БИБЛИОТЕКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТАБЛИЦ

ВЫПУСК 13

М. ШУЛЕР, Х. ГЕБЕЛЕЙН

ТАБЛИЦЫ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Обработка таблиц
и перевод текста с немецкого
Ц. Д. ЛОМКАЦИ и Н. Н. ПЕРЕВЕЗЕНЦЕВОЙ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР АН СССР

МОСКВА — 1961

БИБЛИОТЕКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТАБЛИЦ

выходит под редакцией

К. А. КАРПОВА

Настоящие таблицы с помощью несложных вычислений позволяют получать с девятью знаками значения тэта-функций, эллиптических функций Якоби, полных и неполных эллиптических интегралов первого и второго рода как функций параметра Якоби q. Имеется вспомогательная таблица для перехода от модуля Лежандра Θ к параметру Якоби q.

ОТ РЕДАКТОРА

Таблицы эллиптических функций, составленные и вычисленные М.Шулером и Х.Гебелейном, чрезвычайно обширны по содержанию, имеют высокую точность (девять знаков) и рассчитаны на интерполяцию не выше второго порядка. Недостатком таблиц является то, что в них неэкономно расположен числовой материал (таблицы I – II; III – IV; V–VI попарно содержат одни и те же значения функций). Однако мы приняли эти таблицы к переизданию в их первоначальном виде.

При контроле таблиц методом разностей и частично пересчетом было обнаружено и исправлено около 25 ошибок, из которых 10 в значениях функций.

Можно надеяться, что таблицы М.Шулера и Х.Гебелейна должным образом будут оценены специалистами, использующими в своей работе эллиптические функции.

Москва, 22 июля 1961 г. *К. А. Карпов*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Опыт работы, особенно в области гироскопии, показал, что существующие таблицы эллиптических функций не являются удовлетворительными из-за плохой интерполяции. Возникла необходимость создания новых таблиц эллиптических функций, лишенных этого недостатка. Решение этой задачи осложнялось тем, что рассматриваемые функции зависят от двух переменных.

Прежде всего было решено в качестве одного из переменных брать не модуль Лагранжа Θ, а параметр Якоби $q\left[q = l^{-\pi\frac{K'}{K}}\right.$, где $K = K(\sin\Theta)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, и $\left.K' = K(\cos\Theta)\right]$, так как ряды Фурье для тэта-функций быстро сходятся по этому параметру.

Переменное x в тэта-функциях $\vartheta_n(x)$ заменили величиной $z = \cos 2x$.

Затем доктором Гебелейном были подобраны такие функции, достаточно просто выражающиеся через эллиптические, которые в интересующем интервале оказались почти линейными или квадратичными по каждому из двух переменных. Таблицы именно этих функций и даны в книге.

Наличие в таблицах первых, а иногда и вторых разностей значительно облегчает выполнение интерполяции.

Работы по вычислению таблиц проведены доктором Гебелейном в 1951–1955 гг.

Четыре тэта-функции посредством несложных вычислений могут быть найдены по первым четырем таблицам (I–IV), в которых протабулированы с десятью значащими цифрами функции $G(q^4, z)$ и $H(q^3, z)$ (они вычислялись с одиннадцатью-двенадцатью цифрами).

Значения эллиптических функций Якоби $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ можно получить с восемью десятичными знаками по табл. V и VI. В них даны с восемью десятичными знаками значения функций $\lg\frac{\operatorname{sn} u}{\sin x}$, $\lg\frac{\operatorname{cn} u}{\cos x}$ и $\lg \operatorname{dn} u$.

В упомянутых шести таблицах параметр Якоби q принимает значения от 0 до 0,55 (при $q = 0{,}55$ модуль Лежандра $\Theta = 89^\circ 56{,}42'$). Такой интервал вполне достаточен для практических целей.

Использование параметра Якоби q вместо модуля Лежандра Θ потребовало специальных таблиц, связывающих эти величины. В последней девятизначной табл. VII даются значения функций

$$\frac{1}{1-q}; \quad K \quad \text{и} \quad \frac{K}{E}$$

(E – полный эллиптический интервал первого рода) переменной $-\lg\cos\Theta$. Как и предыдущие, последние функции являются почти линейными. Величины K и E для $-\lg\cos\Theta > 0{,}5$ взяты из таблиц Каплана (Journal of Mathematics and Physics, vol. 25, 1946).

