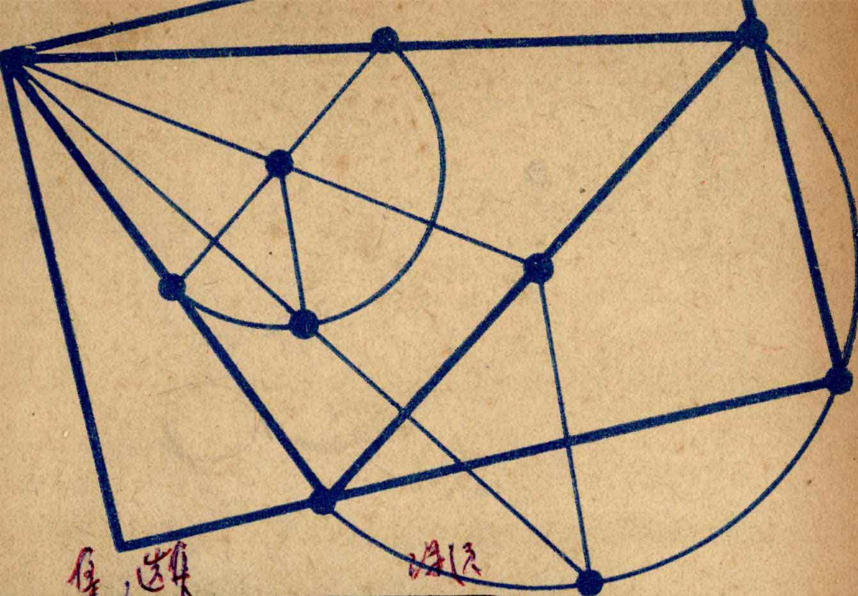
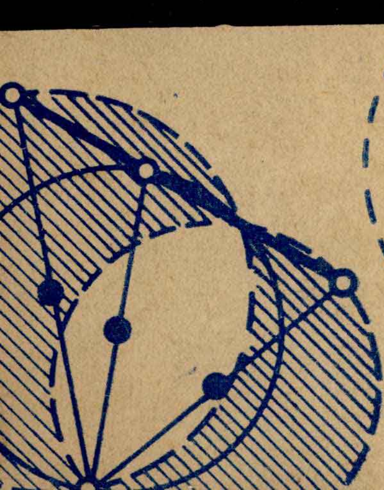
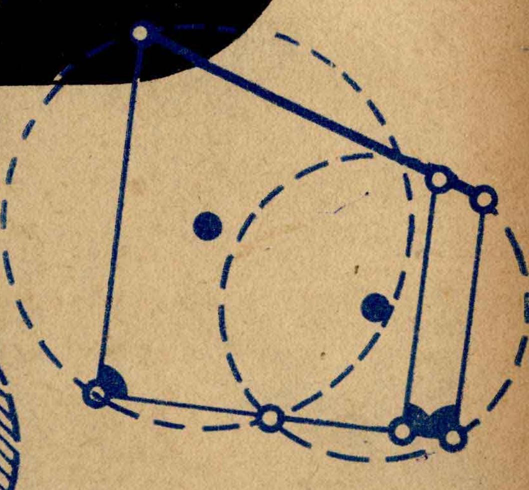


Сборник задач московских математических олимпиад





СБОРНИК ЗАДАЧ МОСКОВСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД

ПОСОБИЕ ДЛЯ ВНЕКЛАССНОЙ РАБОТЫ
ПО МАТЕМАТИКЕ

Составитель, автор указаний и решений А. А. ЛЕМАН

Под редакцией В. Г. БОЛТЯНСКОГО

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»
МОСКВА 1965

Настоящая книга представляет собой плод многолетней коллективной работы школьного математического кружка при МГУ, работы, активное участие в которой принимали многие студенты и преподаватели Московского Университета, а также школьники — участники кружка. Установление авторства отдельных задач потребовало бы в настоящий момент совершенно непосильной исследовательской работы.

Составитель и редактор считают, однако, своим долгом выразить благодарность следующим лицам, принявшим участие в составлении решений и указаний, а иногда и в выяснении смысла «темных» задач подготовительных сборников: Г. М. Адельсону-Вельскому, В. Л. Арлазарову, В. И. Арнольду, Д. Н. Бернштейну, И. Н. Бернштейну, Л. Н. Вассерштейну, А. М. Габриэлову, А. М. Леонтовичу, С. В. Казакову, А. А. Кириллову, О. А. Котию, Ю И. Манину, З. А. Скопецу, Е. И. Славутину, Г. В. Смирновой, А. Л. Тоому, Д. Б. Фуксу, А. Х. Хованскому, М. В. Шейнбергу.

