», предусмотренным программой курса «Высшая математика» для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений.

В учебном пособии шесть глав: «Матрицы и определители», «Системы линейных уравнений», «Линейные пространства», «Линейные отображения», «Квадратичные формы», «Применение матриц к теории дифференциальных уравнений». Краткие теоретические сведения иллюстрируются решениями типовых задач. Дано достаточное количество задач для домашних заданий, проведения практических занятий и контрольных работ. Все задачи, предназначенные для самостоятельного решения, снабжены ответами. Для удобства читателя в начале книги помещен перечень обозначений, которые используются в дальнейшем.

Авторы выражают искреннюю благодарность коллективу кафедры высшей математики Киевского ордена Ленина политехнического института и лично заведующему кафедрой доценту *Ф. П. Яремчуку* за ценные замечания и пожелания, которые способствовали улучшению книги. Авторы также благодарят заведующего кафедрой высшей математики Могилевского машиностроительного института доцента *В. В. Пугина*, сделавшего ряд ценных замечаний при рецензировании пособия. *К. Ф. Беганской, Н. В. Мадорской, Н. Ф. Юранову* и *В. Н. Юранову* авторы выражают благодарность за помощь, оказанную при оформлении рукописи.

Все отзывы и пожелания просим высылать по адресу: 220048, Минск, Парковая магистраль, 11, Дом книги, издательство «Вышэйшая школа».

Авторы

ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\in$ — знак принадлежности.

$\forall$ — для любых.

$\exists$ — существует.

$\mathbf{Z}$ — множество всех целых чисел.

$\mathbf{Q}$ — множество всех рациональных чисел.

$\bar{z}$ — число, сопряженное с данным числом z.

V_n — линейное пространство размерности n.

$\mathbf{R}$ — линейное вещественное пространство вещественных чисел.

$\mathbf{C}$ — линейное вещественное (комплексное) пространство комплексных чисел.

$\mathbf{R}_n(x)$ — линейное вещественное пространство, элементами которого являются число 0 и многочлены с вещественными коэффициентами, степень каждого из которых не превышает n.

$\mathbf{C}_n(x)$ — линейное вещественное (комплексное) пространство, элементами которого являются число 0 и многочлены с комплексными коэффициентами, степень каждого из которых не превышает n.

M_3 (M_2) — линейное вещественное пространство свободных векторов, рассматриваемых в аналитической геометрии в пространстве (на плоскости).

$\mathbf{R}^n$ ($\mathbf{C}^n$) — линейное вещественное (комплексное) пространство, элементами которого являются всевозможные упорядоченные n-ки вещественных (комплексных) чисел. Внутренняя и внешняя операции определены следующим образом: $(\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n)+(\beta_1; \beta_2; \ldots; \beta_n)=(\alpha_1+\beta_1; \alpha_2+\beta_2; \ldots; \alpha_n+\beta_n)$; $\lambda(\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n)=(\lambda\alpha_1; \lambda\alpha_2; \ldots; \lambda\alpha_n)$. Пространство $\mathbf{R}^n$ будем называть *арифметическим*.

$\mathbf{R}_{m\times n}$ — линейное вещественное пространство вещественных числовых матриц размеров $m\times n$.

$\mathbf{C}_{m\times n}$ — линейное вещественное (комплексное) пространство комплексных матриц размеров $m\times n$.

$\mathbf{F}_{[a;b]}$ ($\mathbf{F}_{]a;b[}$) — линейное вещественное пространство всех вещественных функций, заданных на $[a; b]$ ($]a; b[$).

$C^k_{[a;b]}$ ($C^k_{]a;b[}$) — линейное вещественное пространство всех вещественных функций, имеющих непрерывную производную k-го порядка на $[a; b]$ ($]a; b[$).

$N(A)$ — линейное вещественное пространство решений линейной системы $AX=O$, где $A=A_{m\times n}$, $X=X_{n\times 1}$ (аннулируемое простран-

ство матрицы A). В технической литературе это пространство называют ***нулевым пространством матрицы*** A.

$\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n \rangle$ — линейное вещественное пространство, элементами которого являются $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \vec{x}_i$, $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $\vec{x}_i \in V$, где V — линейное вещественное пространство. Это пространство будем называть *пространством, натянутым на векторы* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r \in V$, или *линейной оболочкой системы векторов* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_2 \in V$.

$\mathcal{E}_n$ — евклидово пространство размерности n.

$\mathcal{E}_3(\mathcal{E}_2)$ — евклидово пространство свободных векторов, рассматриваемых в аналитической геометрии в пространстве (на плоскости).

