G. BRUHAT ▪▪▪ COURS DE PHYSIQUE GÉNÉRALE

MÉCANIQUE

SIXIÈME ÉDITION
REVUE & COMPLÉTÉE
(DEUXIÈME TIRAGE)

par

A. FOCH

Masson & Cie

G. BRUHAT

COURS DE PHYSIQUE GÉNÉRALE

A L'USAGE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE

MÉCANIQUE

SIXIÈME ÉDITION REVUE ET COMPLÉTÉE

(Deuxième tirage)

PAR

A. FOCH
Professeur honoraire à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris

MASSON & C^ie^, ÉDITEURS
120, BOUL^D^ SAINT-GERMAIN, PARIS-VI^e^
1967

COURS

DE

PHYSIQUE GÉNÉRALE

AVERTISSEMENT

Dans la préface qu'il rédigea en 1943 pour la quatrième édition de cette *Mécanique*, G. Bruhat avait tenu à souligner le caractère d'introduction qu'il entendait maintenir à son livre ; dans sa pensée, celui-ci devait constituer une préparation à la lecture de traités plus spécialisés, techniques ou théoriques. Aussi avait-il fallu renoncer à certains développements — portant par exemple sur la métrologie industrielle, l'acoustique technique, l'étude des oscillations de relaxation ou celle des vibrations non linéaires — tous sujets d'un intérêt certain, d'une actualité réelle, mais dont l'exposé détaillé aurait risqué d'alourdir exagérément l'ouvrage.

Pour la révision de son livre, ma conduite se trouvait dès lors dictée : Les sujets traités ayant tous gardé un caractère très classique, je me suis borné à des modifications et à des adjonctions de détail. Les unes se trouvaient en quelque sorte imposées par les nouvelles définitions internationales du mètre et de la seconde ; les autres cherchent à apporter quelques précisions élémentaires sur des points d'actualité : satellites artificiels, mesure de g par enregistrement de la chute d'un corps, aérodynamique des grandes vitesses. J'ai enfin cru utile d'ajouter un chapitre contenant quelques indications sur la Mécanique relativiste : le physicien doit en connaître l'origine essentiellement expérimentale, qui disparaît souvent sous le formalisme tensoriel ; il doit savoir avec quelle exactitude ses énoncés ont été vérifiés ; peut-être lui sera-t-il utile de trouver, condensés dans un ouvrage de caractère général, les premiers éléments d'une doctrine dont les conséquences ont transformé la Philosophie naturelle, mais dont l'accès n'est pas toujours facile.

Tous ceux qui ont approché G. Bruhat savent l'importance qu'il reconnaissait à l'énonciation exacte des unités et à la figuration correcte des symboles. Je me suis donc attaché à respecter les normes relatives à l'écriture des nombres, des unités et des grandeurs. Il avait pris une part active aux débuts de l'élaboration de certaines de ces normes, qui n'étaient pas encore définitivement fixées lorsque la Gestapo l'arrêta et l'emmena dans les camps d'où il ne devait pas revenir.

A. Foch.

AVANT-PROPOS

Ce Cours est, dans sa plus grande partie, le développement de leçons faites aux élèves de deuxième et de troisième année de l'École Normale Supérieure de Sèvres ; quelques chapitres correspondent à des conférences qui ont été faites à l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm. Son ensemble couvre la plus grande partie des phénomènes d'ordre mécanique qu'un physicien ne peut pas ignorer, et que tout le monde s'accorde à ranger dans le domaine de la Physique.

Les deux premières parties pourtant — Statique et Dynamique — correspondent à un enseignement qu'il est d'usage de confier aux mathématiciens, mais qui m'a été à peu près imposé à Sèvres par l'état actuel de l'évolution de l'Enseignement supérieur féminin. Tandis que les physiciens croient pouvoir déduire de l'expérience que les cerveaux féminins ont la même capacité que les cerveaux masculins, et tentent de s'approcher de l'idéal de l'assimilation de l'agrégation féminine à l'agrégation masculine, les mathématiciens ne croient pas pouvoir utilement initier leurs étudiantes aux programmes traditionnels de la licence ès sciences mathématiques : il nous était donc nécessaire de donner à nos Sévriennes physiciennes les notions indispensables de Mécanique Rationnelle qu'elles n'avaient point reçues avant leur spécialisation.