В. Г. Болтянский,
А. А. Леман

Рукопись рецензировали:

Вейцман И. Б., Танатар И. Я.

ШКОЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК ПРИ МГУ И МОСКОВСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ*

Каждую весну в течение уже многих лет по Москве расклеиваются афиши, призывающие школьников посетить не театр или концертный зал, а скромные, строгие аудитории Московского Университета. Здесь, в этих аудиториях, умолкают звонкие детские голоса и в наступающей торжественной тишине начинается конкурс юных математиков — Московская математическая олимпиада.

Для всех учащихся, интересующихся математикой, олимпиада — это большой праздник. Работники механико-математического факультета МГУ буквально с ног сбиваются, отвечая на многочисленные вопросы волнующихся школьников и иногда не менее взволнованных учителей:

— Когда читаются лекции для участников олимпиады?

— Будут ли консультации?

— Могут ли в олимпиаде участвовать неотличники?

— Где можно достать тренировочные задачи и сколько их необходимо решить?

— Будет ли разрешено участие в олимпиаде школьнику, который учится только еще в VI классе?

— Можно ли приносить с собой учебники?

Поток вопросов, многие из которых могут поставить в тупик и дюжину академиков, нескончаем.

Подготовительные задачи, задачи самой олимпиады, а также факты, сообщаемые на консультациях и лекциях, представляют собой ценнейший материал, своеобразный математический фольклор, творцами которого являются студенты, аспиранты, профессора и преподаватели механико-математического факультета МГУ. Студенты-энтузиасты буквально прохода не дают старшекурсникам и преподавателям, предлагая свои задачи, яростно критикуя

*) В основу настоящего изложения положена статья, написанная авторами по заказу издательства «Volk und Wissen» (Берлин, ГДР).

чужие и требуя придумывать все новые и новые. Иногда эти обсуждения настолько горячи, что дрожат своды мехматских коридоров; иногда же обсуждающие задачу шепчутся, заговорщически озираясь по сторонам, — это означает, что речь идет о задаче, которая может (!) попасть на какой-либо тур олимпиады. Нередко в результате обсуждения задачи настолько преображаются, что автор первоначального варианта не узнает собственное детище. Подготовительные задачи и задачи олимпиады являются, таким образом, плодом коллективного творчества.

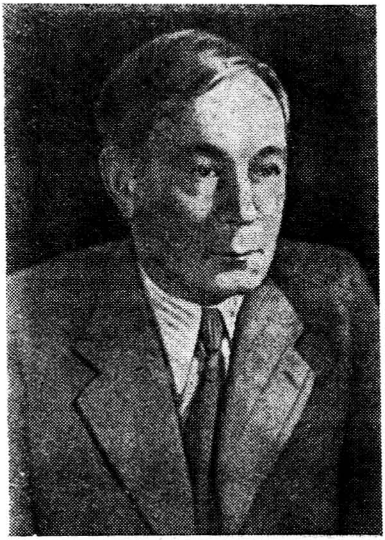
К сожалению, этот ценнейший фольклор в значительной степени теряется, и нередко бесследно. Достаточно сказать, что составители настоящего сборника подняли на ноги буквально всех старых деятелей олимпиад и тем не менее не смогли собрать все задачи всех олимпиад: мы опасаемся, что содержание задач I тура IV олимпиады навсегда останется секретом для человечества. Поэтому выход настоящей книги, содержащей задачный материал 27 Московских школьных математических олимпиад, мы считаем весьма важным событием в деле математического образования.

Книга, подготовка которой была приурочена к XXV олимпиаде, имеет отчасти и юбилейный характер. Двадцать пять олимпиад — достаточно круглое число, и в связи с этим возникает естественное желание оглянуться назад и подвести некоторые итоги.