Данные таблицы рассчитаны на использование в научно-исследовательских институтах, располагающих вычислительными машинами. Правила пользования ими показаны во введении на примерах, которые включают интерполяцию и подобраны так, что полученные результаты можно сверить с имеющимися более точными значениями. Ниже помещена таблица, в которой результаты примеров сравниваются со значениями из двенадцатизначных таблиц эллиптических функций Спенселей (Spenceley G.W. and Spenceley R.M. Smithsonian Elliptic Function Tables. Smithsonian Institution, Washington, 1947).

№ примеров	Страницы	Функции	№ таблиц	Θ	x	Результаты примеров	По таблицам Спенселей
1	XIII	q	VII	83°	–	0,24291 2977	0,24291 297431
1	XIII	K	VII	83°	–	3,50042 250	3,50042 249917
1	XIII	E	VII	83°	–	1,02231 259	1,02231 258817
3	XIV	$A(x)$	I–II	83°	36°	0,50194 5286	0,50194 528654
4	XV	$D(x)$	III–IV	83°	54°	2,19616 2600	2,19616 260076
6	XVI	$\mathrm{cn}\,u$	V–VI	83°	54°	0,22855 563	0,22855 561167
6	XVI	$\mathrm{cn}\,u$	I–IV	83°	54°	0,22855 5612	0,22855 561167
7	XVII	$F(\Phi, \Theta)$	V–VII	83°	36°	1,40016 9000	1,40016 899967
7	XVII	$E(\Phi, \Theta)$	V–VII	83°	36°	0,89140 112	0,89140 110000

Заметим, что вычисление функций Якоби по табл. I–IV дает более точные результаты, чем по табл. V – VI. Сравнивая два последних столбца приведенной таблицы, приходим к заключению, что значения функций, полученные интерполяцией, содержат ошибку в несколько единиц последнего табличного знака.

Гёттинген, октябрь 1955

М. Хулеф

ВВЕДЕНИЕ

Настоящие таблицы предназначены для нахождения значений эллиптических функций и в отличие от аналогичных таблиц протабулированы не по модулю Лежандра Θ, а по параметру Якоби q.

Табл. I–IV включают значения хорошо интерполируемых вспомогательных функций G и H.

Табл. V–VI предназначены для решения задач, связанных с функциями Якоби $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$, которые особенно важны для практики.

Наконец, табл. VII отражает связь между параметром Лежандра Θ и параметром Якоби q.

Пояснения к таблицам I – IV

Функции G и H выражаются через тэта-функции Якоби следующим образом:

$$G = -\frac{\vartheta_1(x) - 2q^{\frac{1}{4}}\sin x}{2q^{\frac{9}{4}}\sin x}; \qquad H = \frac{\vartheta_3(x) - 1}{q}. \tag{1}$$

Если в известных рядах Фурье для тэта-функций заменить $\cos 2x$ на z, то для функций G и H получим степенные ряды по q и z

$$\left.\begin{aligned} G(q^4, z) &= (1+2z)+q^4(1-2z-4z^2)-q^{10}(1+4z-4z^2-8z^3)+\cdots \\ H(q^3, z) &= 2z-q^3(2-4z^2)-q^8(6z-8z^3)+q^{15}(2-16z^2+16z^4)+\cdots, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

быстро сходящиеся по переменному q.

Тэта–функции и их значения при $x = 0$ через $G(q^4; z)$ и $H(q^3; z)$ выражаются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\vartheta_1(x) = 2\sqrt[4]{q}\sin x\,[1 - q^2G(+z)]; && \vartheta_1'(0) = 2\sqrt[4]{q}\,[1 - q^2G(+1)];\\
&\vartheta_2(x) = 2\sqrt[4]{q}\cos x\,[1 - q^2G(-z)]; && \vartheta_2(0) = 2\sqrt[4]{q}\,[1 - q^2G(-1)];\\
&\vartheta_3(x) = 1 + qH(+z); && \vartheta_3(0) = 1 + qH(+1);\\
&\vartheta_4(x) = 1 + qH(-z); && \vartheta_4(0) = 1 + qH(-1).
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Эллиптические или родственные им функции, встречающиеся во многих задачах, могут быть выражены через четыре тэта–функции и следовательно, как видно из соотношений (3), через функции G и H. С помощью табл. I–IV можно находить также с большой точностью значения производных любых эллиптических и родственных им функций, которые выражаются через тэта–функции либо через функции G и H.

