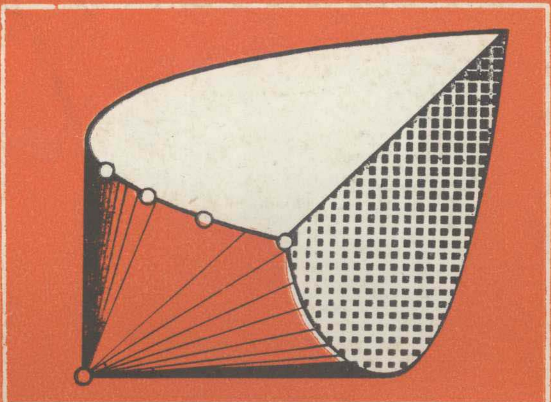
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ:



ВОПРОСЫ РАЗРЕШИМОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ

Издательство
Московского университета

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ:
вопросы разрешимости и устойчивости

Под редакцией
Е. Г. Белоусова, Б. Банка

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА, 1986

Авторский коллектив:
Б. Банк, Е. Г. Белоусов, Р. Мандель, Ю. Н. Черемных, В. М. Широнин

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор Ю. П. Иванилов
доктор физико-математических наук, профессор В. В. Федоров

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Московского университета

Математическая оптимизация: вопросы разрешимости и устойчивости. Под ред. Е. Г. Белоусова, Б. Банка.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. — 216 с.

В монографии рассматриваются непрерывные и дискретные задачи математической оптимизации в n-мерном евклидовом пространстве. Изучаются параметрические задачи с линейными, квадратичными, кубическими, выпуклыми полиномиальными целевыми функциями и различными, главным образом выпуклыми, ограничениями. Выделяются классы устойчивых оптимизационных задач, т. е. таких, в которых оптимальные планы и оптимальные значения целевых функций непрерывно (в определенном смысле) зависят от исходных данных — параметров задачи.

Книга будет полезна широкому кругу лиц — студентам, аспирантам, научным работникам, занимающимся постановкой и анализом экстремальных задач.

МОНОГРАФИЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

вопросы разрешимости и устойчивости

Заведующая редакцией Н. А. Рябикина. Редактор Т. Г. Трубицына. Обложка художника Ю. Н. Егорова. Художественный редактор Б. С. Вехтер. Технический редактор К. С. Чистякова. Корректоры Л. А. Айдарбекова, Л. А. Кузнецова

ИБ № 3801

Сдано в набор 24.09.85. Подписано в печать 21.08.86. Л-66398. Формат 60×90/16. Бумага тип. № 3. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 13,5. Уч.-изд. л. 13,47. Тираж 3000 экз. Заказ 198. Цена 1 р. 30 к. Изд. № 3801

Ордена «Знак Почета» издательство Московского университета. 103009, Москва, ул. Герцена, 5/7. Типография ордена «Знак Почета» изд-ва МГУ. 119899, Москва, Ленинские горы

М $\dfrac{1502000000-136}{077(02)-86}$ 115—86

ПРЕДИСЛОВИЕ

Оптимизационные задачи возникают при описании, проектировании и анализе сложных (экономических, технических и пр.) систем, причем исходные данные этих задач известны, как правило, с некоторой степенью приближения. В этих условиях оказывается важным выделение таких классов оптимизационных задач, оптимальные значения и оптимальные векторы которых непрерывно зависят от исходных данных — параметров задачи, поскольку только такие задачи (называемые устойчивыми) образуют математические модели, адекватные реально существующим системам.

Основная цель настоящей книги — это выделение достаточно широких классов задач математического, и в том числе (полностью- или частично-) целочисленного, программирования, которые являются (в определенном смысле) устойчивыми.