Je pense d'ailleurs que ce n'est pas là l'organisation idéale, et après avoir ainsi enseigné la matière d'un Cours de Mécanique Rationnelle, je crois que je suis incapable de faire cet enseignement avec la même perfection qu'un mathématicien, et je n'hésite pas à conseiller aux étudiants qui se destinent à la Physique de suivre les cours réguliers de Mécanique Rationnelle de nos Facultés. Les premiers chapitres de ce livre n'ont donc pas la prétention de remplacer un cours de Mécanique Rationnelle : je les ai tout de même conservés, parce qu'il y a de nombreux étudiants qui, comme nos Sévriennes, viennent à la Physique sans avoir eu le loisir de suivre un cours de Mécanique Rationnelle, et aussi parce qu'il peut être commode au physicien qui a quelque peu oublié son cours de Mécanique Rationnelle d'en retrouver l'essentiel dans son livre de Physique.

Et même s'il n'a pas oublié son Cours, il est peut-être bon qu'il voie ce qu'il doit en considérer comme l'essentiel, car ce n'est sans doute pas ce que le professeur mathématicien lui a enseigné avec le plus de soin. Le mathématicien pose des définitions d'une parfaite correction, et en déduit les conséquences par des raisonnements d'une absolue rigueur : il importe que nos étudiants soient dressés à ce type de raisonnement, mais il importe encore plus qu'ils se rendent compte que la rigueur mathématique n'est possible que lorsqu'on a renoncé à se demander à quel point les définitions choisies correspondent aux phénomènes réels. Le physicien ne choisit pas les objets qu'il veut définir, ils se présentent à lui parmi mille autres, et sa définition se ressent forcément de la complexité du monde réel et de notre incapacité à en saisir l'ensemble. La différence des deux points de vue apparaît bien par exemple dans la définition de la force : la plupart des Cours de Mécanique Rationnelle réduisent la notion de force à un concept purement géométrique, à peu près dépourvu de tout sens physique ; pour le physicien, cette notion est au contraire la notion primordiale, qui s'impose dès qu'il entreprend l'étude des phénomènes, et la première tâche qu'il a à remplir est de reconnaître les caractères des diverses forces et de donner une définition expérimentale de leur mesure.

Il me semble donc que nos étudiants, futurs physiciens ou futurs ingénieurs, doivent connaître le point de vue de l'expérimentateur après avoir étudié celui du mathématicien : c'est pourquoi j'ai donné ici un résumé du Cours de Mécanique Rationnelle, en insistant sur la nature expérimentale des notions fondamentales, en rappelant les énoncés des théorèmes généraux, en en signalant les applications les plus directes.

La troisième partie du Livre est consacrée à la Métrologie : c'est là une partie de la Physique qui a presque disparu de l'enseignement en France depuis qu'elle n'est plus au programme de la classe de Spéciales. Il y a certainement là une erreur : le physicien et l'ingénieur ne doivent pas ignorer ce qu'est une mesure précise, et ils doivent connaître les exemples fondamentaux de la mesure d'une longueur ou de la mesure d'une masse.

J'ai groupé dans la quatrième Partie l'étude du pendule, de ses applications (mesure du temps, mesure de g), des oscillations pendulaires amorties et entretenues. Ce sont là des questions fondamentales pour toute la Physique ; il m'a paru plus clair de les traiter en restant constamment sur le terrain des phénomènes mécaniques ; cela ne m'a pas empêché de penser constamment aux applications que les calculs que je developpais pouvaient avoir en Électricité et de les signaler à l'occasion.

La cinquième Partie est intitulée « Notions de Mécanique des fluides » : on y trouvera, après l'étude classique de l'Hydrostatique et de la Capillarité, l'étude des cas particuliers les plus simples de mouvement des fluides. Il ne saurait naturellement être question d'exposer ici l'ensemble d'une doctrine qui mérite largement un enseignement séparé : j'ai cherché à en définir clairement, sur des exemples simples, les notions fondamentales et à en mettre en évidence les difficultés d'application. Il était naturellement inutile, pour les exemples simples traités, d'écrire les équations générales de l'Hydrodynamique, qui n'auraient pu que masquer sous leur symbolisme mathématique la signification physique des notions introduites ; je les ai toutefois données comme conclusion de l'étude.

