С. Е. ЛЯПИН,
И. В. БАРАНОВА,
З. Г. БОРЧУГОВА

Сборник задач по элементарной алгебре

内 部 交 流
E17/4

初等代数习题集（增订第2版）

（俄2-2/19）

C-00190

Ляпин Сергей Евгеньевич,
Баранова Ирина Владимировна,
Борчугова Зоя Григорьевна

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ АЛГЕБРЕ

Редактор Э. К. **Викулина**

Переплет художника **О. М. Журавлева**

Художественный редактор **Е. Н. Карасик**

Технические редакторы **М. И. Сафронович** и **И. В. Квасницкая**

Корректор **Н. И. Новикова**

Сдано в набор 22/II 1973 г. Подписано к печати 15/XI 1973 г. $60\times90^1/_{16}$. Бумага тип. № 2. Печ. л. 22. Уч.-изд. л. 22,60. Тираж 80 тыс. экз. A10678.
Заказ 1089.

Издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41. Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Цена без переплета 63 к., переплет 21 к.

С. Е. ЛЯПИН,
И. В. БАРАНОВА,
З. Г. БОРЧУГОВА

Сборник задач по элементарной алгебре

Допущено Министерством просвещения СССР в качестве учебного пособия для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов

Издание второе, переработанное, дополненное

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1973

Второе издание задачника (1-е в 1960 г.) основательно переработано и дополнено в связи с новыми требованиями к школьной математике. Сборник задач охватывает многие вопросы школьного курса алгебры, в некоторых разделах выходит за его пределы. Данный сборник может служить пособием для проведения практикума по элементарной математике в педагогических институтах по специальности № 2104 «Математика».

Ляпин С. Е. и др.

Л 97 Сборник задач по элементарной алгебре. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. Изд. 2-е перераб., доп. М., «Просвещение», 1973.
351 с.

Перед загл. авт.: С. Е. Ляпин, И. В. Баранова, З. Г. Борчугова.

Л $\dfrac{0662-677}{М103\ (03)-73}$ 32 — 73 512

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В данное издание «Сборника задач по элементарной алгебре» по сравнению с первым его изданием внесены существенные изменения, вызванные, в частности, новым учебным планом и программами для математических факультетов пединститутов. Так, в связи с исключением из учебного плана курса элементарной математики в ряде случаев задачам предшествуют краткие теоретические сведения. Более полно представлен вопрос о числовых множествах: включен материал о вещественных и комплексных числах, об алгебраических и трансцендентных числах. Раздел о делимости чисел расширен и дополнен вопросами о решении неопределенных уравнений в целых числах, о числах Гаусса. Более подробно рассмотрены вопросы о функциях, об уравнениях и неравенствах, о комбинаторике. Значительно обновлена вся система задач: исключен ряд однотипных задач, внесено большое количество новых задач; для многих задач пересмотрены указания к решению, чтобы сделать их менее подсказывающими.

Главы I и II, за исключением параграфа о числах Гаусса и ряда задач на неопределенные уравнения, написаны И. В. Барановой. Параграф «Числа Гаусса» и некоторые задачи на неопределенные уравнения составлены Н. Н. Матвеевой. Глава III написана К. П. Козловым. Остальной материал задачника, в первом издании составленный С. Е. Ляпиным, подвергнут существенной переработке, при этом главы IV и X доработаны Л. И. Ляпиной, главы V, VI, VII, VIII, IX и XI переработаны З. Г. Борчуговой, глава XIII составлена Л. И. Кабеховой. Общая редакция издания принадлежит И. В. Барановой.

Авторы выражают искреннюю признательность рецензентам и особенно сотрудникам кафедры алгебры и теории чисел Свердловского государственного педагогического института за предложения, несомненно способствовавшие улучшению задачника.

Авторы
29.9.1971
Ленинград

ГЛАВА I
ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

§ 1. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Метод математической индукции — дедуктивный метод доказательства, основанный на аксиоме, называемой аксиомой индукции (или принципом индукции). Существует несколько утверждений, принимаемых за аксиому индукции (см., например, статью И. В. Проскурякова в ЭЭМ[1], том I).

В данной книге в качестве аксиомы индукции используется следующее утверждение:

Если некоторое предложение S справедливо для неотрицательного целого числа a и из предположения о его справедливости для неотрицательного целого числа $k > a$ следует справедливость его для непосредственно следующего за k числа $k+1$, то предложение S справедливо для любого целого неотрицательного числа $n \geqslant a$.