Первая Московская математическая олимпиада

К середине 30-х годов многие советские ученые-математики пришли к мысли о необходимости сотрудничества со школой в деле подготовки математической смены. Будущего математика необходимо воспитывать с детства, и чем раньше — тем лучше. Никого не удивляет, что подготовка будущих балерины или музыканта начинается чаще всего в раннем детстве, с 6—8-летнего возраста. Объясняется это тем, что успешное овладение тонкостями балетного искусства или музыки в юношеском возрасте невозможно без специализированной подготовки в детстве, обеспечивающей развитие слуха и чувства ритма, гибкость суставов или подвижность пальцев и т. д. И каждый год, упущенный в детстве, впоследствии удается возместить лишь многими годами упорной работы.

Не следует думать, что в науке, и особенно в математике, дело обстоит как-либо иначе. Разумеется, подготовку будущего математика вовсе не обязательно (хотя вполне возможно) начинать с 6—8-летнего возраста. Однако перекладывать эту работу целиком на Университет тоже нецелесообразно. Здесь, так же как в балетном искусстве или музыке, годы, упущенные в детстве, трудно компенсировать впоследствии. Дело в том, что работа в области математики требует известной гибкости ума, умения абстрактно мыслить, требует определенной логической культуры, отсутствие которых к моменту поступления в Университет невозможно компенсировать даже упорной работой в студенческие годы. Разумеется, все эти данные (в совокупности составляющие то, что обычно называют «математическими способностями») могут развиться у подростка в период обучения в общеобразовательной школе без какой бы то ни было специализированной подготовки. Это — стихийный процесс появления математических самородков, конечно, имевший место во все времена и во всех странах. Например, известнейший индийский математик С. Рамануджан (1887—1920) воспитывался в атмосфере враждебности ко всему европейскому (и особенно английскому) и не получил в детстве по существу никакого математического образования.



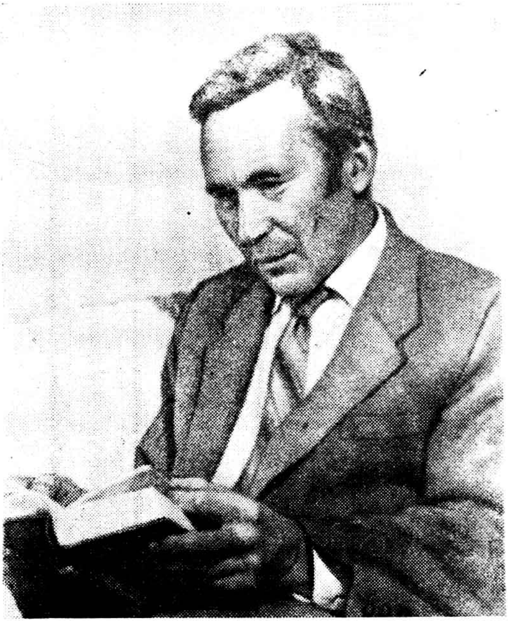
Большим энтузиастом работы со школьниками является член-корреспондент АН СССР, профессор Б. Н. Делоне. В 1934 году он возглавлял оргкомитет самой первой в нашей стране школьной математической олимпиады (в Ленинграде)

Однако в 30-х годах стало ясно, что этот процесс стихийного формирования ученых не может удовлетворять все возрастающие потребности страны в квалифицированных математиках. Правда, всеобщее среднее образование позволяет надеяться на то, что одаренные,

Член-корреспондент АН СССР, профессор Л. Г. Шнирельман был одним из главных инициаторов создания городского школьного математического кружка.

способные дети будут замечены школьным учителем, поддержка которого создаст стимулы для углубленной дополнительной работы. Однако эти надежды не всегда оправдываются. Ведь круглые пятерки по всем математическим предметам — весьма маловыразительный критерий, в котором отражаются не только (а иногда и не столько!) математические способности, но и внимательность, аккуратность в работе, прилежание и даже хороший почерк. Напротив, скромные оценки по математическим предметам далеко не всегда свидетельствуют о математической неодаренности. Достаточно упомянуть о том, что видный советский математик, лауреат Ленинской премии, профессор М. М. Постников (да не обидится он на нас за разглашение этого секрета!) в школьные годы не ходил в числе первых математиков школы; в его дневнике, бывало, проглядывали и «двойки» по математическим дисциплинам. Но даже в тех случаях, когда учитель правильно подмечает математическую «искру» в своем ученике, он не всегда может помочь ему в подборе дополнительных задач и дополнительной литературы, помочь раздуть эту искру в большой огонь, освещающий дорогу в будущее.