La sixième Partie — Vibrations dans les fluides — aurait pu s'appeler *Acoustique*, si je n'avais pas laissé de côté toute l'Acoustique pratique, pour les mêmes raisons qui font exclure l'Électrotechnique des cours d'Électricité. J'ai pensé surtout à ce qu'on enseigne dans une classe de Mathématiques, et j'ai cherché à en bien montrer le caractère schématique ; il m'a semblé qu'il était possible, sans développer des questions complexes comme celles du mouvement de l'air dans un tuyau sonore ou du rôle de ses parois dans la propagation du son, de marquer les difficultés qu'elles entraînent pour une étude complète. C'est pour la même raison que j'ai placé dans cette partie un chapitre sur les vagues et les rides à la surface de l'eau : elles fourniront pendant longtemps encore les seules expériences de propagation, d'interférences, de diffraction d'un mouvement vibratoire que nous puissions montrer à nos élèves, et les futurs professeurs de nos lycées doivent savoir en quoi de telles expériences fournissent un excellent schéma des ondes sonores, et en quoi elles en diffèrent profondément.

La dernière partie est consacrée à l'Élasticité et aux vibrations des solides. Je l'ai traitée dans le même esprit que les précédentes ; j'ai cherché, d'une part, à bien mettre en évidence les notions fondamentales en étudiant directement les phénomènes les plus simples et en rejetant à la fin l'écriture des équations générales, d'autre part, à bien marquer le caractère d'approximation des solutions élémentaires en signalant les phénomènes qu'elles négligent et en précisant autant que possible leur ordre de grandeur.

J'espère que ce Cours rendra service aux étudiants qui seront appelés plus tard à enseigner la Mécanique comme professeurs de Physique ou de Mathématiques, ou à l'appliquer comme ingénieurs, en leur montrant la signification physique des notions fondamentales et des équations générales. Mais je souhaiterais aussi qu'il contribue aux progrès de la recherche scientifique. Les sujets qui y sont traités ne comprennent sans doute aucune des questions de physique moderne qui passionnent aujourd'hui les jeunes chercheurs ; tous, ou presque tous, sont arrivés au point où les grandes lignes des phénomènes sont assez bien connues, et où des complications en apparence inextricables se dressent devant le chercheur qui veut résoudre les difficultés ou lever les contradictions qu'ont fait apparaître les études déjà faites. Puisse la lecture de ce Livre donner à nos jeunes physiciens ou ingénieurs l'idée de s'attaquer à ces tâches difficiles.

G. B.

Paris, août 1933.

PREMIÈRE PARTIE

STATIQUE

CHAPITRE PREMIER

NOTIONS FONDAMENTALES DE CALCUL VECTORIEL

1. Définitions. — Un vecteur est un segment de droite MN, ayant une origine M et une extrémité N. Il est défini par son origine, ou *point d'application*, M, sa *direction*, qui est celle de la droite indéfinie MN, son *sens*, qui est le sens du mouvement d'un mobile allant de M vers N, et sa grandeur, qui est la longueur MN. Cette grandeur est mesurée par un nombre arithmétique, que nous représenterons par une lettre, par exemple A ou a; nous représenterons symboliquement le vecteur par la même lettre, surmontée d'une flèche : $\vec{A}$ ou $\vec{a}$.

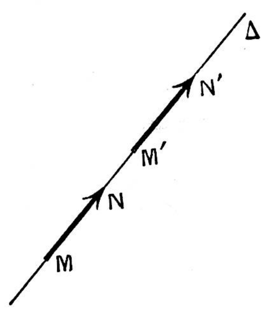

Fig. 1.

Si l'on se donne simplement la direction, le sens et la grandeur, on dit que l'on a défini un **vecteur libre** : le vecteur libre $\vec{A}$ peut être représenté par l'un quelconque de tous les segments MN, M'N', . . parallèles entre eux, de même sens et de grandeurs égales, menés à partir de tous les points M, M', ... de l'espace. Si l'on se donne en plus la droite Δ qui porte le vecteur (*fig.* 1), on dit que l'on a défini un **vecteur glissant** : le vecteur glissant $\vec{A}$ peut être représenté par l'un quelconque des segments MN, M'N', ..., égaux et de même sens, pris sur la droite Δ. Enfin, si l'on se donne le point d'application M, ce qui définit complètement la position du segment MN, on dit qu'on a défini un **vecteur lié**.

Deux vecteurs liés, d'origines différentes, sont dits **égaux** lorsqu'ils ont même direction, même sens, et même grandeur : ils représentent le même vecteur libre; s'ils sont portés par la même droite, ils représentent aussi le même vecteur glissant. Deux vecteurs liés, d'origines quelconques, sont dits **opposés** lorsqu'ils ont même direction, même grandeur, et des sens opposés; ils sont dits *directement opposés* lorsqu'ils sont portés par la même droite.