Аргумент $z = \cos 2x$ меняется в интервале от -1 до $+1$. В теории эллиптических функций q принимает значения от 0 до 1. Однако на практике в подавляющем большинстве случаев достаточно брать q в интервале от 0 до 0,55, что соответствует интервалу изменения Θ от 0 до $89°56{,}42'$.

В табл. I–IV значения функций $G(q^4, z)$ и $H(q^3, z)$ даны с девятью десятичными знаками, но в первоначальных вычислениях их получали с одиннадцатью–двенадцатью знаками. Поэтому табличные значения содержат только ошибку округления.

Значения функции $G(q^4, z)$ в табл. I упорядочены сначала по z, а затем по q^4 (таблица удобна для интерполяции по z), а в табл. II – наоборот (таблица удобна для интерполяции по q^4). Та же упорядоченность относительно переменных z и q принята и для табл. III и IV функции $H(q^3, z)$.

Относительно первых и вторых разностей, приведенных в табл. I и III, заметим следующее: они вычислялись с двенадцатью и более десятичными знаками, а в таблицы помещались с девятью десятичными знаками после округления. Таким образом, они могут не совпадать с разностями, вычисленными по табличным значениям функций (для первых разностей расхождение может достигать ±1, а для вторых ±2). В табл. II и IV и во всех остальных разности получены по соответствующим табличным значениям функций.

Пояснения к таблицам V–VI

Из эллиптических функций наиболее важными являются функции Якоби $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$. Они связаны с функциями $G(q^4; z)$ и $H(q^3; z)$ следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sn} u}{\sin x} &= \frac{1+qH(+1)}{1-q^2G(-1)} \cdot \frac{1-q^2G(+z)}{1+qH(-z)};\\
\frac{\operatorname{cn} u}{\cos x} &= \frac{1+qH(-1)}{1-q^2G(-1)} \cdot \frac{1-q^2G(-z)}{1+qH(-z)};\\
\operatorname{dn} u &= \frac{1+qH(-1)}{1+qH(+1)} \cdot \frac{1+qH(+z)}{1+qH(-z)}.
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Здесь $z=\cos 2x=\cos\frac{\pi}{K}u$, где K — полный эллиптический интеграл первого рода параметра $q=q(\Theta)$.

В табл. V—VI даны логарифмы левых частей равенств (4). При этом в табл. V за основное переменное взято z, а в табл. VI — переменное q.

Переход от функций к их логарифмам практически целесообразен по следующим причинам:

1) разности в этом случае становятся более гладкими;

2) протабулированные функции являются поправками для перехода от логарифмов тригонометрических функций к логарифмам эллиптических функций Якоби.

В восьмизначных табл. V—VI встречаются значения, в которых ошибка может оказаться равной единице, а изредка и двум единицам последнего знака. Если такая точность недостаточна, то следует пользоваться табл. I—IV (см. пример 6).

Пояснения к таблице VII

В табл. VII отображена связь между значениями параметра Якоби q и параметра Лежандра Θ. Для этого использована почти линейная зависимость между q и Θ, осуществляемая функцией $\frac{1}{1-q}$ аргумента $-\lg\cos\Theta$.

Аргумент $-\lg\cos\Theta = -\lg k'$ также является более подходящим для табулирования полных эллиптических интегралов K и E, чем аргумент k. Поэтому функции K и $\frac{K}{E}$, значения которых помещены в табл. VII, рассматриваются как функции этого аргумента.

Заметим, что три функции $\frac{1}{1-q}$, K и $\frac{K}{E}$ имеют ассимптоты (чертеж 11, стр. 281)

$$\lim_{k'\to 0}\frac{1/(1-q)}{-\lg k'} = \lim_{k'\to 0}\frac{1/(1-q)}{K} = \frac{2}{\pi^2} = 0{,}20264\ 2367.$$

Замечание об интерполяции

Хорошая интерполяция в этих таблицах обусловлена тем, что протабулированные функции почти линейны или квадратичны по каждому из аргументов. При одновременной интерполяции по обеим переменным этих преимуществ не будет. Следовательно, интерполяцию надо выполнять последовательно по каждому переменному (выбор очередности интерполяции по переменным зависит от конкретного случая).