Между тем математические дарования, подобно музыкальным, проявляются обычно довольно рано. Более того, при правильном развитии ученого-математика наиболее крупные открытия зачастую делаются в весьма молодом возрасте. Так например, убитый на дуэли в возрасте 20 лет французский математик Эварист Галуа (1811—1832) успел за свою короткую жизнь создать замечательную по глубине алгебраическую теорию, произведшую целый



Академик А. Н. Колмогоров всегда принимал активнейшее участие в работе школьного математического кружка и в организации Московских математических олимпиад.

переворот в последующем развитии математики. Девятнадцатилетний К. Ф. Гаусс (1777—1855) успел опубликовать свои классические исследования о построениях циркулем и линейкой, а через несколько лет подарил миру книгу «*Disquisitiones arithmeticae*», равных которой можно немного указать в истории математической науки! Закон двойственности, прославивший замечательного советского математика, академика Л. С. Понтрягина, был найден им еще в студенческие годы.

Эти обстоятельства делают необходимым участие ученых-математиков в работе со школьниками. Инициаторами такой работы выступили в Ленинграде член-корреспондент АН СССР, профессор Б. Н. Делоне и профессор В. А. Тартаковский, а в Москве — член-корреспондент АН СССР, профессор Л. Г. Шнирельман и профессор (ныне член-корреспондент АН СССР)

Академик П. С. Александров возглавлял оргкомитет 1-й Московской математической олимпиады (1935 год).

Л. А. Люстерник. Весной 1934 года в Ленинграде была проведена первая в Советском Союзе школьная математическая олимпиада. Одновременно по инициативе Л. А. Люстерника начала выходить серия математических книг, предназначенных специально для школьников («Популярная библиотека по математике»). С осени 1934 года в Москве, в Институте математики АН СССР, начали регулярно читаться лекции по математике для учащихся старших классов. Но, несмотря на то что к чтению лекций привлекались крупнейшие советские математики, посещались эти лекции довольно слабо — достаточно эффективные формы работы со школьниками не были еще найдены!

В этих условиях Правление Московского Математического Общества подхватило инициативу ленинградцев и приняло решение о проведении 1-й Московской школьной математической олимпиады. К этому мероприятию математики отнеслись с большим воодушевлением. Достаточно сказать, что почти все профессора-математики МГУ вошли в оргкомитет олимпиады (А. Н. Колмогоров, Л. А. Люстерник, Л. Г. Шнирельман, В. Ф. Каган, С. Л. Соболев, С. А. Яновская и другие); председателем оргкомитета был президент Московского Математического Общества, член-корреспондент АН СССР (ныне академик) П. С. Александров.

В олимпиаде приняло участие 314 школьников, что считалось тогда большим успехом. Во втором, заключительном, туре олимпиады приняло участие 120 человек, из которых трое (Игорь Зверев, Коля Коробов и Аня Мышкис) получили первые премии и пять школьников получили вторые премии. В качестве премий победителям были вручены небольшие математические библиотечки. Кроме того, 44 школьника получили почетные отзывы. Олимпиада закончилась увлекательной совместной поездкой участников олимпиады и членов оргкомитета за город.

Доктор физико-математических наук, профессор Н. М. Коробов. В 1935 году он участвовал в I-й Московской математической олимпиаде и завоевал первую премию.

Лекции по математике для школьников

Говорить о дальнейшей истории московских математических олимпиад невозможно в отрыве от истории школьного математического кружка при Московском Университете. Успех I Математической Олимпиады способствовал полной перестройке всей работы со способными школьниками. Еще до олимпиады несколько студентов-математиков Университета вели математические кружки в школах Москвы. После проведения олимпиады было решено перенести эту работу в Университет и объединить ее с лекциями, читавшимися ранее в Математическом институте АН СССР. Так возник Школьный математический кружок при МГУ. Его организаторами были Л. А. Люстерник, Л. Г. Шнирельман и доцент МГУ (ныне член-корреспондент АН СССР) И. М. Гельфанд. Наряду с ними в работе кружка активно участвовали многие студенты, среди которых можно упомянуть погибшего во время Великой Отечественной войны Марка Глезермана (председатель бюро кружка в 1935/36 году) и Павла Папуша (председатель бюро кружка в 1936/37 году).