$\mathcal{E}^n$ — евклидово пространство, элементами которого являются всевозможные упорядоченные n-ки вещественных чисел. Операция скалярного умножения определена следующим образом: $((\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n), (\beta_1; \beta_2; \ldots; \beta_n)) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n$.

$L[a; b]$ — евклидово пространство вещественных функций, непрерывных на $[a; b]$. Операция скалярного умножения введена следующим образом: $(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$.

U^n — унитарное пространство, элементами которого являются всевозможные n-ки комплексных чисел. Операция скалярного умножения определена следующим образом: $((\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n), (\beta_1; \beta_2; \ldots; \beta_n)) = \alpha_1\overline{\beta}_1 + \alpha_2\overline{\beta}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{\beta}_n$.

Глава 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1. Основные определения. Линейные операции над матрицами. Умножение матриц. Многочлены от матриц

Матрицей размеров m на n или $m \times n$-матрицей называется прямоугольная таблица

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}, \end{matrix}$$

составленная из mn элементов некоторого множества.

Будем пользоваться следующими обозначениями матрицы:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ A_{m\times n}, \ A, \ (a_{ij}).$$

Элементами матрицы называются элементы множества, из которых она составлена.

Элементы $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ составляют i-ю строку, а элементы $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$ — j-й столбец матрицы; a_{ij} — элемент матрицы, который находится в i-й строке и j-м столбце.

Строки и столбцы матрицы называют ее *рядами*. Под двумя параллельными рядами будем понимать две строки или два столбца матрицы.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов ($m=n$), называется *квадратной*. *Порядком квадратной матрицы* называется число ее строк (или столбцов).

В квадратной матрице

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ составляют *главную диагональ*.

Матрица, элементами которой являются числа, называется *числовой*. Пока мы будем рассматривать только числовые матрицы, называя их просто матрицами.

Две матрицы называются *равными*, если они одинаковых размеров и элементы одной матрицы равны соответствующим элементам другой.

Нулевой называется матрица, все элементы которой равны нулю. Нулевую матрицу будем обозначать буквой O.

Диагональной называется квадратная матрица, у которой все элементы, стоящие не на главной диагонали, равны нулю.

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется *единичной*. Единичную матрицу будем обозначать буквой E.

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей, *транспонированной данной*. Матрицу, транспонированную матрице A, будем обозначать A^T.

Операция сложения вводится только для матриц одинаковых размеров.

Суммой (разностью) двух матриц $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$ называется матрица $C_{m\times n}$ такая, что $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ $(c_{ij}=a_{ij}-b_{ij})$, $(i=1, 2, \ldots, m;\ j=1, 2, \ldots, n)$. Сумма (разность) матриц A и B обозначается $A+B$ $(A-B)$.

Произведением матрицы $A_{m\times n}$ *на число* α (или числа α на матрицу $A_{m\times n}$) называется матрица $B_{m\times n}$ такая, что $b_{ij}=\alpha a_{ij}$ $(i=1, 2, \ldots, m;\ j=1, 2, \ldots, n)$. Произведение матрицы A на число α обозначается $A\alpha$ или αA.

Матрицу $(-1)A$ будем называть матрицей, *противоположной* A, и обозначать $-A$.

Произведение матрицы A на матрицу B вводится только в том случае, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, т. е. если A — матрица размеров $m\times n$, а B — размеров $n\times k$.

Произведением матрицы $A_{m\times n}$ *на матрицу* $B_{n\times k}$ называется матрица $C_{m\times k}$ такая, что

$$c_{ij}=\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}.$$

Произведение матрицы A на матрицу B обозначается AB.

Из определения следует, что элемент матрицы AB, стоящий в i-й строке и j-м столбце, равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

Заметим, что если матрицу A можно умножить на матрицу B, то отсюда не следует, что B можно умножить на A.

Целой положительной степенью A^k $(k>1)$ *квадратной матрицы* называется произведение k матриц, каждая из которых равна A.

Нулевой степенью квадратной матрицы A называется единичная матрица E того же порядка, что и A, т. е. $A^0=E$. Первой степенью матрицы A называется сама матрица A, следовательно, $A^1=A$.

Пусть дан многочлен

$$P(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\ldots+a_k$$

и квадратная матрица A. Выражение

$$P(A)=a_0A^k+a_1A^{k-1}+\ldots+a_kE$$

называется *многочленом от матрицы* A. Если $P(A)$ — нулевая матрица, то A называется *корнем многочлена*.

Пример 1.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 0 & 1\\ 2 & -3\end{bmatrix}.$$

Выяснить, существуют ли произведения AB и BA, и, если существуют, то найти их.