Исходя из этих соображений, каждая таблица повторена дважды: в первом случае значения функций упорядочены по z и даются разности по этому переменному (табл. I, III, V удобны для интерполяции по z), во втором случае значения функций упорядочены по переменным q^4 (табл. II), q^3 (табл. IV), q (табл. V) и по этим переменным даны разности (таблицы удобны для интерполяции соответственно по q^4, q^3 и q).*

Чтобы облегчить интерполяцию, даются первые, а иногда и вторые разности. Приведенные ниже примеры показывают, как в данных таблицах нужно выполнять интерполяцию.

ПРИМЕРЫ

Некоторые возможности использования данных таблиц показаны на приведенных ниже типичных примерах. Они рассматриваются при $\Theta = 83°$ и при одном из взаимно дополнительных углов $x = 36°$ или $x = 54°$. Соответствующие значения q и z будут бесконечными дробями. Таким образом становится необходимой интерполяция. Результаты примеров сравнивались со значениями, найденными в ранее опубликованных таблицах эллиптических функций (см. предисловие). Сравнение показало, что результаты, полученные путем интерполяции по настоящим таблицам, имеют ту же точность, что и сами табличные значения.

В рассматриваемых ниже примерах интерполяция проводится по интерполяционной формуле Ньютона

$$f(y) = f(y_0 + th) = f(y_0) + t\Delta f + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 f + \dots \qquad (5)$$

Выражение

$$\bar{\Delta} f = \Delta f - \frac{1-t}{2}\Delta^2 f + \frac{(1-t)(2-t)}{6}\Delta^3 f - + \cdots \qquad (6)$$

назовем модифицированной первой разностью. При этом формуле (5) можно придать вид

$$f(y) = f(y_0) + t\bar{\Delta} f. \qquad (7)$$

---

*Приведенные соображения не подтверждают необходимости повторения таблиц. — *Прим. ред.*

В формулах (5) – (7) приняты обозначения:

y – значение аргумента, для которого ищется значение функции;

y_0 – ближайшее меньшее табличное значение аргумента;

$f(y)$ – искомое значение функции;

$f(y_0)$ – табличное значение функции;

Δf – первая разность;

$\Delta^2 f$ – вторая разность;

$\Delta^3 f$ – третья разность и т.д.;

h – табличный шаг;

$$t = \frac{y - y_0}{h}.$$

Первые разности в таблицах помещены на полстроки ниже соответствующих значений функций, а вторые – на строку.

Пример 1 (к табл. VII). Вычислить q, K, E для модуля Лежандра $\Theta = 83°$.

В табл. VII даны значения функций $\frac{1}{1-q}$, K и $\frac{K}{E}$ от аргумента $y = -\lg\cos\Theta$. Задача сводится к интерполяции по одному переменному. В этом случае значение аргумента

$$y = -\lg\cos 83° = 0{,}91410\ 55287.$$

Шаг таблицы h равен 0,005. Таким образом, ближайшее меньшее значение аргумента $y_0 = 0{,}91$ и следовательно

$$t = \frac{y - y_0}{h} = \frac{0{,}91410\ 55287 - 0{,}91}{0{,}005} = 0{,}82110\ 574.$$

Используя значения со стр. 286, получим

Функции	$\frac{1}{1-q}$	$K(q)$	$\frac{K}{E}$
$f(0{,}91)$	1,31921 488	3,49111 245	3,41372 842
Δf	199 410	1133 870	1253 708
$\Delta^2 f$	179	305	–1 327
$\Delta^3 f$	0	–5	12
$f(y)$	1,32085 212	3,50042 250	3,42402 367

Результаты: $q = 0{,}24291\ 2977$; $K = 3{,}50042\ 250$; $E = 1{,}02231\ 259$.

Пример 2 (к табл. II и IV). Вычислить $1 - q^2 G(q^4, z)$ и $1 + qH(q^3, z)$ при $\Theta = 83°$ и $z = -1$.