Analytiquement, un vecteur libre $\vec{A}$ est défini, par rapport à trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz, par les projections A_x, A_y, A_z sur ces axes (*fig.* 2) de l'un quelconque des segments MN qui le représentent; ces projections sont mesurées par trois nombres algébriques, dont les signes sont définis par les conventions habituelles de la Géométrie analytique, et qu'on appelle les *coordonnées* du vecteur. Si nous désignons par α, β, γ les angles que

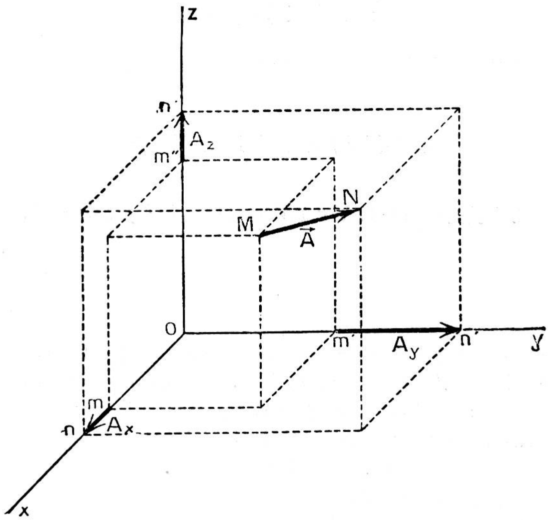

FIG. 2.

forme la demi-droite MN avec les axes de coordonnées Ox, Oy, Oz, les coordonnées A_x, A_y, A_z sont liées à la grandeur A du vecteur par les relations ;

$$A_x = A\cos\alpha, \qquad A_y = A\cos\beta, \qquad A_z = A\cos\gamma,$$

et :

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2.$$

La notation $\overrightarrow{A}$ représente la direction, le sens et la grandeur du vecteur libre : elle représente symboliquement l'ensemble des trois nombres A_x, A_y, A_z.

Pour représenter analytiquement un vecteur lié, il faut se donner, outre ses trois projections A_x, A_y, A_z, les trois coordonnées x, y, z de son point d'application. Nous reviendrons plus loin (§ 11) sur la représentation analytique d'un vecteur glissant.

I. — *OPÉRATIONS SUR LES VECTEURS LIBRES*

2. Addition. — Par définition, la **somme** d'un certain nombre de vecteurs libres $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, ..., $\overrightarrow{a_n}$ est un vecteur libre $\overrightarrow{a}$, dont on obtient la représentation ON en construisant un contour polygonal d'origine quelconque (*fig.* 3) dont les côtés OA, AB, ..., MN sont respectivement égaux aux vecteurs a_1, a_2, ..., a_n. On écrit :

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n.$$

On démontre facilement, par des considérations de Géométrie élémentaire, que cette somme n'est pas modifiée lorsqu'on intervertit l'ordre des vecteurs, ou qu'on remplace plusieurs d'entre eux par leur somme. Il est évident que la somme de deux vecteurs opposés est nulle, ce qui justifie la représentation de deux tels vecteurs par les notations $\vec{a}$ et $-\vec{a}$ $(\vec{a} + (-\vec{a}) = 0)$.

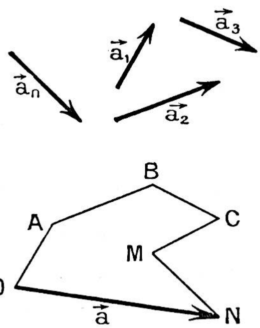

FIG. 3.

Il est évident aussi que la **différence** de deux vecteurs $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$, c'est-à-dire le vecteur $\vec{a}$ qu'il faut ajouter au second pour obtenir le premier, est égale à la somme du premier et d'un vecteur opposé au second $[\vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \vec{a}_1 + (-\vec{a}_2)]$.

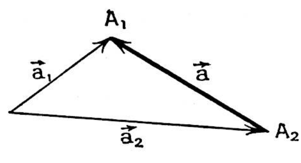

FIG. 4.

Elle s'obtient (*fig.* 4) en donnant aux deux vecteurs $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ la même origine, et est représentée par le vecteur A_2A_1 qui joint l'extrémité du second à celle du premier.