Решение. Произведение AB не существует, так как число столбцов матрицы A не равно числу строк матрицы B.

Произведение BA существует и

$$BA=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 0 & 1\\ 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & -1\\ 3 & 0\\ -5 & 2\end{bmatrix}.$$

Пример 2. Найти $f(A)$, если $f(x)=2x^3-3x+5$,

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}.$$

Решение. Подставляя в $f(x)$ вместо x матрицу A и учитывая, что $5=5x^0$, получим

$$f(A)=2A^3-3A+5E=$$

$$=2\begin{bmatrix}11 & 38\\ 57 & 106\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22 & 76\\ 114 & 212\end{bmatrix}-$$

$$-\begin{bmatrix}-3 & 6\\ 9 & 12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30 & 70\\ 105 & 205\end{bmatrix}.$$

Задачи

1. Даны матрицы

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\\ 3 & -2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}.$$

Найти: а) $3A-2B-C$; б) $2A+4B-3C$.

2. Найти матрицу, транспонированную матрице A:

$$\text{а) } A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 7\\ 0 & 9 & 10\end{bmatrix};\quad \text{б) } A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 4 & 5\\ 2 & -1 & 0 & 6\\ 1 & 1 & 5 & 4\end{bmatrix}.$$

3. Даны матрицы

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 3 & 4\\ -5 & -6\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 5 & -6\\ 2 & -2 & 3\end{bmatrix}.$$

Найти: а) $3A+B^T$; б) $2A^T+3B$.

4. Для каких матриц $A=A_{m\times n}$ существует $A+A^T$?

5. Найти $3A+2E$, где

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 5 & 0\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix};$$

E — единичная матрица третьего порядка.

6. Найти матрицу X, удовлетворяющую условию: а) $3A+2X=E$, где

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 6\\ 4 & 3 & -8\\ 2 & -2 & 5\end{bmatrix};$$

E — единичная матрица третьего порядка; б) $2A-3X=$ $=B$, где

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 5 & 3\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}-5 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}.$$

7. Известно, что $A_{3\times 4}B_{4\times 5}=C_{m\times n}$. Найти m и n.

8. Известно, что $A_{2\times 3}B_{m\times n}=C_{2\times 6}$. Найти m и n.

9. Известно, что $A_{2\times m}B_{n\times 3}=A_{2\times 3}$. Найти m и n.

10. Даны матрицы $A_{2\times 3}$, $B_{3\times 1}$, $C_{3\times 3}$. Существуют ли произведения: а) AB; б) BA; в) AC; г) CA; д) ABC; е) ACB; ж) CB; з) CBA?

В задачах 11—19 найти произведения матриц:

11. $\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 5\\ -1 & 6\end{bmatrix}$. **12.** $\begin{bmatrix}3\\ -1\\ 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -6 & 7\end{bmatrix}$.

13. $\begin{bmatrix}1 & -4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 4\\ -1\end{bmatrix}$. **14.** $\begin{bmatrix}-2 & 3 & 4 & 0\\ 5 & -1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ -1 & 0\\ 4 & 0\end{bmatrix}$.

15. $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 5 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$

16. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$

17. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$

18. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$

19. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$

20. Даны матрицы

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad D=\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}.$$

а) Найти $B=AD$ и $C=DA$; б) указать условия, при которых $AD=DA$.

21. Даны матрицы

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \\ 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Найти элемент матрицы AB, стоящий в четвертой строке и втором столбце.

22. Проверить, имеет ли место равенство $(A+B)^2=$ $=A^2+2AB+B^2$, если:

а) $A=\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \; B=\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix};$

б) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \; B=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$

23. Показать, что если A и B перестановочны, то: а) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$; б) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$.

24. Даны матрицы

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix},\ BA^T=\begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & -2 \\ 7 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Найти $(AB)^T$.

25. Даны матрицы

$$B=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 5 \end{bmatrix},\ A^TB=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 8 \\ 7 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Найти $(BA)^T$.

26. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}^2$. **27.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3$.

28. $\begin{bmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}^3$. **29.** $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^3$.

В задачах 30, 31 для данных A и $f(x)$ найти $f(A)$.

30. $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $f(x)=2x^2+3x-4$.

31. $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $f(x)=x^5+2x^4-x^3+5x^2+8$.

32. Доказать, что матрица

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

является корнем многочлена $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$.

33. Доказать, что матрица

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

является корнем многочлена $f(x)=x^3-3x^2+4$.