Здесь требуется интерполяция по q^4 и q^3 в столбцах $z = -1$ табл. II и IV. При $\Theta = 83°$ (см. пример 1) $q^4 = 0{,}00348\ 17922$ и $q^3 = 0{,}01433\ 34962$. Так как шаг табл. II и IV соответственно равен 0,001 и 0,002, то $q_0^4 = 0{,}003$, а $q_0^3 = 0{,}014$.

Следовательно $t_1 = \dfrac{q^4 - 0{,}003}{0{,}001} = 0{,}48179\ 22$ и $t_2 = \dfrac{q^3 - 0{,}014}{0{,}002} = 0{,}16674\ 81$.

Используя значения функции $G(q^4; -1) = f_1(q^4)$ и $H(q^3; -1) = f_2(q^3)$, взятые со стр. 55 и 131, получим

G

$f_1(0{,}003)$	−1,00300 0493
Δf	−100 0519
$\Delta^2 f$	−237
$\Delta^3 f$	−28
$f_1(q^4)$	−1,00348 2508

H

$f_2(0{,}014)$	−1,97202 2769
Δf	399 0261
$\Delta^2 f$	−2256
$\Delta^3 f$	−184
$f_2(q^3)$	−1,97135 7252

В итоге имеем

$$1 - q^2 G(-1) = 1{,}05921\ 2205; \qquad 1 + qH(-1) = 0{,}52113\ 1747.$$

Пример 3 (к табл. I). Вычислить

$$A(x) = \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_2(0)} = \frac{1 - q^2 G(z)}{1 - q^2 G(-1)} \sin x$$

при $\Theta = 83^\circ$ и $x = 36^\circ$.

Необходима интерполяция по двум переменным и начнем ее с интерполяции по z (табл. I). При $x = 36^\circ$ $z = \cos 2x = 0{,}30901\ 6994$. Так как шаг табл. I по z равен 0,05, то $z_0 = 0{,}30$ и следовательно $t = \dfrac{z - 0{,}30}{0{,}05} = 0{,}18033\ 988$.

Интерполяцией по z получим ряд значений функции $G(q^4, z)$ для табличных значений q^4 начиная с 0,003 (при $\Theta = 83^\circ$ $q^4 = 0{,}00348\ 17922$, см. пример 2), необходимый для последующей интерполяции по q^4. Исходные данные берем из табл. I со страниц 4 и 5.

q^4	0,003	0,004	0,005	0,006
$f = G(q^4; 0{,}30)$	1,60011 9199	1,60015 8357	1,60019 7129	1,60023 5471
Δf	9931 0028	9908 0058	9885 0101	9862 0159
$\Delta^2 f$	−5 9969	−7 9937	−9 9890	−11 9827
$f = G(q^4, z)$	1,61803 3192	1,61803 2353	1,61803 1129	1,61802 9477

Теперь надо интерполировать относительно q^4 при $q_0^4 = 0{,}003$ и $t = 0{,}48179\ 22$ (см. пример 2). Имеем $f(y_0) = G(0{,}003; z) = 1{,}61803\ 3192$; $\Delta f = -839$; $\Delta^2 f = -385$ и $\Delta^3 f = -43$ (разности вычислены по полученной табличке).

По формуле (6) вычислим первую модифицированную разность

$$\bar{\Delta} f = -839 + \frac{(1-t)}{2} 385 - \frac{(1-t)(2-t)}{6} 43 = -745.$$

Отсюда по формуле (7) получим

$$G(q^4, z) = 1{,}61803\ 2833 \quad \text{и} \quad 1 - q^2 G(z) = 0{,}90452\ 52008.$$

В примере 2 имели $1 - q^2 G(-1) = 1{,}05921\ 2205$. Так как $\sin x = \sin 36° = 0{,}58778\ 5252$, то в итоге находим

$$A(x) = 0{,}50194\ 5286.$$

Пример 4 (к табл. III). Вычислить

$$D(x) = \frac{\vartheta_4(x)}{\vartheta_4(0)} = \frac{1 + qH(-z)}{1 + qH(-1)}$$

при $\Theta = 83°$, $x = 54°$.

Функции $A(x)$ и $D(x)$ протабулированы у Спенселей и представляют несколько необычно нормализованные тэта-функции.