С самого начала работа кружка проводилась в двух направлениях: чтение лекций и заседания секций кружка. Два раза в месяц, по выходным дням, профессора и преподаватели Университета читали лекции по математике для школьников. На лекции приходили десятки, а впоследствии — сотни школьников Москвы. Состав слушателей лекций был довольно непостоянным. В связи с этим каждая лекция представляла собой, как правило, самостоятельное целое. Редко две лекции служили продолжением одна другой. Официально было принято, что лекция продолжается два часа (с десятиминутным перерывом). Однако за соблюдением этого регламента никто не следил — все определялось интересом слушателей и темпераментом лектора. Например, Б. Н. Делоне, весьма часто и с большим успехом выступавший перед школьниками, никогда не читал лекций, продолжавшихся менее трех часов; иногда его лекции длились 4 часа и более — и, надо сказать, школьники слушали с большим интересом и вниманием! Первоначально лекции были рассчитаны на учащихся VIII—X классов. Начиная с 1940 года одновременно проводились по две лекции — одна для учащихся VII—VIII классов и вторая для старшеклассников.

Тематика лекций была весьма разнообразной. Приведем здесь, для примера, несколько десятков названий лекций, прочитанных в разные годы работы кружка:

Л. Г. Шнирельман, Многомерная геометрия;
Л. А. Люстерник, Выпуклые фигуры;
И. М. Гельфанд, Основные понятия теории множеств;
Б. Н. Делоне, Вывод семи кристаллических систем;
А. Н. Колмогоров, Основная теорема алгебры;
С. Л. Соболев, Что такое математическая физика?;
П. С. Александров, Трансфинитные числа;
С. А. Яновская, Что значит решить задачу?;
Я. С. Дубнов, Ошибки в геометрических доказательствах;
И. А. Кибель, Математические методы предсказания погоды;
Л. Г. Шнирельман, Теория групп и ее приложение к решению уравнений 3-й степени;
В. В. Голубев, Почему летает самолет?;
А. Я. Хинчин, Цепные дроби;
А. И. Маркушевич, Разностные уравнения
А. О. Гельфонд, Простые числа;
Л. А. Люстерник, Геодезические линии;
Б. Н. Делоне, Геометрическое решение неопределенных уравнений;
И. М. Гельфанд, Принцип Дирихле;
А. Н. Колмогоров, Арифметика вычетов и ее приложение в технике;
Н. Н. Бухгольц, Механика движения;
Я. С. Дубнов, Аксиомы геометрии;
Г. М. Шапиро, Основные понятия современной алгебры;

Л. С. П о н т р я г и н, Что такое топология?;
И. Р. Ш а ф а р е в и ч, Решение уравнений в радикалах;
А. Г. К у р о ш, Что такое алгебра?;
Н. А. Г л а г о л е в, Построения с помощью одной линейки;
А. А. Л я п у н о в, Думающие машины;
А. И. М а р к у ш е в и ч, Площади и логарифмы;
Е. Б. Д ы н к и н, Автоматы и нервные сети;
А. С. К р о н р о д, Что такое программирование?;
А. И. У з к о в, Построения с помощью циркуля и линейки;
В. А. Е ф р е м о в и ч, Неевклидова геометрия;
Б. В. Г н е д е н к о, Как наука изучает случайные явления;
Н. К. Б а р и, Арифметика бесконечного;
Г. Е. Ш и л о в, О производной;
Р. Л. Д о б р у ш и н, Математические методы лингвистики;
В. Г. Б о л т я н с к и й, Непрерывные дроби и музыкальная гамма;
И. М. Я г л о м, Как измерить информацию?;
Е. М. Л а н д и с, Что такое длина кривой?;
А. М. Я г л о м, Недесятичные системы счисления и их применения;
О. А. О л е й н и к, Теорема Хелли;
В. А. У с п е н с к и й, Приложения механики к математике.

Приведенный список (разумеется, далеко не полный: за многие годы работы кружка было прочитано несколько сотен лекций для школьников) показывает, насколько разнообразной была тематика лекций. В некоторых из них (особенно предназначавшихся для старшеклассников) излагались в популярной форме серьезные математические результаты, иногда — научные достижения самых последних лет. Можно сказать, что школьный математический кружок при МГУ способствовал значительному переосмыслению термина «элементарная математика» (если под этим понимать все то богатство математических знаний, которое может быть сделано полностью доступным пониманию школьников). Так, например, в 1937 году в своей лекции «Основная теорема алгебры» академик А. Н. К о л м о г о р о в изложил по существу полное доказательство теоремы о существовании комплексного корня у всякого алгебраического уравнения. Это доказательство (получившее в школьном кружке наименование «Дама с собачкой») впоследствии точно в такой же форме было опубликовано в книге Р. К у р а н т а и Г. Р о б б и н с а [62]*. В том же году Л. Г. Ш н и р е л ь м а н в лекции «Теория групп и ее приложение к решению уравнений третьей степени» довел теоретико-групповые соображения, вос-

*) Цифры в квадратных скобках указывают на номер книги в списке литературы, помещенном на стр. 47 — 50.