34. Дано

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix},\ f(x)=x^3-x^2+5x+4,\ \varphi(x)=x^2-2x+1.$$

Найти $2f(A)-3\varphi(A)$.

35. Дано

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix},\ f(x)=x^2-2x+1,\ \varphi(x)=3x+5.$$

Найти $f(A)-2\varphi(A)$.

36. Найти $(f(A))^2$, если

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & -1 & -1\end{bmatrix},\ f(x)=x+1.$$

1.2. Блочные матрицы. Матрицы Жордана

Разобьем матрицу A горизонтальными и вертикальными прямыми на несколько матриц. Полученные матрицы называются *блоками (клетками) матрицы* A. В технической литературе иногда блоки называют *субматрицами*. Используя блоки, на которые разбита матрица, можно записать ее в виде матрицы, элементами которой являются блоки. В этом случае говорят, что матрица записана в виде *блочной*.

Например, разобьем данную матрицу A на блоки следующим образом:

$$A=\left[\begin{array}{ccc:c}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{array}\right].$$

Тогда матрица A запишется в виде блочной

$$A=\begin{bmatrix}B & C\\ D & F\end{bmatrix},$$

где

$$B=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}a_{14}\\ a_{24}\end{bmatrix};$$

$$D=[a_{31}\ \ a_{32}\ \ a_{33}];\ F=[a_{34}].$$

Эту же матрицу можно представить в виде блочной и другим образом. Например,

$$A=[G\ \ H],$$

где

$$G=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{bmatrix};\ H=\begin{bmatrix}a_{13} & a_{14}\\ a_{23} & a_{24}\\ a_{33} & a_{34}\end{bmatrix}.$$

Линейные операции над матрицами и умножение матриц можно свести к соответствующим операциям над блочными матрицами.

Например, пусть существует произведение AB, где A и B — матрицы. Если A и B можно записать в виде блочных

$$A=[A_1A_2],\quad B=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

так, что A_1B_1, A_2B_2 существуют, то

$$AB=[A_1B_1+A_2B_2].$$

Пример. Даны

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 7 & -1 & 0 \\ 8 & -12 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Найти AB.

Решение. Представим A и B в виде блочных следующим образом

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

где

$$A_1=\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 8 & -12 \end{bmatrix};\quad A_2=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix};\quad A_3=\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix};$$

$$A_4=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\quad B_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\quad B_2=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$AB=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1B_1+A_2B_2 \\ A_3B_1+A_4B_2 \end{bmatrix}.$$

Так как

$$A_4=0,\quad B_1=0,\quad A_2B_2=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix},$$

то

$$AB=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица порядка m вида

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha \end{bmatrix},$$

где α — любое число, называется *жордановой клеткой* порядка m соответственно верхнего или нижнего вида и обозначается $J_m(\alpha)$.

Заметим, что при $m=1$ жорданова клетка имеет вид

$$J_1(\alpha)=[\alpha].$$

Матрицей Жордана называется матрица вида

$$\begin{bmatrix} J_{m_1}(\alpha_1) & O & \dots & O \\ O & J_{m_2}(\alpha_2) & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & J_{m_k}(\alpha_k) \end{bmatrix}, \tag{1.1}$$

где $J_{m_i}(\alpha_i)$ $(i=1, 2, \dots, k)$ — жордановы клетки верхнего (нижнего) вида, а O — нулевые матрицы соответствующих размеров. Матрица Жордана (1.1) обозначается

$$[J_{m_1}(\alpha_1), J_{m_2}(\alpha_2), \dots, J_{m_k}(\alpha_k)]. \tag{1.2}$$

Задачи

В задачах 37—40 найти произведение матриц с помощью разбиения их на блоки:

37. $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$

38. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$

39. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$

40. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 10 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 15 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

В задачах 41—44 записать в виде матрицы жорданову клетку:

41. $J_2(3)$. **42.** $J_4(1)$. **43.** $J_1(4)$. **44.** $J_5(-2)$.

В задачах 45—54 выяснить, является ли жордановой каждая из следующих матриц, и если является, то записать ее в виде (1.2):

45. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. **46.** $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

47. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **48.** $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

49. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. **50.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

51. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. **52.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

53. $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$. **54.** $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

В задачах 55, 56 найти произведение матриц:

55. $[J_2(2), J_3(1)]\,[J_2(1), J_3(2)]$.

56. $[J_2(1), J_1(2)]\,[J_2(3), J_1(3)]$.

1.3. Определители

Понятие определителя матрицы вводится только для квадратной матрицы. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

есть числовая матрица. *Определитель (детерминант) матрицы A* — это число, которое ставится в соответствие данной матрице и обозначается