Снова необходимо интерполировать по двум переменным. Заметим, что при $x = 54°$ значения z отличаются от значения z при $x = 36°$ только знаком. Следовательно, $-z = -\cos 108° = 0{,}30901\ 6994$ (см. пример 3). Начинаем с интерполяции по z, пользуясь табл. III (стр. 88–89) и поступая аналогично примеру 3 ($t = 0{,}18033\ 988$, см. пример 3; $q^3 = 0{,}01433\ 34962$, см. пример 2).

q^3	0,014	0,016	0,018	0,020
$f = H(q^3; 0{,}30)$	0,57702 1966	0,57373 4253	0,57044 4752	0,56715 3318
Δf	10181 8030	10207 7187	10233 6149	10259 4900
$\Delta^2 f$	28 0478	32 0683	36 0935	40 1238
$f = H(q^3; -z)$	0,59536 3090	0,59211 9141	0,58887 3367	0,58562 5617

Используя полученные значения $H(q^3; -z)$ при фиксированном z, выполним интерполяцию по q^3 при $q_0^3 = 0{,}014$ и $t = 0{,}16674\ 81$ (см. пример 2).

$$f(y_0) = H(0{,}014; -z) = 0{,}59536\ 3090; \quad \Delta f = -324\ 3949;$$
$$\Delta^2 f = -1825; \quad \Delta^3 f = -151.$$

Будем иметь $H(q^3; -z) = 0{,}59482\ 2289$; $1 + qH(-z) = 1{,}14449\ 0053$.

В примере 2 получили $1 + qH(-1) = 0{,}52113\ 1747$. Следовательно

$$D(x) = 2{,}19616\ 2600.$$

Пример 5 (к табл. IV). Вычислить $H(z)$ и $H'(z)$ при $\Theta = 83°$ и $x = 54°$.

Для решения задачи нужно интерполировать опять по обоим переменным. Из предыдущих примеров имеем $z = \cos 2x = -0{,}30901\ 6994$, а $q^3 = 0{,}01433\ 34962$. Начнем с интерполяции по q^3, принимая q_0^3 равным $0{,}014$ и t равным $0{,}16674\ 81$ (см. пример 2). Пользуясь табл. IV (стр. 139 и 141), находим

z	$-0{,}35$	$-0{,}30$	$-0{,}25$	$-0{,}20$
$f = H(0{,}014; z)$	$-0{,}72111\ 9996$	$-0{,}62294\ 1965$	$-0{,}52448\ 4345$	$-0{,}42574\ 7066$
Δf	$-301\ 1444$	$-327\ 2286$	$-349\ 3303$	$-367\ 4467$
$\Delta^2 f$	1983	1787	1551	1282
$\Delta^3 f$	163	148	129	106
$\Delta^4 f$	-9	-8	-8	-6
$f = H(q^3, z)$	$-0{,}72162\ 2279$	$-0{,}62348\ 7730$	$-0{,}52506\ 6949$	$-0{,}42635\ 9861$

Для интерполяции по z при $z_0 = -0{,}35$, $t = \frac{z + 0{,}35}{0{,}05} = 0{,}81966\ 012$ используем значения $f(y_0) = H(q^3; -0{,}35) = -0{,}72162\ 2279$; $\Delta f = 9813\ 4549$; $\Delta^2 f = 28\ 6232$; $\Delta^3 f = 75$, взятые и вычисленные по последней табличке.

Используя интерполяционную формулу, получим $H(q^3, z) = -0{,}64120\ 6456$. Дифференцируя ее по t и полагая $t = 0{,}81966\ 012$, найдем $H'(z) = 1{,}96452\ 07$.*

Пример 6 (к табл. V). Вычислить $\mathrm{cn}\, u$ при $\Theta = 83°$ и $x = 54°$.

Пользуясь значениями $z = \cos 2x = -0{,}30901\ 6994$ (см. пример 5), $q = 0{,}24291\ 2977$ (см. пример 1), $t = 0{,}81966\ 01$ (см. пример 5), интерполяцией по z получим значения функции $f(q, z) = \lg \frac{\mathrm{cn}\, u}{\cos x}$ для последовательных значений q начиная с $0{,}24$. Исходные данные для интерполяции возьмем из таблицы V (стр. 185 – 189).