За число a, как правило, принимают наименьшее неотрицательное целое число, обладающее свойством S.

Доказательство с использованием аксиомы индукции состоит из трех этапов: проверки справедливости доказываемого утверждения для некоторого целого неотрицательного числа (наименьшего из множества, указанного в условии); допущения справедливости доказываемого утверждения для некоторого целого неотрицательного числа k; доказательства справедливости этого утверждения для числа $k+1$ при использовании допущения. Ссылка на аксиому индукции позволяет считать доказанным утверждение для любого целого неотрицательного числа, не меньшего числа, использованного на первом этапе доказательства.

Метод математической индукции может быть использован и для доказательства утверждений, заданных на множестве целых чисел, если добавить доказательство справедливости утверждения и для числа $k-1$.

---

[1] Энциклопедия элементарной математики, кн. I. Арифметика. И. В. Проскуряков, гл. III. М.—Л., Гос. изд-во технико-теоретической лит-ры, 1951.

Применение метода математической индукции к доказательству свойств чисел натурального ряда

Доказать:

1. Сумма n первых чисел натурального ряда равна $\frac{n(n+1)}{2}$.

2. Чему равна сумма первых n нечетных натуральных чисел?

3. Сумма квадратов n первых натуральных чисел равна $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4. $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$, где n — любое натуральное число.

5. а) $-1 + 3 - 5 + \ldots + (-1)^n (2n-1) = (-1)^n n$;
б) $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$,

где n — любое натуральное число.

6. Сумма кубов n первых чисел натурального ряда равна $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

7. Для любого натурального числа n справедливо равенство

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

8. $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \ldots + n(3n+1) = n(n+1)^2$, где n — любое натуральное число.

9. Для любого натурального n

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

10. Для любых натуральных n и p имеет место равенство

$$1 \cdot 2 \ldots p + 2 \cdot 3 \ldots p(p+1) + \ldots + n(n+1) \ldots (n+p-1) = \frac{n(n+1)(n+2) \cdots (n+p)}{p+1}.$$

11. При натуральном n справедливо равенство

$$2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + \ldots + n(n-1)^2 + (n+1)n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{1 \cdot 3 \cdot 4}.$$

12. При $x \neq 1$ и натуральном n справедливы тождества:

а) $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$;

б) $x + 2x^2 + \ldots + nx^n = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}$.

13. $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$, где n — любое натуральное число.

14. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$, где n — любое натуральное число.

15. $k! + k \cdot k! + (k+1)(k+1)! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)!$, где n и k — натуральные числа, $n \geqslant k$.

16. $(n+1)(n+2)\ldots(n+n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \ldots (2n-1)$, где n — любое натуральное число.

17. При любом натуральном n справедливо тождество

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \ldots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

18. $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \ldots \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right] = \frac{n+2}{2n+2}$, где n — натуральное число.

19. Если n — натуральное число, то

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

20. При натуральном n

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

21. При натуральном n

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

22. При натуральном n

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}.$$

23. При натуральном n справедливо тождество

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

24. При натуральном n

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right].$$

25. При натуральном n

$$\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{2}{3\cdot5\cdot7}+\ldots+\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=$$
$$=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}.$$

26. При любом натуральном n

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}=$$
$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right].$$

27. При любых натуральных a и n

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\ldots+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\frac{n}{a(a+n)}.$$

28. $\frac{a+1}{2}+\frac{a+3}{4}+\frac{a+7}{8}+\ldots+\frac{a+2^n-1}{2^n}=$

$=\frac{(a-1)(2^n-1)}{2^n}+n$, где a и n — любые натуральные числа.

29. $\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}=1-\frac{1}{n!}$ (n — натуральное число).

30. $1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}=$

$=(-1)^n\cdot\frac{(x-1)\ldots(x-n)}{n!}$ при действительном x и натуральном n

31. $\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\ldots+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$

при натуральном n и $n=0$; $|x|\neq1$.

32. $\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\frac{x^4}{1-x^8}+\ldots+\frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x-x^{2^n}}{1-x^{2^n}}$

при натуральном n и $n=0$; $|x|\neq1$.

Применение метода математической индукции к решению вопросов делимости чисел

33. Доказать, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

34. Доказать, что при любом целом n:

а) $n^3 + 5n$	делится	на	6;
б) $n^3 + 11n$	»	»	6;
в) $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$	»	»	24;
г) $n^6 - 3n^5 + 6n^4 - 7n^3 + 5n^2 - 2n$	»	»	24.

