Argyris
Mlejnek

DIE METHODE DER FINITEN ELEMENTE

Band II

Vieweg

John Argyris, F. R. S.
Hans-Peter Mlejnek

DIE METHODE DER FINITEN ELEMENTE

in der elementaren Strukturmechanik

Band II

Kraft- und gemischte Methoden, Nichtlinearitäten

Mit 335 Abbildungen

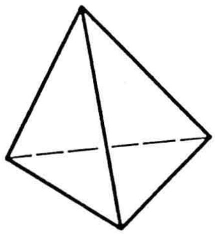
Friedr. Vieweg & Sohn Braunschweig/Wiesbaden

1987

Satz: Friedr. Vieweg & Sohn, Wiesbaden
Druck: Lengericher Handelsdruckerei, Lengerich
Buchbinderische Verarbeitung: Hunke + Schröder, Iserlohn
Printed in Germany

ISBN 3-528-08920-2

DIE METHODE DER FINITEN ELEMENTE
in der elementaren Strukturmechanik



Band I
Verschiebungsmethode in der Statik

Band II
Kraft- und gemischte Methoden, Nichtlinearitäten

Band III
Einführung in die Dynamik

John Argyris, F. R. S.
Hans-Peter Mlejnek

DIE METHODE DER FINITEN ELEMENTE

Band II

"Diversité, c'est ma devise"
La Fontaine

Weitgespanntes Hängedach über Olympiastadion München (1972).

Theorie und nichtlineare Computer-Analyse wurden (vor mehr als 16 Jahren!) mit über 11 000 Unbekannten am Institut für Statik und Dynamik (Stuttgart) – jetzt Institut für Computer-Anwendungen – in wenigen Wochen erstellt.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung zu Band II

"I am constant as the northern star."
Shakespeare

Rückblick und Vorschau

Im Mittelpunkt unserer Betrachtungen standen und stehen *de facto* die 15 linearen Differentialgleichungen der Elastizitätstheorie, die Cauchy bereits 1822 für isotropes Material aufgestellt hatte. Lange Zeit hatte die Elastizitätstheorie im wesentlichen theoretischen Charakter, und ihre Kenntnis war in der Praxis nur wenig verbreitet und anwendungsgeeignet. In diesem Jahrhundert erforderte die Theorie der Tragwerke, anknüpfend an den Innovationsschub des industriellen Zeitalters im Bauingenieurbereich sowie im Maschinen- und Fahrzeugbau, eine erhöhte Genauigkeit in der Spannungsberechnung. Streng analytische Lösungen der Elastizitätsprobleme waren aber nur in den einfachsten Fällen aufstellbar. Dies trifft auch heute zu und wird so verbleiben. Als Konsequenz dieser Situation stellte sich ein Trend zu verschiedensten Näherungsverfahren in der Praxis ein. Die Elastizitätstheorie gehörte aber nun zum Standardrepertoire der hohen Ingenieurschulen, und die Diskussion praktischer Probleme stand im Vordergrund. Diese Entwicklung wurde eingeschränkt (oder sogar besser: eingeengt) durch die begrenzte Rechenkapazität des Menschen und der mechanischen Rechenmaschine. Nun stiegen ab 1940 die Anforderungen durch explosive Entwicklungen in der Luft- und Raumfahrt erneut an. Zugleich stellte sich gegen Ende des Zweiten Weltkrieges als „*deus ex machina*" der elektronische Rechner ein und mit ihm eine computergerechte Umgestaltung der Theorie, die wohl als die umfangreichste in der Geschichte der Mechanik gelten kann. Welcher gewaltige Wissensumfang in nur 2 bis 3 Jahrzehnten auf diesem Sektor angehäuft wurde, dafür ist unser Band I nur ein bescheidener (wenn auch vom Umfang her ein beweiskräftiger) Beleg. Wir haben in diesem ersten Band in der Einleitung (Kapitel 1) zunächst die umwälzende Rolle des Computers in der Mechanik beleuchtet und den Entwicklungsstand der Finite-Elemente-Technik, die die theoretische Voraussetzung der geistigen Revolution bildet, dargestellt Obwohl die Entwicklung auf dem Gebiet der Festkörpermechanik hier weitgehend als abgeschlossen gelten kann, ist zu berücksichtigen, daß ein Buchmanuskript leider ein statisches Gebilde ist. Allein die Entstehungszeit dieses Werkes hat ausgereicht, um die hier angesprochenen Grenzen bereits wieder zu verschieben.