Les trois projections OM, ON, OP d'un vecteur $\vec{a}$ sur trois axes de coordonnées $Oxyz$ peuvent être considérées comme trois vecteurs $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$, portés respectivement par ces trois axes, dont les sens et les grandeurs sont définis par les trois nombres algébriques X, Y, Z. La figure 5 montre immédiatement que le vecteur $\vec{a}$ est la somme des trois vecteurs $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$:

$$\vec{a} = \vec{X} + \vec{Y} + \vec{Z}.$$

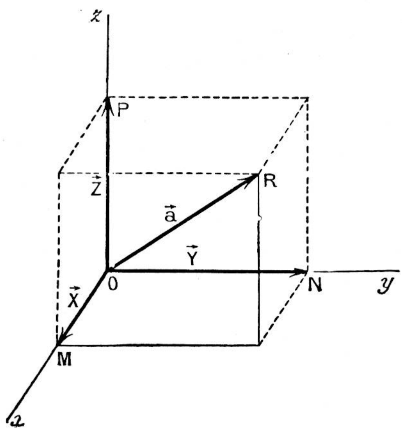

FIG. 5.

Les trois vecteurs $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$ s'appellent les trois **composantes** du vecteur $\vec{a}$.

Si nous considérons divers vecteurs $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, de composantes $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$, $\vec{Z}_1$, $\vec{X}_2$, $\vec{Y}_2$, $\vec{Z}_2$, $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$, $\vec{Z}_3$, les théorèmes généraux sur l'addition permettent d'écrire leur somme sous la forme :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{X}_1 + \vec{Y}_1 + \vec{Z}_1 + \vec{X}_2 + \vec{Y}_2 + \vec{Z}_2 + \vec{X}_3 + \vec{Y}_3 + \vec{Z}_3 \\ &= (\vec{X}_1 + \vec{X}_2 + \vec{X}_3) + (\vec{Y}_1 + \vec{Y}_2 + \vec{Y}_3) + (\vec{Z}_1 + \vec{Z}_2 + \vec{Z}_3).\end{aligned}$$

Il est évident qu'un vecteur tel que $\vec{X_1} + \vec{X_2} + \vec{X_3}$ est un vecteur porté par Ox, qui y est mesuré par le nombre $X = X_1 + X_2 + X_3$. Les trois composantes $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$ du vecteur $\vec{a}$ sont donc les sommes des composantes correspondantes des vecteurs $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, $\vec{a_3}$ **(théorème des projections)**, et l'égalité vectorielle :

$$\vec{a} = \vec{a_1} + \vec{a_2} + \vec{a_3}$$

est équivalente aux trois égalités algébriques :

$$X = X_1 + X_2 + X_3, \qquad Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 \qquad Z = Z_1 + Z_2 + Z_3.$$

3. Multiplication d'un vecteur par une quantité scalaire. — La somme de n vecteurs, tous égaux à un même vecteur $\vec{a}$, est évidemment un vecteur $\vec{b}$ ayant même direction et même sens que le vecteur $\vec{a}$, et dont la grandeur b est égale à n fois la grandeur a du vecteur $\vec{a}$. D'après les définitions habituelles, la somme $\vec{b}$ est le produit du vecteur $\vec{a}$ par le nombre entier n : on généralisera cette définition au cas d'un nombre m quelconque, entier ou non, positif ou négatif, et l'on définira le produit du vecteur $\vec{a}$, de grandeur a, par une quantité scalaire m, comme un vecteur $\vec{b}$ de même direction que $\vec{a}$, de même sens si m est positif, de sens contraire si m est négatif, et de grandeur $b = |\, m \,|\, a$.

De même, le rapport $\vec{b}/\vec{a}$ des deux vecteurs parallèles $\vec{b}$ et $\vec{a}$ est un nombre algébrique m, dont la valeur absolue est le rapport b/a des grandeurs des deux vecteurs, et qui est positif si les deux vecteurs sont de même sens, négatif si les deux vecteurs sont de sens contraires.