35. Доказать, что при любом целом неотрицательном n:

а) $7^n + 3n - 1$	делится	на	9;
б) $4^n + 15n - 1$	»	»	9;
в) $3^{2n+2} - 8n - 9$	»	»	64;
г) $3^{2n+1} + 40n - 67$	»	»	64;
д) $2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4$	»	»	25;
е) $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$	»	»	11.

36. Доказать, что при любом целом неотрицательном n справедливы утверждения (знак «$\vdots$» означает «делимость нацело»):

а) $7^{n+2} + 8^{2n+1} \vdots 57$;

б) $11^{n+2} + 12^{2n+1} \vdots 133$;

в) $2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2} \vdots 17$;

г) $2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1} \vdots 37$;

д) $3^{3n+2} + 5 \cdot 2^{3n+1} \vdots 19$;

е) $3^{2n+2} \cdot 5^{2n} - 3^{3n+2} \cdot 2^{2n} \vdots 1053$.

37. Доказать, что при целом четном m, при натуральном четном (или равном 0) n справедливы утверждения:

а) $m^3 + 20m \vdots 48$;

б) $20^n + 16^n - 3^n - 1 \vdots 323$.

38. Доказать: а) число $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \ldots + 7^n$ делится на 100 при любом натуральном n, кратном 4;

б) чтобы число $9^n - 1$ делилось на 10^k, достаточно условия: $n = 10^{k-1}$, где k — натуральное число, большее единицы.

39. Доказать, что при любом целом a число $a^7 - a$ делится на 42.

40. Доказать, что при любом целом a и простом p число $a^p - a$ делится на p; если числа a и p взаимно простые, то $a^{p-1} - 1$ делится на p (малая теорема Ферма).

41. Доказать: число $a^{4n+1} - a$ делится на 30 при любом целом a и целом неотрицательном n.

42. При любом целом a и целом неотрицательном n числа a и a^{4n+1} оканчиваются одной и той же цифрой.

Применение метода математической индукции к решению разных задач

43. Доказать, что сумма членов каждой горизонтальной строки данной таблицы равна квадрату количества чисел в ней:

1
2, 3, 4,
3, 4, 5, 6, 7
4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
. . . .

44. Ряд чисел 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., первые два члена которого 0 и 1, а каждый следующий получается от сложения двух предыдущих, называется рядом Фибоначчи или рядом Ламе. Обозначив через a_0, a_1, a_2, ... соответственно первый, второй и т. д. члены этого ряда, доказать справедливость следующих равенств:

а) $a_{n+1} = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + 1$;

б) $a_0 + a_2 + \ldots + a_{2n} - (a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1}) = a_{2n-1} - 1$;

в) $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \pm 1$;

г) $a_{n+p-1} = a_{n-1} \cdot a_{p-1} + a_n \cdot a_p$;

д) $a_{2k+1} = a_k^2 + a_{k+1}^2$.

45. Доказать, что число, состоящее из 3^n единиц, делится на 3^n.

46. Дано: $y_1 = \frac{3}{8}$, $y_n = \frac{3}{8} + \frac{y_{n-1}^2}{2}$. Доказать: $y_{n-1} < y_n < \frac{1}{2}$.

47. Дано: $a_{n+1} = a_1 \cdot a_n - a_0 \cdot a_{n-1}$; $a_0 = 2$, $a_1 = 3$. Доказать:

$$a_n = 2^n + 1.$$

48. Дана последовательность натуральных чисел u_n, для которой $u_1 = 1$, $u_k = u_{k-1} + k$. Доказать: $u_n + u_{n+1} = (n+1)^2$.

49. а) Имеются два числа a и b. Составим последовательность пар чисел a, b; a_1, b_1; a_2, b_2; ... ; a_n, b_n; ... по следующему закону:

$$a_1 = \frac{a+b}{2};\quad a_2 = \frac{a_1+b_1}{2};\ \ldots$$

$$b_1 = \frac{a_1+b}{2};\quad b_2 = \frac{a_2+b_1}{2};\ \ldots$$

Доказать:

$$a_n = a + \frac{2}{3}\left(b-a\right)\left(1-\frac{1}{4^n}\right);\ b_n = a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4^n}\right).$$

б) Числа последовательности a_1, a_2, ..., a_n определяются следующими условиями: $a_0 = a$, $a_1 = b$, $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$.