В работе исследуется следующая основная задача:

$$\inf\{f(\mathbf{x}, \lambda) \mid \mathbf{x}\in M(\lambda)\},\ \lambda\in\Lambda,$$

где Λ — некоторое множество параметров и $M(\lambda)$ — точечно-множественное отображение из E_m в E_n. Основной целью работы является получение различного рода утверждений о непрерывности отображений:

$$M : \lambda\to M(\lambda),$$
$$\varphi : \lambda\to\varphi(\lambda) = \inf\{f(\mathbf{x}, \lambda) \mid \mathbf{x}\in M(\lambda)\},$$
$$\psi : \lambda\to\psi(\lambda) = \{\mathbf{x}\in M(\lambda) \mid f(\mathbf{x}, \lambda) = \varphi(\lambda)\},$$

которые мы называем соответственно рестрикционным отображением, функцией экстремума и оптимальным отображением основной задачи.

Книга состоит из шести глав.

В первой главе приведены в основном известные утверждения о непрерывности тех точечно-множественных отображений (с образами в E_n), которые выступают в следующих главах как рестрикционные отображения в задачах оптимизации с параметрами в правых частях задающих неравенств.

В главе содержатся также утверждения об устойчивости для параметрических задач оптимизации в E_n при определенных предположениях выпуклости: в ней исследуются свойства непрерывности экстремальных значений и множеств оптимальных решений.

Вторая глава посвящена вопросам разрешимости и устойчивости полностью- или частично-целочисленных задач с квадратичной или выпуклой полиномиальной целевой функцией и с рестрикционным отображением, представимым в виде векторной суммы варьируемого компакта и фиксированного конечного конуса.

В третьей главе результаты и методы параметрической оптимизации используются при исследовании полностью-целочисленных задач линейного программирования.

В главе четвертой развивается концепция выпуклых полиномиальных множеств и расширения этого класса — множеств, названных сильно замкнутыми, и изучаются вопросы разрешимости выпуклых оптимизационных задач на множествах этого класса. Отдельно рассматриваются вопросы разрешимости и устойчивости для задач кубического программирования.

Пятая глава содержит результаты о структуре выпуклых полиномов, о хаусдорфовой непрерывности выпуклых, выпуклых полиномиальных отображений и оптимальных отображений для задачи выпуклого полиномиального программирования.

Шестая глава посвящена так называемым теоремам о магистральных свойствах линейных моделей экономической динамики, которые представляют собой один из классов параметрических оптимизационных задач.

Книга написана авторским коллективом из СССР и ГДР — сотрудниками Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова Е. Г. Белоусовым (гл. IV), Ю. Н. Черемных (гл. VI), В. М. Шарониным (гл. V) и Берлинского университета им. Гумбольдта Б. Банком и Р. Манделем (гл. I—III) [1] — и отражает в основном результаты, полученные авторами за последнее пятилетие. В книге существенно используются результаты, терминология и обозначения, содержащиеся в монографиях:

1. Bank B., Guddat J., Klatte D., Kummer B., Tammer K. Non-Linear Parametric Optimization. Berlin, Akademie-Verlag, 1982.
2. Белоусов Е. Г. Введение в выпуклый анализ и целочисленное программирование. М., Изд-во МГУ, 1977.
3. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М., Мир, 1973.

Авторы выражают глубокую благодарность В. Г. Андронову, Ф. П. Васильеву, Ю. П. Иванилову, В. Г. Карманову, Д. Клатте, Б. Куммеру, В. В. Федорову за полезное обсуждение материалов монографии и ценные замечания, которые позволили усилить ряд результатов и улучшить текст монографии.

---

[1] Главы I—III перевели на русский язык Е. Г. Белоусов и В. М. Широнин.

ГЛАВА I

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ВЫПУКЛЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАДАЧ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В настоящей главе приведены некоторые из известных основных утверждений о непрерывности многозначных отображений при определенных предположениях выпуклости.

Для задач математической оптимизации зависимость от параметра множества допустимых векторов [1], совокупности решений задачи и экстремального значения целевой функции приводит соответственно к рассмотрению рестрикционного и оптимального отображений, функции экстремума. В терминах непрерывности этих отображений в главе формулируются утверждения об устойчивости параметрических задач оптимизации в E_n. Более общее и обширное исследование непрерывности точечно-множественных отображений содержится в монографии [6], откуда заимствованы некоторые из приводимых ниже утверждений. Часть из них справедлива и в пространствах более общего вида, однако в настоящей главе доказательства даются лишь для конечномерного случая.