Les trois composantes $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$ d'un vecteur $\vec{a}$ peuvent être considérées comme les produits par les trois nombres algébriques X, Y, Z, coordonnées de ce vecteur, de trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, de grandeurs égales à l'unité, respectivement dirigés suivant les trois axes Ox, Oy, Oz, dans les sens positifs de ces axes. Ces trois derniers vecteurs sont dits les **vecteurs unitaires** des axes, et leur emploi permet d'écrire la relation entre le vecteur $\vec{a}$ et ses composantes sous la forme :

$$\vec{a} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}.$$

4. Produit scalaire. — On appelle *produit scalaire* des deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, faisant entre eux l'angle θ, et on représente par la notation :

$$m = \vec{a}\,.\,\vec{b},$$

la quantité :

$$m = a\,.\,b\,.\cos\theta,$$

qui est égale au produit de la grandeur de l'un des vecteurs par la projection de l'autre sur celui-là. La définition même montre que cette quantité n'est pas une grandeur géométrique comme un vecteur, mais une grandeur algébrique, une *quantité scalaire ;* elle montre également que sa valeur est indépendante de l'ordre des facteurs. Le produit scalaire est positif si l'angle θ est aigu, négatif s'il est obtus; il est nul si les deux vecteurs sont rectangulaires ($\cos\theta = 0$). Si les deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ont même direction, leur produit scalaire est égal en valeur absolue au produit ab de leurs grandeurs; il est alors positif si les vecteurs sont de même sens, négatif s'ils sont de sens contraires. Si les deux vecteurs sont égaux, leur produit scalaire, que l'on appelle le carré de l'un d'eux, est égal au carré de leur grandeur commune, ce que l'on représente en écrivant :

$$\vec{a}^2 = a^2.$$

L'interprétation du produit scalaire donnée à l'aide de la projection d'un des vecteurs sur l'autre montre immédiatement, grâce au théorème des projections, que si le vecteur $\vec{a}$ par exemple est la somme de plusieurs vecteurs $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., le produit scalaire $\vec{a}\,\vec{b}$ est la somme des produits scalaires $\vec{a}_1\vec{b}$, $\vec{a}_2\vec{b}$, ... De façon générale, on peut étendre au produit scalaire les diverses règles du calcul algébrique, et écrire par exemple des relations telles que :

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)(\vec{b}_1 + \vec{b}_2) = \vec{a}_1\vec{b}_1 + \vec{a}_1\vec{b}_2 + \vec{a}_2\vec{b}_1 + \vec{a}_2\vec{b}_2.$$

De même, en désignant par X, Y, Z, X', Y', Z' les coordonnées de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{a}'$ par rapport à trois axes rectangulaires de vecteurs unitaires $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\vec{a}\vec{a}' &= (X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k})(X'\vec{i} + Y'\vec{j} + Z'\vec{k})\\ &= XX'\vec{i}^2 + YY'\vec{j}^2 + ZZ'\vec{k}^2 + (XY' + X'Y)\,\vec{i}\,\vec{j} + \dots.\end{aligned}$$

Mais les carrés $\vec{i}^2$, $\vec{j}^2$, $\vec{k}^2$ des vecteurs unitaires sont égaux à 1, et les produits scalaires $\vec{i}\vec{j}$, $\vec{j}\vec{k}$, $\vec{k}\vec{i}$ de vecteurs rectangulaires sont nuls. On obtient ainsi l'expression du produit scalaire de deux vecteurs en fonction de leurs coordonnées :

$$\vec{a}\vec{a}' = XX' + YY' + ZZ'.$$

Si les deux vecteurs sont égaux, cette formule redonne l'expression, déjà indiquée au paragraphe 1, de la grandeur d'un vecteur :

$$a^2 = \vec{a}^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Les quantités $X^2 + Y^2 + Z^2$ et $XX' + YY' + ZZ'$ représentent des grandeurs scalaires définies indépendamment des axes $Oxyz$: elles ne dépendent donc pas du choix des axes, et constituent ce qu'on appelle des *invariants.*

5. Produit vectoriel. — On appelle *produit vectoriel* d'un vecteur libre $\vec{a}$ par un vecteur libre $\vec{b}$, et nous désignerons par :

$$\vec{p} = \vec{a} \wedge \vec{b},$$

un vecteur libre $\vec{p}$, perpendiculaire au plan des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, de sens tel que le trièdre $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$ soit direct, c'est-à-dire ait même sens que le trièdre de référence $Oxyz$ (*fig.* 6), et de grandeur $p = ab \sin \theta$ égale à l'aire du parallélogramme construit sur les deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Le produit vectoriel est nul quand les deux vecteurs sont parallèles ($\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, $\sin \theta = 0$) ; sa grandeur est égale au produit ab des grandeurs des deux facteurs lorsqu'ils sont perpendiculaires.