Auf die hoffentlich anregende, aber doch wenig belastende Lektüre der Einleitung folgt der Einstieg in die klassische Theorie der Festkörpermechanik (Kapitel 2). Die Frage, warum wir uns hier nochmals mit Stoff beschäftigen, den Cauchy vor mehr als 150 Jahren erarbeitet hat, ist rasch zu beantworten: der Computer hat nicht nur zu neuen Lösungskonzepten geführt, sondern auch zu einer neuen Darstellung der klassischen Theorie in Matrizenform, die dem Wesen des Rechnens am besten entspricht. Neben den klassischen Grundpfeilern der Elastizitätstheorie – wie Verträglichkeit, Gleichgewicht und Materialgesetz – besprechen wir in diesem Kapitel den Begriff der virtuellen Arbeit und damit verknüpfte virtuelle Arbeitsprinzipien. Diese bilden die Grundlage aller modernen, computerorientierten Rechenverfahren.

Eine Stufe tiefer in die Materie dringt Kapitel 3 ein. Hier widmen wir uns einem sepziellen Arbeitsprinzip, nämlich dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen (P.V.V.) und dem daraus abgeleiteten Einheitsverschiebungsgesetz (E.V.G.). Heute verstehen wir unter der Finite-Elemente-Methode – in der praktischen Anwendung – die Verschiebungsmethode, die die weiteste Verbreitung erfahren hat. Die beiden oben erwähnten Prinzipien bilden dafür die Grundlage. Interessant dabei ist, daß dieses P.V.V. nicht nur die Basis eines computerorientierten Berechnungsverfahrens ist, sondern durchaus auch dazu geeignet ist, auf klassischen analytischen Pfaden zu wandeln. Dies demonstrieren wir an einigen einfachen Beispielen und wiederlegen damit zugleich die etwas abwertende Einstufung des Gebietes als „Näherungsverfahren". Aufbauend auf dem E.V.G. führen wir schließlich den Begriff der Steifigkeitsmatrix ein und wenden ihn auf einige klassische Aufgaben an. Den Abschluß des Kapitels 3 bildet die computerorientierte Entwicklung der Verschiebungsmethode bei diskreten Tragwerken und die in der Praxis sehr wichtige Behandlung von Modifikationen zu bereits berechneten Tragwerken. Das letztgenannte Gebiet dürfte im CAD-Bereich heute wieder an Aktualität gewinnen.

Kapitel 4 des ersten Bandes ist das Komplement zu Kapitel 3. Hier greifen wir das duale Prinzip der virtuellen Kräfte (P.V.K.) und das daraus abgeleitete Einheitslastgesetz (E.L.G.) auf und leiten die Grundlagen der Kraftmethode ab. Wiederum werden diskrete Tragwerke diskutiert und auch Modifikationen behandelt. Der Tenor der Anwendungen liegt dabei im Luftfahrtbereich, in dem die Kraftmethode vor einem Vierteljahrhundert große Bedeutung hatte.

Den großen Einstieg in die Verschiebungsmethode und die Konzipierung finiter Elemente bietet Kapitel 5. Hier wird einmal auf der Basis der natürlichen Methode – einem unserer Schule typischen, geometrisch und kinematisch ausgerichteten Denkprozeß – die Simplexfamilie Stab – Dreieck – Tetraeder entwickelt, die eine allgemeine Grundlage aller anderen finiten Elemente in unserer Theorie bildet und zugleich zur Entwicklung einer natürlichen Elastizitätstheorie führt. Von den finiten Simplexelementen kommen wir über eine Miniaturisierung zu den Subelementen oder Mikrobausteinen der eigentlichen Elemente, und aus diesen können beliebige höherrangige finite Elemente – wie gekrümmte Dreiecke, Vierecke, Pentaeder und Hexaeder – im zwei- und dreidimensionalen Bereich aufgebaut werden.