Доказать: $a_n = \frac{a+2b}{3} + (-1)^{n-1}\frac{b-a}{3\cdot 2^{n-1}}$.

50. а) Последовательность задана рекуррентной формулой:

$$a_n = a_{n-1}\cos x + \cos(n-1)x,\quad n \geqslant 2.$$

Найти общий член, если $a_1 = 1$.

б) Последовательность задана рекуррентной формулой:

$$a_n = 2a_{n-1}\cos x - a_{n-2},\quad n \geqslant 3.$$

Найти общий член, если $a_1 = 1$, $a_2 = 2\cos x$.

51. Доказать: каковы бы ни были произвольные натуральные числа m, n, k, существует натуральное число N такое, что

$$(\sqrt{m+n}-\sqrt{m})^k = \sqrt{N+n^k}-\sqrt{N}.$$

52. Доказать тождество

$$(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^{2^{n-1}}) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{2^n-1}.$$

53. Доказать:

$$(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^n) + x(1-x^2)\ldots(1-x^n) +$$
$$+x^2(1-x^3)\ldots(1-x^n) + \ldots + x^k(1-x^{k+1})\ldots(1-x^n) + \ldots +$$
$$+x^{n-1}(1-x^n) + x^n = 1.$$

54. Доказать тождество

$$1 + \frac{1}{a_1} + \frac{a_1+1}{a_1a_2} + \frac{(a_1+1)(a_2+1)}{a_1a_2a_3} + \ldots + \frac{(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_n+1)}{a_1a_2\ldots a_{n+1}} =$$
$$= \frac{(a_1+1)\ldots(a_{n+1}+1)}{a_1a_2\ldots a_{n+1}},$$

где $a_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n, n+1$.

55. Дано: $\alpha + \beta = m$, $\alpha\beta = a$; $A_2 = m - \frac{a}{m-1}$,

$$A_3 = m - \cfrac{a}{m - \cfrac{a}{m-1}},\quad A_4 = m - \cfrac{a}{m - \cfrac{a}{m - \cfrac{a}{m-1}}},\ \dots$$

$$A_{k+1} = m - \frac{a}{A_k}\ (m \neq 1;\ \alpha \neq \beta;\ k > 1).$$

Доказать, что $A_n = \frac{(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) - (\alpha^n - \beta^n)}{(\alpha^n - \beta^n) - (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})}$.

56. Доказать, что при натуральных значениях k и n число $k^{n+2} + (k+1)^{2n+1}$ делится на число $k^2 + k + 1$.

57. Доказать, что если n — нечетное число, то

$$1 + \frac{n-1}{n-2} + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)} + \dots + \frac{(n-1)(n-3)\dots 2}{(n-2)(n-4)\dots 1} = n.$$

58. Зная, что число $(p-1)! + 1$ делится на p тогда и только тогда, когда p — простое число (теорема Вильсона), доказать, что $n!\,[p-(n+1)]! + (-1)^n$ $(0 \leqslant n \leqslant p-1)$ делится на p тогда и только тогда, когда p — число простое.

59. Доказать, что если число $A_k = 7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{7}}}}}$ составлено из k семерок, то $A_n - A_p$ делится на 34 300 при n и p, не меньших 2.

60. Даны n монет одинакового достоинства, среди которых имеется одна фальшивая, отличающаяся весом. Доказать, что если $n \leqslant 3^k$, то достаточно k взвешиваний на чашечных весах, чтобы обнаружить фальшивую монету.

§ 2. ДЕЙСТВИЯ НАД ЦЕЛЫМИ ЧИСЛАМИ

Зависимость между компонентами и результатом арифметических действий

61. Доказать: если одно из слагаемых a суммы умножить на натуральное число k, то сумма увеличится на число, равное данному слагаемому, умноженному на $k-1$, т. е. на $a(k-1)$; если одно из слагаемых a суммы разделить на натуральное число k, то сумма уменьшится на число, равное данному слагаемому, деленному на k и умноженному на $k-1$, т. е. на $(a:k)(k-1)$; если уменьшаемое увеличить в k раз, то разность увеличится на число, равное уменьшаемому, умноженному на $k-1$; если вычитаемое увеличить в k раз, то разность уменьшится на число, равное вычитаемому, умноженному на $k-1$.

62. Установить, как изменится разность, если уменьшаемое уменьшить в k раз; если вычитаемое уменьшить в k раз; если уменьшаемое и вычитаемое увеличить (или уменьшить) в одно и то же число раз.