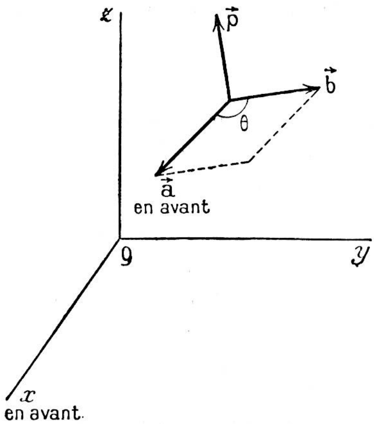

FIG. 6.

Il résulte immédiatement de la définition que *le produit vectoriel n'est pas indépendant de l'ordre des deux facteurs* : les deux produits vectoriels $\vec{a} \wedge \vec{b}$ et $\vec{b} \wedge \vec{a}$ sont deux vecteurs opposés.

Figurons, dans le plan Π perpendiculaire au vecteur $\vec{a}$, le vecteur $\vec{p}$ et le vecteur $\vec{b'}$, projection sur ce plan du vecteur $\vec{b}$ (*fig.* 7) : le vecteur $\vec{b'}$ est perpendiculaire au vecteur $\vec{p}$; le trièdre $\vec{a}$, $\vec{b'}$, $\vec{p}$ est direct, et la rotation $\vec{b'}\ \vec{p}$ est une rotation de $\pi/2$ dans le sens positif du plan Π ; enfin la grandeur du vecteur $\vec{b'}$ est $b' = b \sin \theta$, de sorte qu'on a $p = ab'$. On passe donc du vecteur $\vec{b'}$ au vecteur $\vec{p}$ par une rotation de $+\pi/2$ dans le plan Π, suivie d'une homothétie de rapport a. Considérons alors deux vecteurs $\vec{b_1}$, $\vec{b_2}$ de somme $\vec{b}$, et leurs projections $\vec{b'_1}$, $\vec{b'_2}$ sur le plan Π : la somme de ces projections est un vecteur $\vec{b'}$, projection du vecteur $\vec{b}$; formons, par l'opération indiquée, les vecteurs $\vec{p_1}$ et $\vec{p_2}$ produits du vecteur $\vec{a}$ par les vecteurs $\vec{b_1}$ et $\vec{b_2}$, et formons leur somme $\vec{p}$: il est évident qu'elle se déduit de $\vec{b'}$ par la même opération (rotation de $\pi/2$ et homothétie de rapport a), donc qu'elle est égale au produit de $\vec{a}$ par $\vec{b}$:

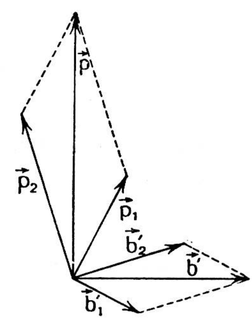

FIG. 7.

$$\vec{a} \wedge (\vec{b_1} + \vec{b_2}) = \vec{a} \wedge \vec{b_1} + \vec{a} \wedge \vec{b_2}.$$

De façon générale, on peut appliquer au produit vectoriel les règles ordinaires du calcul algébrique, *à condition de ne jamais intervertir l'ordre des facteurs.*

Exprimons en particulier le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{a}'$, de coordonnées X, Y, Z, X', Y', Z', à l'aide des vecteurs unitaires $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ des trois axes :

$$\vec{a} \wedge \vec{a}' = (X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}) \wedge (X'\vec{i} + Y'\vec{j} + Z'\vec{k})$$
$$= XX'\vec{i} \wedge \vec{i} + \ldots + XY'\vec{i} \wedge \vec{j} + YX'\vec{j} \wedge \vec{i} + \ldots.$$

Le produit vectoriel $\vec{i} \wedge \vec{i}$ de deux vecteurs parallèles est nul ; le produit $\vec{i} \wedge \vec{j}$ de deux vecteurs rectangulaires de grandeur unité est égal au vecteur $\vec{k}$, perpendiculaire aux deux premiers et de grandeur unité, tandis que le produit $\vec{j} \wedge \vec{i}$ est égal à $-\vec{k}$. On obtient donc la relation :

$$\vec{a} \wedge \vec{a}' = (YZ' - ZY')\,\vec{i} + (ZX' - XZ')\,\vec{j} + (XY' - YX')\,\vec{k},$$

qui exprime que les trois coordonnées du produit vectoriel ont pour expressions :

$$L = YZ' - ZY', \qquad M = ZX' - XZ', \qquad N = XY' - YX'.$$

6. Produit mixte. — On appelle *produit mixte* de trois vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ une quantité scalaire m égale au produit scalaire du troisième vecteur et du produit vectoriel des deux premiers :