Die im Kapitel 5 erarbeiteten finiten Elemente gestatten es, komplexe Tragwerke – wie das Überschallflugzeug Concorde, die Weltraumrakete Ariane oder Atomreaktoren – zu diskretisieren, d.h. in die standardisierten finiten Elemente zu zerlegen. Die Eigenschaften eines solchen Elementes werden in einem entsprechenden Elementprogramm niedergelegt. Der Rechner übernimmt dann die gewaltige Aufgabe, das Gleichungssystem auf Grund des Programms automatisch aufzustellen. Dieses simuliert das Tragwerksverhalten und wird mit Hilfe des Computers aufgelöst. Dabei sind im linearen Bereich 150 000 Unbekannte keine Seltenheit (mancher von uns hatte in der Schule schon mit 3 Unbekannten seine Mühe!).

In Kapitel 6 diskutieren wir die Alternativen zur Lösung solcher Systeme und bedenken dabei auch die Grenzen der Computerleistung. Finite-Elemente-Analysen ohne Fehlerbetrachtung liefern quasi ein delphisches Orakel. Nichts ist unangebrachter, als den vom Computer gelieferten Zahlen blindlings zu vertrauen. Neben den direkten Lösungsverfahren mit der heute dominanten Methode von Cholesky oder der eleganten natürlichen Faktormethode diskutieren wir auch selbstkorrigierende Iterationsverfahren.

Das 7. Kapitel des ersten Bandes ist zwei Spezialgebieten der Verschiebungsmethode gewidmet. Viele technisch bedeutsame Tragwerke sind, wenigstens mit guter Näherung, rotationssymmetrisch. Da dreidimensionale Analysen aufwendig und damit teuer sind, ist es sehr interessant, durch Berücksichtigung der speziellen Tragwerksform auf eine zweidimensionale Berechnungsweise zurückzufinden. Dabei muß die Belastung nicht notwendigerweise rotationssymmetrisch sein, da wir allgemeine Belastungen in Fourierreihen entwickeln können. Das Kapitel 7 schließt mit einem Grenzfall ab, den zyklisch symmetrischen Tragwerken. Wir sprechen deshalb von Grenzfall, weil wir einerseits – von den rotationssymmetrischen Tragwerken her kommend – einen weiteren Schritt zur dreidimensionalen Berechnung vollziehen, andererseits lassen sich solche Tragwerke – vom Dreidimensionalen her kommend – auch effektiv mit der Unterstrukturtechnik des Kapitels 6 behandeln. Der Inhalt des Kapitels 7 ist in den ASKA-Prozessoren HS (rotationssymmetrisch) und CS (zyklisch-symmetrisch) mit entsprechenden Programmen niedergelegt.

Der erste Band schließt im 8. Kapitel mit einer elementaren Behandlung von Platten und Schalen. Dies ist ebenfalls ein wichtiges Sondergebiet der Verschiebungsmethode, das lange Zeit ein Sorgenkind der Finite-Elemente-Technik bildete. Selbst bis heute sind einige Aspekte der praktischen Anwendung trotz der enormen Weiterentwicklung noch nicht ganz befriedigend gelöst. Dabei haben sich führende Forscher längst neuen Zielen zugewandt. Wir besprechen im Rahmen des 8. Kapitels zunächst eine computergerechte Formulierung der Plattentheorie, einschließlich ihrer natürlichen Darstellung. Dann diskutieren und entwickeln wir einige der zahllosen Plattenelemente, einschließlich ihrer potentiellen Anwendung auf Schalen. Den Schlußstein bildet die Erfassung rotationssymmetrischer Schalen.

Damit endet unsere Rückschau und wir stehen am Beginn des zweiten Bandes unseres Werkes: „Die Methode der Finiten Elemente“. Hier wenden wir uns von der traditionellen linearen Analyse mit der Verschiebungsmethode ab und behandeln Themen, die entweder Alternativen oder neue Anwendungsmöglichkeiten bilden.