ходящие по существу к Галуа, до получения явной формулы решения уравнения третьей степени. В лекции Б. Н. Делоне «Геометрия цепных дробей», прочитанной в 1947 году, не только доказывалась довольно тонкая теорема о наилучших рациональных приближениях иррациональных чисел, но и излагались весьма изысканные результаты Гурвица об иррациональностях, наихудшим образом приближающихся рациональными числами. Академик С. Л. Соболев в своей лекции «Что такое математическая физика?» (1940 г.) с большим мастерством довел изложение (на уровне, доступном пониманию школьников!) до классификации уравнений в частных производных второго порядка с указанием качественных различий в поведении их решений.

Иногда лекции сопровождались задачами, предлагавшимися на дом или решавшимися на месте. Особенно много задач предлагал своим слушателям И. М. Гельфанд. Школьники, знакомые с его манерой чтения, зачастую предпочитали садиться подальше от лектора, чтобы не быть вызванными к доске для решения задачи. Интересно строил свои лекции Я. С. Дубнов. Иногда он читал цикл из двух лекций, причем на первой лекции слушателям предлагались несколько задач, составляющих единое целое, а на второй лекции (через две недели) проводилась беседа с обсуждением найденных школьниками решений. Читая лекцию об арифметике вычетов и алгебрах Буля, А. Н. Колмогоров нарисовал изображенную на рис. 1 схему, позволяющую расположить у двери и над кроватью два переключателя, каждым из которых можно гасить или зажигать лампочку в комнате независимо от положения второго переключателя. Заканчивая первый час лекции, он предложил придумать во время перерыва

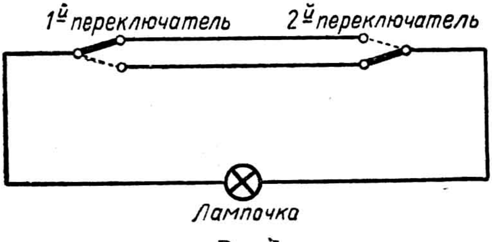


Рис. 1.

схему, позволяющую гасить или за
комнаты.

Нередко лекторы, готовясь к вст известных фактов ла находили новые элегантные доказательства известных теорем, получали новые обобщения ранее известных фактов и даже делали маленькие математические открытия. К сожалению, девять десятых этого ценнейшего материала кануло в Лету, и нам, старым кружковцам, очень грустно об этом думать. У нас в памяти сохранились воспоминания о ряде замечательных лекций А. Н. Колмогорова, Б. Н. Делоне, И. М. Гельфанда и других; однако текст этих лекций (и даже достаточно полное представление об их содержании и методических особенностях) сейчас, по-видимому, восстановить невозможно.

В 1950 году Гостехиздат (переименованный впоследствии в «Физматгиз» и вошедший в настоящее время в издательство «Наука») начал издавать специальную серию книг «Популярные лекции по математике». Большинство книг этой серии возникло при обработке лекций, прочитанных в школьном математическом кружке при МГУ (см., в частности, книги [8], [9], [11], [19], [22], [35], [38]). Другие лекции были опубликованы в сборниках «Математическое просвещение». Из них мы упомянем: лекцию Б. И. Сегала «Непрерывные дроби», прочитанную 18 апреля 1935 года для участников I Московской математической олимпиады (см. [48], вып. 7, стр. 46—67), лекцию Е. М. Ландиса «О длине кривой» ([49], вып. 1, стр. 33—44), лекцию Р. Л. Добрушина «Математические методы в лингвистике» ([49], вып. 6, стр. 37—60), лекцию И. М. Яглома «Комплексные числа и их применения в геометрии» ([49], вып. 6, стр. 61—106) и др.