$$m = (\vec{a} \wedge \vec{b})\,\vec{c}.$$

Représentons, à partir d'une même origine O, les trois vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (*fig.* 8), et supposons, pour fixer les idées, que le trièdre $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, soit direct. Le produit vectoriel $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est un vecteur $\vec{p}$ perpendiculaire au plan OAB, situé du même côté de ce plan que OC, et dont la grandeur est égale à l'aire S du parallélogramme construit sur OA et OB ; la projection OH du vecteur $\vec{c}$ sur le vecteur $\vec{p}$ est la hauteur $\vec{h}$ du parallélépipède construit sur les trois vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, et la quantité $m = Sh$ est le volume de ce parallélépipède.

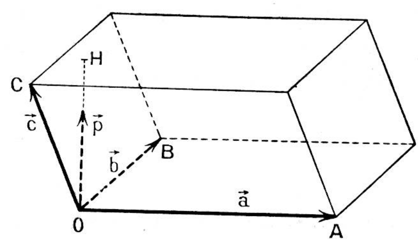

FIG. 8.

Comme le volume du parallélépipède peut être évalué à partir d'une quelconque des faces, on a :

$$m = (\vec{a} \wedge \vec{b})\,\vec{c} = (\vec{b} \wedge \vec{c})\,\vec{a} = (\vec{c} \wedge \vec{a})\,\vec{b}.$$

Ces relations montrent que le produit mixte est nul si deux quelconques des trois vecteurs sont parallèles, c'est-à-dire si l'aire de la face correspondante du parallélépipède est nulle.

Comme d'ailleurs un produit scalaire est indépendant de l'ordre des facteurs, on peut, dans la seconde expression, intervertir les vecteurs $\vec{b} \wedge \vec{c}$ et $\vec{a}$, et écrire :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b})\,\vec{c} = \vec{a}\,(\vec{b} \wedge \vec{c}).$$

On peut donc, dans l'expression du produit mixte, intervertir la multiplication scalaire et la multiplication vectorielle : on peut supprimer les signes qui les représentent, et désigner simplement le produit mixte par la notation $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$. La relation que nous avons écrite exprime qu'*il ne change pas si l'on en permute circulairement les facteurs ;* il est évident d'autre part que, comme le produit vectoriel, il prend une valeur opposée si on échange seulement deux d'entre eux :

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a} = \vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b} = -\,\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b} = -\,\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a} = -\,\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}.$$

7. Dérivée d'un vecteur. — Soit une variable t; supposons qu'à chaque valeur de t on sache faire correspondre un certain vecteur $\vec{a}$: on dit que ce vecteur est **fonction** de t; analytiquement, cela veut dire que l'on se donne trois fonctions $X(t)$, $Y(t)$ et $Z(t)$ de la variable t qui sont les coordonnées du vecteur $\vec{a}$.

Considérons deux valeurs t et $t + \Delta t$ de la variable t : il leur correspond deux valeurs du vecteur $\vec{a}$; on peut former leur différence, qui est un certain vecteur $\Delta\vec{a}$. Ce vecteur $\Delta\vec{a}$ tend généralement vers zéro en même temps que Δt, mais le vecteur $\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}$, qu'on obtient en le divisant par la quantité scalaire Δt, tend alors généralement vers une limite : cette limite est un vecteur $\vec{a}'$, qu'on appelle la **dérivée**, ou le *vecteur dérivée*, du vecteur $\vec{a}$. On voit immédiatement que les coordonnées du vecteur $\Delta\vec{a}$ sont les variations ΔX, ΔY, ΔZ des trois fonctions X, Y, Z, et que celles du vecteur dérivée $\vec{a}'$ sont leurs dérivées X', Y', Z'.

On représente encore la dérivée par la notation :

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{a}}{dt}.$$

Les mathématiciens considèrent la notation dt comme désignant une quantité infiniment petite, et définissent le produit $\vec{a}'dt$ comme la *différentielle* $d\vec{a}$ du vecteur a. Les physiciens ne considèrent en général que des quantités ayant une signification physique, c'est-à-dire directement mesurables : telles sont les variations $\Delta\vec{a}$ et Δt du vecteur $\vec{a}$ et de la variable t. Si ces quantités, tout en restant finies et mesurables, sont petites, leur quotient $\Delta\vec{a}/\Delta t$ diffère très peu du vecteur dérivée $\vec{a}'$, de sorte qu'on est en droit d'écrire, en ne négligeant