Der Reigen wird eröffnet mit der Behandlung inkompressibler Körper (Kapitel 9), die sich zunächst einmal dem Griff der „normalen“ (sprich: üblicherweise implementierten) Verschiebungsmethode entziehen. Wir diskutieren das spezielle Materialverhalten, die Existenz von Lösungen in der Tragwerksanalyse, die Problematik der Lösungsverfahren und Wege, die auch mit traditionellen Finite-Elemente-Systemen – insbesondere in Verbindung mit einem hocheffektiven Iterationsverfahren – beschritten werden können.

In Kapitel 10 greifen wir den Faden wieder auf, der in Kapitel 4 endete, und diskutieren erneut die Kraftmethode. Dieses Verfahren nahm einst, wie schon erwähnt, für die Computeranalyse von Luft- und Raumfahrtstrukturen einen ersten Rang ein, wurde dann aber rasch von der einfacher anzuwendenden und leichter automatisierbaren Verschiebungsmethode verdrängt. Seit dieser Entwicklung zu Beginn der 60er Jahre hat es immer wieder Versuche gegeben, die Kraftmethode zu aktualisieren. Der große Durchbruch ist allerdings noch nicht erfolgt, weil das Volumen der in die Verschiebungsmethode investierten Leistungen einfach zu groß ist. Man bedenke, daß allein die Implementation in ASKA über 250 Mannjahre Arbeit erfordert hat. Ein Mehrfaches dieses Aufwandes steckt aber in der weltweiten theoretischen Entwicklung der Verschiebungsmethode.

Trotz dieser erwiesenermaßen schlechten Aussichten für die Kraftmethode haben wir versucht, die Bruchstücke der Weiterentwicklung zu sammeln und möglichst aktuell darzustellen.

Eine weitere Alternative zur Verschiebungsmethode bietet Kapitel 11, das gemischte Ansätze diskutiert. Insbesondere auf dem schwierigen Gebiet der Platten und Schalen ist hier ein Nutzeffekt von Bedeutung zu verzeichnen. Zudem eröffnet die Diskussion den Blick für eine allgemeinere Beurteilung des P.V.V. und P.V.K. im Sinne einer Integralformulierung der Differentialgleichungen der Elastizitätstheorie. Wir stellen fest, daß die Entwicklung gemischter finiter Elemente teils in den formalen Rahmen der klassischen Verschiebungsmethode paßt, teils aber auch nicht. Entsprechend der vorhandenen Software blieb der praktische Erfolg der erstgenannten Variante vorbehalten. Den Stoff der Kapitel 10 bis 12 hat der Seniorautor am Imperial College in den Jahren 1967 bis 1972 auszugsweise vorgetragen.

Die ersten elf Kapitel dieses Werkes befassen sich ausschließlich mit der linearen Strukturmechanik. Wir müssen aber heute, auch in einem elementaren Lehrbuch wie dem vorliegenden, zumindest einige Grundprinzipien nichtlinearen Verhaltens zu erhellen versuchen. Nichtlineares Materialverhalten bei kleinen Verschiebungen zählt zu den nichtlinearen Phänomenen, die relativ früh erfaßt und implementiert wurden. Wir diskutieren dieses Gebiet, das auch die Plastizitätstheorie umfaßt, in Kapitel 12 und verwenden als Einstieg eine ganz elementare Behandlung (Abschnitt 12.1), einschließlich des Traglastverfahrens. In der Folge erarbeiten wir die mehrdimensionalen Werkstoffmodelle in steigenden Schwierigkeitsstufen, um dann die Berechnungsverfahren bei Elastoplastizität zu besprechen.