Ниже мы приведем краткое содержание еще нескольких неопубликованных лекций, прочитанных в школьном математическом кружке при МГУ.

Принцип Дирихле

(Лекция И. М. Гельфанда для учащихся IX—XI классов)

В начале лекции формулировалась следующая задача: *На длинной прямолинейной дороге с равными интервалами вырыты небольшие поперечные канавки; расстояние между центрами каждых двух соседних канавок равно $\sqrt{2}$ метров* (рис. II). *Доказать, что какими бы узенькими эти канавки ни были сделаны, человек, шагающий по до-*

роге и имеющий длину шага 1 м, рано или поздно попадет в одну из канавок.

Доказательство этого утверждения вытекает из так называемого **п р и н ц и п а Д и р и х л е**, который в шуточной форме может быть

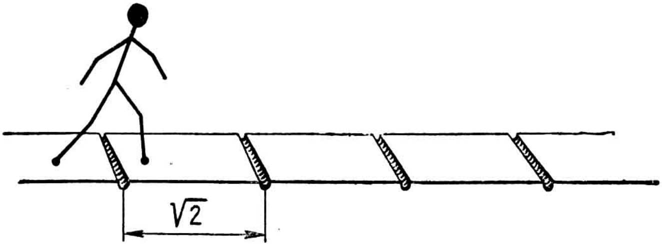


Рис II

изложен так: *невозможно разместить семь зайцев в пяти клетках, если в каждую клетку разрешается посадить не более одного зайца.* В самом деле, представим себе, что мы можем «намотать» дорогу на барабан, длина окружности которого равна $\sqrt{2}$ метров (рис. III). Тогда все канавки на этом барабане совместятся, а каждый шаг человека будет изображаться на окружности дугой длины 1 *м.* Будем последовательно отмечать на окружности след человека после первого, второго, третьего и т. д. шагов. Нам надо доказать, что хотя бы один

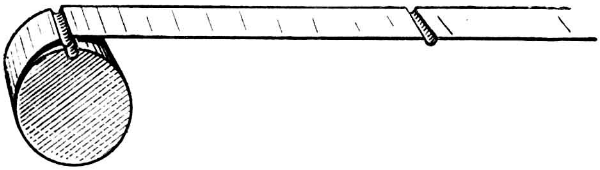


Рис. III.

из этих следов попадет внутрь заданной на окружности дуги, изображающей канавку, какой бы малой ни была длина h этой дуги. Нетрудно понять, что если нам удастся найти такие k и l, для которых следы k-го и $(k+l)$-го шагов удалены друг от друга (на окружности) менее чем на h, то требуемое утверждение докажется легко. Ведь еще после l шагов новый след (т. е. $(k+2l)$-й) опять сдвинется на расстояние, меньшее h (рис. IV), затем мы рассмотрим следующие l шагов и т. д. Ясно теперь, что, сделав несколько раз по l шагов, мы

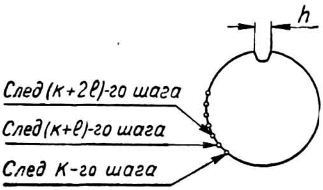


Рис. IV.

неминуемо обнаружим след, попавший в канавку (потому что, перемещаясь на одно и то же расстояние, меньшее h, нельзя «перешагнуть» канавку ширины h). Итак, нужно найти два следа, находящиеся на окружности на расстоянии, меньшем h. Вот здесь-то и помогают зайцы. Действительно, разделим окружность на дуги, каждая из которых имеет длину $< h$; эти дуги мы назовем «клетками». Пусть их имеется p штук. Если мы возьмем число следов, большее, чем p (заметим, что никакие два следа не совпадают в силу иррациональности числа $\sqrt{2}$), то по принципу Дирихле, хотя бы в одну из «клеток» попадет более одного следа («зайца»). Расстояние между двумя следами, попавшими в одну клетку, меньше h; этим наше утверждение и доказано.