q	0,24	0,25	0,26	0,27	0,28
$f(q; -0{,}35)$	$-0{,}41320\ 589$	$-0{,}43734\ 299$	$-0{,}46217\ 092$	$-0{,}48771\ 211$	$-0{,}51399\ 044$
Δf	1196 355	1257 948	1321 092	1385 883	1452 420
$\Delta^2 f$	15 870	16 747	17 601	18 421	19 208
$\Delta^3 f$	732	811	889	980	1 069
$\Delta^4 f$	47	50	62	59	69
$f(q, z)$	$-0{,}40341\ 137$	$-0{,}42704\ 423$	$-0{,}45135\ 521$	$-0{,}47636\ 591$	$-0{,}50209\ 943$

---

*Без оценки остаточного члена нельзя утверждать, что все выписанные цифры верны. Однако, как следует из примера 7, в данном случае это имеет место. — *Прим. ред.*

Для интерполяции по q имеем $f(y_0) = -0{,}40341\ 137$; $\Delta f = -2363\ 286$; $\Delta^2 f = -67\ 812$; $\Delta^3 f = -2\ 160$; $\Delta^4 f = -149$. Интерполяцию выполним при $q_0 = 0{,}24$ и $t = \dfrac{q - 0{,}24}{0{,}01} = 0{,}29129\ 77$, что дает

$$\lg \frac{\operatorname{cn} u}{\cos x} = -0{,}41022\ 678,$$

откуда при $x = 54^\circ$ получим $\operatorname{cn} u = 0{,}22855\ 563$.

Изменяя порядок интерполирования, функции Якоби можно с таким же успехом найти и по табл. VI. Наконец укажем на то, что функции Якоби с помощью формул (4) можно вычислять по табл. I–IV, получая при этом бо́льшую точность, правда с бо́льшими вычислительными трудностями.

Для данного примера $\operatorname{cn} u$ можно быстро вычислить, используя результаты примеров 3 и 4:

$$\operatorname{cn} u = \frac{A(90^\circ - x)}{D(x)} = \frac{0{,}50194\ 5286}{2{,}19616\ 2600} = 0{,}22855\ 5612.$$

Пример 7 (к табл. VI). Вычислить неполные эллиптические интегралы

$$F(\Phi,\Theta) = \int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\sqrt{1-\sin^2\Theta \sin^2\Phi}} \quad \text{и} \quad E(\Phi,\Theta) = \int_0^{\Phi} \sqrt{1-\sin^2\Theta \sin^2\Phi}\, d\Phi$$

для $\Theta = 83^\circ$ и $\Phi = 62{,}566105^\circ$.

При данном Θ $q = 0{,}24291\ 2977$. Соответствующие полные эллиптические интегралы будут: $K = 3{,}50042\ 250$ и $E = 1{,}02231\ 259$ (см. пример 1). Можно также вычислить

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{1 - \sin^2\Theta \sin^2\Phi} = 0{,}47325\ 1477.$$

Отсюда

$$\lg \operatorname{dn} u = -0{,}32490\ 802.$$

Связь между u и z выражается равенством $z = \cos\frac{\pi}{K}u$, где $u = F(\Phi,\Theta)$.

Таким образом, имеем определенное значение $\lg \operatorname{dn} u$ при заданном q, а необходимо найти соответствующее значение z.

Составим табличку (табл. VI, стр. 258 – 264):

z	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$f(0{,}24; z) = \lg \operatorname{dn} u$	−0,32405 288	−0,30262 873	−0,28105 492	−0,25930 730	−0,23736 056
Δf	−1646 678	−1551 550	−1454 637	−1355 630	−1254 190
$\Delta^2 f$	−38 410	−37 551	−36 578	−35 462	−34 180
$\Delta^3 f$	−2 011	−1 945	−1 878	−1 815	−1 745
$\Delta^4 f$	−73	−71	−68	−61	−61
$f(q, z)$	−0,32881 112	−0,30711 071	−0,28525 555	−0,26322 067	−0,24097 972

В последней строке стоят значения $\lg \mathrm{dn}\, u$, соответствующие значению $q = 0{,}24291\,2977$ и помеченным значениям z.

Теперь для $\lg \mathrm{dn}\, u = -0{,}32490\,802$ при заданном q обратной интерполяцией нужно вычислить соответствующее z (по значениям последней строки таблички). Принимая $z_0 = 0{,}30$, имеем $f(q;\,0{,}30) = -0{,}32881\,112$; $\Delta f = 2170\,041$; $\Delta^2 f = 15\,475$; $\Delta^3 f = 2\,497$; $\Delta^4 f = 138$.