Den Abschluß des zweiten Bandes bildet das 13. Kapitel, das wir als Komplement des 12. Kapitels ansehen können. Wir behandeln hier geometrisch nichtlineare Probleme, wobei die Verschiebungen groß, die Dehnungen aber noch immer klein sind. Nach einer ersten Einführung auf sehr elementarer Basis entwickeln wir zunächst alle Grundlagen, sprich Differentialgleichungen und Arbeitsprinzipien, in voller Allgemeinheit, d.h. auch für große Dehnungen. Bei der Entwicklung sogenannter geometrischer Elementsteifigkeiten, die aus der Nichtlinearität des Verformungsvorganges resultieren, beschränken wir uns auf kleine Dehnungen. Wir behandeln dabei die Simplexfamilie, Balken, Platten und einfache Schalen. Eine besondere Rolle nimmt bei den letztgenannten Elementen die Diskussion von Drehfreiheitsgraden ein, wenn große Rotationen auftreten. Der zweite Band schließt mit einer kurzen Diskussion der nichtlinearen Berechnungsverfahren.

An dieser Stelle sei dem Senior-Autor eine persönliche Bemerkung erlaubt. Der interessierte Leser wird in der Zwischenzeit aufgenommen haben, welch elegantes und effizientes Werkzeug ihm nicht nur im linearen, sondern auch im nichtlinearen Bereich mit der natürlichen Methode zur Verfügung gestellt wird. Die Vereinfachungen in der Argumentation, besonders im nichtlinearen Bereich, sind mehr als beeindruckend und haben sich in der Praxis sehr bewährt. In diesem Zusammenhang müssen auch die großen Rotationen erwähnt werden, die im Stuttgarter Institut eine konsequente Darstellung gefunden haben, was sich positiv auf die natürliche Methodik bei großen Verschiebungen ausgewirkt hat. Nun ist es so, daß die natürliche Methode schon im Winter 62/63 geboren und sofort in einer Buchveröffentlichung – sowohl für den linearen als auch für den nichtlinearen Bereich – dargestellt wurde. Über viele Jahre hinweg wurde leider die Methode manchenorts ignoriert, vielleicht, weil sie ein tieferes physikalisches Verständnis voraussetzt. Eine rühmliche Ausnahme bildet der bekannte Forscher Ted Belytschko, der die Vorteile dieser Methodik prägnant unterstrichen hat. Wie es sich in der Wissenschaft ergibt, ist nachträglich vielen die Einsicht gekommen, daß die natürliche Methodik doch ein wertvolles Werkzeug ist. Es folgte eine Reihe von Veröffentlichungen, die die natürliche Methode wieder erfinden. Das Eigenartige an diesen Entwicklungen ist nur, daß der Ursprung der Idee unbenannt bleibt.

Die ersten beiden Bände sind ausschließlich statischen Problemen gewidmet. Nun ist die Bedeutung der dynamischen Analyse – sei sie nun linear oder sogar nichtlinear – in den letzten Jahren ständig gewachsen. Da dieses Gebiet sehr umfangreich ist und sein eigenes algorithmisches Umfeld hat, haben wir diesem Sektor auch einen eigenen Band III gewidmet. Ferner ist nicht zu übersehen, daß neben Sondergebieten der Tragwerksanalyse (z.B. Umformtechnik, Optimierung) finite Elemente in Thermodynamik, Elektrodynamik, Strömungsmechanik und vielen anderen Gebieten Anwendung finden. Die Diskussion dieser Gebiete bleibt einem zukünftigen Werk vorbehalten.

In der Fertigstellung dieses Buches sind wir wieder durch die Herren Gerhard Frik und Karl Straub großzügig in dem langwierigen Korrekturprozeß, sowohl bei den Fahnenabzügen wie im Umbruchstadium, unterstützt worden. Wir haben schon in Band I die beträchtliche Unterstützung, die Maria Haase uns in der Systematisierung und subtilen Notation des Kapitels 13 über endliche Verschiebungen gegeben hat, erwähnt. Weiterhin hat Johann Doltsinis einen Vorentwurf zu Kapitel 12 beigetragen. Letztlich hat Marlies Parsons, wie schon in Band I, die Korrespondenz mit dem Verlag reibungslos bewältigt. Dem Verlag selbst danken wir nochmals für den hervorragenden Satz in diesem drucktechnisch schwierigen Werk.