В качестве второго примера, относящегося к тому же кругу идей, рассмотрим следующую задачу. *Доказать, что существует степень двойки, начинающаяся (в десятичной записи) тремя девятками:*

$$2^n = 999\ldots$$

Другими словами, требуется установить существование таких целых чисел n и k, что

$$999 \cdot 10^k \leqslant 2^n < 10^{k+3},$$

или, что то же самое,

$$k + \lg 999 \leqslant n \lg 2 < k + 3.$$

Нетрудно усмотреть глубокую аналогию между этой задачей и предыдущей. Различие лишь в том, что здесь длина «шага» равна $\lg 2$, а расстояние между каждыми двумя соседними «канавками» (имеющими ширину $3 - \lg 999$) равно 1. Вообще, *если число p не является степенью десятки, то среди чисел $p, p^2, p^3, p^4, \ldots$ найдутся такие, которые в десятичной записи начинаются с любой наперед заданной комбинации цифр.*

Дальнейшее развитие тех же соображений приводит к установлению ряда интересных теорем алгебры и геометрии. Перечислим некоторые из них.

Если l — луч, исходящий из начала координат и наклоненный к оси абсцисс под таким углом α, что $\operatorname{tg} \alpha$ — иррациональное число, то этот луч не встретит при своем продолжении ни одной точки с целыми координатами, но будет подходить сколь угодно близко к некоторым из таких точек.

Существует такое натуральное число n, что $\sin n < 0{,}000\,000\,001$.

Если числа α и β несоизмеримы с π и между собой, то сумма $\sin n\alpha + \sin n\beta$ при некоторых n будет принимать значения, как угодно близкие к 2 (хотя значение 2 эта сумма ни при каком n не принимает).

Если радиусы окружностей F и G несоизмеримы, то при качении окружности F по неподвижной окружности G любая точка катящейся окружности описывает кривую (эпициклоиду, рис. V), *«острия» которой располагаются на окруж-*

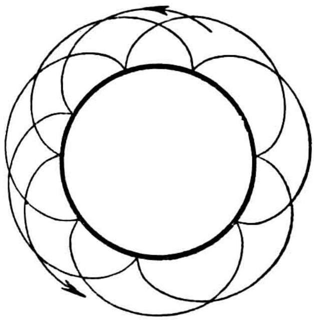


Рис. V.

ности G всюду плотно (т. е. на любой дуге окружности G найдутся «острия» этой кривой).

Среди других разбиравшихся вопросов упомянем о некоторых арифметических особенностях мантисс логарифмов, о поведении геодезических на поверхности баранки (на торе) с евклидовой метрикой (в частности, возможность всюду плотной обмотки тора такой геодезической) и т. п.

Лекция заканчивалась рассмотрением некоторых количественных оценок, связанных с принципом Дирихле. Например, в задаче о человеке, шагающем по дороге с канавками, постановка задачи заменялась следующей: как часто шагающий человек будет ступать в канавку?

Неопределенные уравнения второй степени

(Лекция Б. Н. Делоне для учащихся IX—X классов)

Лекция начинается коротким рассказом о неопределенных уравнениях второй степени с двумя неизвестными. Наиболее интересным среди них является уравнение Пелля:

$$x^2 - \Delta \cdot y^2 = 1, \qquad (*)$$

где Δ — целое число, не являющееся точным квадратом.

Теорема. *Уравнение* (*) *имеет бесконечно много целочисленных решений.*

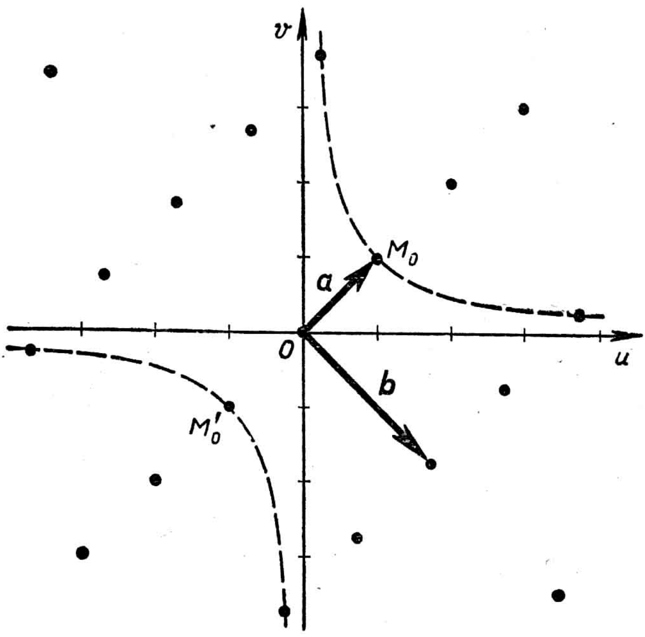


Рис. VI.