Отсюда $z = 0{,}30901\,699$.* Это число соответствует $\cos 72^\circ$ ($x = 36^\circ$).

Окончательно

$$F(\Phi, \Theta) = u = \frac{K}{\pi} \arccos z = \frac{K}{180^\circ} \cdot 72^\circ = 1{,}40016\,9000.$$

Неполный эллиптический интеграл второго рода можно вычислить по формуле

$$E(\Phi, \Theta) = \frac{E}{K} u + \frac{\pi}{K} q \sin\left(\frac{\pi}{K} u\right) \frac{H'(-z)}{1 + qH(-z)}.$$

По данным примера 5 получим

$$\frac{H'(-z)}{1 + qH(-z)} = 2{,}32696\,227.$$

Далее

$$\frac{E}{K} u = 0{,}40892\,504; \quad \frac{\pi}{K} q \sin\left(\frac{\pi}{K} u\right) = \frac{\pi}{K} q \sin 72^\circ = 0{,}20734\,1601.$$

В итоге

$$E(\Phi, \Theta) = 0{,}40892\,504 + 0{,}20734\,1601 \cdot 2{,}32696\,227 = 0{,}89140\,112.$$

Хотя вычисление неполных эллиптических интегралов не является целью этих таблиц, пример показывает, что эти функции можно получить для произвольных Φ и Θ с помощью несложных вычислений.**

---

* Обратную интерполяцию можно осуществить, чередуя обратную линейную интерполяцию с прямой, учитывающей четвертые разности. – *Прим. ред.*

** Нам эти вычисления кажутся довольно громоздкими. – *Прим. ред.*

БИБЛИОТЕКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТАБЛИЦ

ВЫШЛИ:

Выпуск 1. Таблицы круговых и гиперболических синусов и косинусов в радианной мере угла. М., Вычислительный центр АН СССР, 1958 г.

Выпуск 2. Таблицы вероятностных функций, том I

$$H'(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2} \text{ и } H(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\alpha^2}d\alpha .$$

М., Вычислительный центр АН СССР, 1958 г.

Выпуск 3. Таблицы вероятностных функций, том II

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ и } \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^{x} e^{-\frac{\alpha^2}{2}}d\alpha .$$

М., Вычислительный центр АН СССР, 1959 г.

Выпуск 4. Таблицы функций Бесселя дробного индекса, том I, $J_\nu(x)$. М., Вычислительный центр АН СССР, 1959 г.

Выпуск 5. Таблицы функций Бесселя дробного индекса, том II, $I_\nu(x)$. М., Вычислительный центр АН СССР, 1959 г.

Выпуск 6. Таблицы круговых и гиперболических тангенсов и котангенсов в радианной мере угла. М., Вычислительный центр АН СССР, 1959 г.

Выпуск 7. Таблицы натуральных логарифмов, том I. Логарифмы чисел от 0 до 5. М., Вычислительный центр АН СССР, 1960 г.

Выпуск 8. Таблицы натуральных логарифмов, том II. Логарифмы чисел от 5 до 10. М., Вычислительный центр АН СССР, 1960 г.

Выпуск 9. Многозначные таблицы элементарных функций ($\sin x$, $\cos x$, e^x и e^{-x}). М., Вычислительный центр АН СССР, 1960 г.

Выпуск 10. Таблицы $\arcsin x$ и $\operatorname{arctg} x$. М., Вычислительный центр АН СССР, 1960 г.

Выпуск 11. Таблицы обратных гиперболических функций. М., Вычислительный центр АН СССР, 1960 г.

Выпуск 12. Таблицы функций Бесселя целого положительного индекса. М., Вычислительный центр АН СССР, 1960 г.

Выпуск 13. М. Шулер и Х. Гебелейн. Таблицы эллиптических функций. М., Вычислительный центр АН СССР, 1961 г.

ГОТОВЯТСЯ К ПЕЧАТИ:

1. Таблицы двадцатизначных десятичных логарифмов чисел, том I. Логарифмы чисел от 10000 до 55000.
2. Таблицы двадцатизначных десятичных логарифмов чисел, том II. Логарифмы чисел от 55000 до 100000.