9 Die Behandlung inkompressibler Körper

"Vous savez le latin, sans doute? –
Oui, mais faites comme si je ne le savais pas."
Molière

9.1. Das Materialgesetz und spezielle Definitionen für Spannungen und Dehnungen

Wir betrachten einen infinitesimalen Würfel mit den Abmessungen dx, dy und dz im nichtdeformierten Zustand (Abb. 9.1.1). Er geht im Zuge der Deformation in ein Parallelepiped über. Bei rein elastischen kleinen Dehnungen betragen die Kantenlängen im deformierten Zustand $(1+\epsilon_{xx})dx$, $(1+\epsilon_{yy})dy$ und $(1+\epsilon_{zz})dz$. Allerdings haben sich nicht nur die Kantenlängen geändert, sondern auch die Winkel zwischen den Kanten. Glücklicherweise spielt dies nur bei großen Dehnungen eine Rolle, die wir im 13. Kapitel eingehend studieren werden. Wir zeigen dies hier am Beispiel des ebenen Falles (Abb. 9.1.2). Im allgemeinen spielt der Winkel α, also die Abweichung vom Rechteck, schon eine Rolle. Bei kleinen Verschiebungen entspricht α gemäß den Ausführungen des Kapitels 2 einer Schubdehnung, die sehr klein ist. Damit ist $\cos\alpha$ mit guter Näherung 1, und wir können einfach die Rechteckformel verwenden. Wir übertragen diesen Sachverhalt auf den Würfel und erhalten als Volumenänderung

$$d(dV) = (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz})dV \tag{9.1.1}$$

und als

$$e = \frac{d(dV)}{dV} = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} \tag{9.1.2}$$

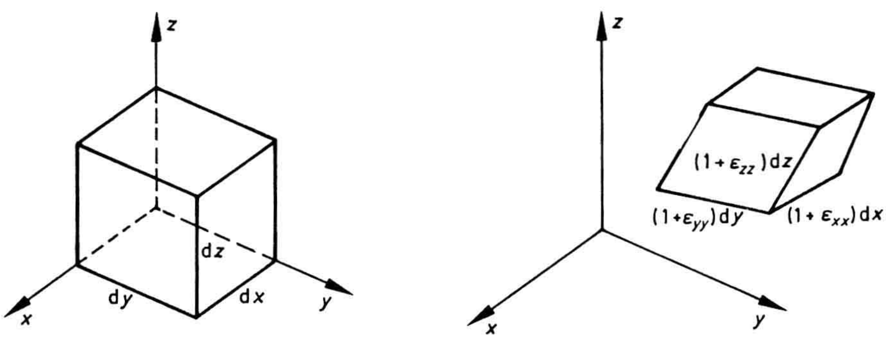


Abb. 9.1.1 Ein infinitesimales Volumenelement im nichtdeformierten und deformierten Zustand

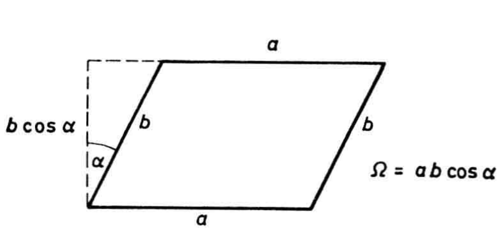


Abb. 9.1.2
Zur Berechnung des Volumens (bzw. der Fläche) im deformierten Zustand

Die Volumendehnung e besteht also einfach aus der Summe der Normaldehnungen. Sie muß bei inkompressiblem Material Null sein. Betrachten wir nun das Materialverhalten. Wir teilen dazu Dehnungen, Materialkennwerte und Spannungen in Normal-(n) und Schub-(s)anteile auf. Da wir selbstverständlich auch inkompressibles Material beliebigen Spannungszuständen aussetzen dürfen, beginnt unsere Betrachtung natürlicherweise bei der Materialflexibilität. Die Beziehung