63. Установить, как изменится произведение двух множителей, если один из них увеличить в несколько раз, а другой уменьшить во столько же раз; если один из них увеличить в k раз, другой уменьшить в n раз; если один из них уменьшить (или увеличить) на несколько единиц.

64. Установить, как изменится частное, если делимое увеличить в несколько раз; если делитель уменьшить (или увеличить) в несколько раз; если делимое увеличить в несколько раз, а делитель уменьшить во столько же раз.

65. Установить, как изменится остаток (при делении с остатком), если делимое и делитель увеличить (или уменьшить) в одно и то же число раз.

66. Доказать, что если делимое (при делении с остатком) есть сумма нескольких чисел, то остаток от деления этой суммы на некоторое число не изменится, если уменьшить или увеличить одно или несколько слагаемых на число, кратное делителю.

67. Доказать, что если делимое (при делении с остатком) есть произведение нескольких чисел, то остаток от деления этого произведения на некоторое число не изменится, если уменьшить или увеличить один из множителей на число, кратное делителю.

68. Доказать, что при делении большего числа на меньшее делимое всегда больше двойного остатка.

69. а) Какое число можно прибавить к делимому (при делении с остатком), чтобы частное не изменилось?

б) Какие числа можно прибавить одновременно к делимому и делителю (при делении с остатком), чтобы частное не изменилось?

70. При каком условии деление числа A (с остатком) на два последовательных числа a и $a+1$ дает в частном одно и то же число?

Некоторые приемы умножения

Доказать (№ 71—81):

71. Чтобы двузначное число умножить на 9, достаточно из данного числа вычесть число десятков, увеличенное на единицу, и к результату приписать дополнение числа единиц до 10.

72. Чтобы двузначное число умножить на 99, достаточно уменьшить это число на единицу и к результату приписать дополнение данного числа до 100 (двумя цифрами).

73. Чтобы двузначное число, сумма цифр которого меньше 10, умножить на 11, достаточно между цифрами десятков и единиц вставить сумму десятков и единиц.

74. Чтобы двузначное число, сумма деся
го не меньше 10, умножить на 11, достаточн
ков, увеличенной на единицу, и цифрой ед
суммы десятков и единиц над 10.

75. а) Чтобы перемножить два двузначных числа, последняя цифра которых 1, а сумма цифр десятков меньше 10, достаточно перемножить цифры десятков и к этому произведению приписать сумму цифр десятков и единицу; б) чтобы перемножить два двузначных числа, последняя цифра которых 1, а сумма цифр десятков не меньше 10, достаточно к произведению цифр десятков, увеличенному на 1, приписать избыток суммы цифр десятков над 10 и единицу.

76. Чтобы найти произведение двух двузначных чисел, у которых цифры десятков разнятся на 1, а сумма цифр единиц равна 10, достаточно взять большее из чисел, возвести в квадрат цифру десятков, вычесть единицу и к результату приписать дополнение до 100 квадрата цифры единиц.

77. Чтобы вычислить произведение двух двузначных чисел, у которых: а) одинаковы цифры единиц или десятков, а сумма цифр десятков или единиц равна 10; б) цифры одного числа одинаковы, а сумма цифр другого числа равна 10, достаточно произведение цифр десятков сложить с повторяющейся цифрой и к результату приписать двумя цифрами произведение цифр единиц.

78. Чтобы умножить нечетное число на 15, достаточно к этому числу прибавить частное от деления этого числа, уменьшенного на 1, на 2 и к результату приписать цифру 5.

79. Чтобы четное число умножить на 15, достаточно к этому числу прибавить частное от деления его на 2 и к результату приписать 0.

80. Чтобы умножить число на 25, достаточно найти частное от деления этого числа на 4 и к результату приписать 00; 25; 50 или 75 в зависимости от того, равен ли остаток соответственно 0, 1, 2, 3.

81. Чтобы двузначное число умножить на 101, достаточно приписать справа к данному числу само это число.

Признаки делимости

82. Дано трехзначное число, цифры которого суть последовательные натуральные числа. Если составить новое число, цифры которого взяты в обратном порядке, то разность между большим и меньшим из этих чисел делится на 198. Доказать.

83. Доказать, что разность между трехзначным числом и числом, составленным из этих же цифр, но взятых в обратном порядке, делится на 9.

84. Доказать, что всякое трехзначное число, написанное одинаковыми цифрами, делится на 37.