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_n \\ \boldsymbol{\epsilon}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{nn} & \boldsymbol{\varphi}_{ns} \\ \boldsymbol{\varphi}_{ns}^{t} & \boldsymbol{\varphi}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_n \\ \boldsymbol{\sigma}_s \end{bmatrix} \tag{9.1.3}$$

ist auch für inkompressibles Material wohldefiniert. Die hierbei errechneten Dehnungen haben allerdings durchweg die Eigenschaft, daß

$$\begin{aligned} e &= [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\{\boldsymbol{\epsilon}_n \quad \boldsymbol{\epsilon}_s\} = [\boldsymbol{e}_3^{t} \quad \boldsymbol{o}_3^{t}]\{\boldsymbol{\epsilon}_n \quad \boldsymbol{\epsilon}_s\} \\ &= \boldsymbol{e}_3^{t}[\boldsymbol{\varphi}_{nn} \quad \boldsymbol{\varphi}_{ns}]\{\boldsymbol{\sigma}_n \quad \boldsymbol{\sigma}_s\} = 0 \end{aligned} \tag{9.1.4}$$

gilt. Man sagt dafür auch, daß die Dehnungen rein deviatorisch sind, also nur mit Gestalt-, nicht aber mit Volumenänderungen verknüpft sind. In dieser fortgeschrittenen Phase unseres Studiums der modernen Strukturmechanik empfiehlt es sich, eine knappe, aber elegante Matrizenformulierung immer intensiver zu pflegen. Zu diesem Zweck führen wir für den (6×1) Vektor $\{\boldsymbol{e}_3 \quad \boldsymbol{o}_3\}$ die in der Literatur etablierte Bezeichnung $\boldsymbol{e}_{3,3}$ ein,

$$\boldsymbol{e}_{3,3} = \{\boldsymbol{e}_3 \quad \boldsymbol{o}_3\} \tag{9.1.5}$$

Der erste Index in $\boldsymbol{e}_{3,3}$ bezeichnet die Anzahl der „1" und der zweite die Anzahl der „0". Im allgemeineren $\boldsymbol{e}_{\mathrm{m,n}}$ sind also m „1" und n „0" Elemente enthalten. Aus (9.1.4) folgt für den Spannungszustand $\boldsymbol{\sigma}_s = \boldsymbol{o}_3$, $\boldsymbol{\sigma}_n$ beliebig

$$\boldsymbol{e}_3^{t}\boldsymbol{\varphi}_{nn} = \boldsymbol{o}_3^{t} \tag{9.1.6}$$

Andererseits ergibt sich für $\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{o}_3$ und $\boldsymbol{\sigma}_s$ beliebig

$$\boldsymbol{e}_3^{t}\boldsymbol{\varphi}_{ns} = \boldsymbol{o}_3^{t} \tag{9.1.7}$$

Bei inkompressiblem Material ist also die Summe der ersten 3 Zeilen (3 Spalten) der Materialflexibilität eine (6×1) Nullmatrix. Wir haben somit eine linear abhängige Zeile (Spalte). Die Matrix $\boldsymbol{\varphi}$ ist somit singulär. Wir hatten bereits im Kapitel 2 darauf hingewiesen, daß dieser Fall bei isotropem Material für $\nu = 0.5$ auftritt (dreidimensional). Damit ist auch klar, daß es vergebliche Mühe ist, die Umkehrung der Beziehung (9.1.3) zu suchen. Eine Materialsteifigkeit existiert für ein inkompressibles Material nicht. Wir können die Spannungen nicht aus bekannten Dehnungen ausrechnen. Dies ist natürlich in der Verschiebungsmethode ein Problem, denn dort benötigen wir normalerweise eine solche Materialsteifigkeit. Aus den soeben gefundenen Relationen (9.1.6) und (9.1.7) folgt eine weitere interessante Eigenschaft für beliebiges lineares inkompressibles Material. Wir lassen dazu eine sogenannte hydrostatische Spannung

$$\boldsymbol{\sigma}_H = \sigma_H\{\boldsymbol{e}_3 \quad \boldsymbol{o}_3\} = \sigma_H\,\boldsymbol{e}_{3,3} \tag{9.1.8}$$