§ 1. Точечно-множественные отображения

Введем необходимые определения и понятия. Пусть $\Lambda\subset E_m$ — непустое множество и 2^{E_n} совокупность всех подмножеств пространства E_n. Под точечно-множественным отображением M из Λ в 2^{E_n} мы понимаем функцию, которая каждому $\lambda\in\Lambda$ ставит в соответствие множество $M(\lambda)\subset E_n$; это записывается так:

$$M:\Lambda\to 2^{E_n}.$$

Графиком $\operatorname{graph} M$ отображения M при этом называется множество

$$\operatorname{graph} M=\{(\mathbf{x},\ \lambda)\,|\,\lambda\in\Lambda,\ \mathbf{x}\in M(\lambda)\}\subset E_n\times E_m.$$

Отображение M называется *замкнутым* в точке $\lambda^0\in\Lambda$, если для

[1] Либо релаксации этого множества, т. е. множества, задаваемого теми же ограничениями, но без требования целочисленности соответствующих переменных.

любой последовательности $\lambda^t \to \lambda^0$ и любой последовательности $\mathbf{x}^t \in M(\boldsymbol{\lambda}^t)$, такой, что $\mathbf{x}^t \to \mathbf{x}^0$, выполняется $\mathbf{x}^0 \in M(\boldsymbol{\lambda}^0)$.

Отображение $M: \Lambda \to 2^{E_n}$ называется замкнутым, если его график graph M — замкнутое множество. Замкнутость отображения M, очевидно, эквивалентна его замкнутости в любой точке $\boldsymbol{\lambda}^0 \in \Lambda$.

В книге используются следующие *характеристики расстояния между множествами в E_n*.

1. Для произвольных $\mathbf{x} \in E_n$ и $A \subset E_n$

$$\rho(\mathbf{x}, A) = \inf_{\mathbf{y} \in A} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

2. Для произвольных A и $B \subset E_n$

$$\rho(A, B) = \sup_{\mathbf{x} \in A} \rho(\mathbf{x}, B).$$

3. Хаусдорфово расстояние между произвольными множествами $A, B \subset E_n$ обозначим через $d(A, B)$. По определению

$$d(A, B) = \max\{\rho(A, B), \rho(B, A)\}.$$

Будем также обозначать для произвольного множества $A \subset E_n$ и числа $\varepsilon > 0$ через

$$U_\varepsilon(A) = \{\mathbf{x} \in E_n \mid \rho(\mathbf{x}, A) < \varepsilon\},$$

ε-окрестность множества A.

Введем *характеристики непрерывности точечно-множественных отображений.*

Отображение $M: \Lambda \to 2^{E_n}$ называется в точке $\boldsymbol{\lambda}^0$:

1) *полунепрерывным сверху по Хаусдорфу* (*H-полунепрерывным сверху*), если

$$\lim_{\boldsymbol{\lambda} \to \boldsymbol{\lambda}^0} \rho(M(\boldsymbol{\lambda}), M(\boldsymbol{\lambda}^0)) = 0,$$

или, что то же самое, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из условия $|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^0| < \delta$ следует $M(\boldsymbol{\lambda}) \subset U_\varepsilon M(\boldsymbol{\lambda}^0)$;

2) *полунепрерывным снизу по Хаусдорфу* (*H-полунепрерывным снизу*), если

$$\lim_{\boldsymbol{\lambda} \to \boldsymbol{\lambda}^0} \rho(M(\boldsymbol{\lambda}^0), M(\boldsymbol{\lambda})) = 0,$$

или, что то же самое, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из условия $|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^0| < \delta$ следует $M(\boldsymbol{\lambda}^0) \subset U_\varepsilon M(\boldsymbol{\lambda})$;

3) *полунепрерывным снизу по Бержу* (*B-полунепрерывным снизу*), если для любого $\mathbf{x} \in M(\boldsymbol{\lambda}^0)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon, \mathbf{x}) > 0$ такое, что из условия

$$|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^0| < \delta \text{ следует } \mathbf{x} \in U_\varepsilon M(\boldsymbol{\lambda});$$

4) *непрерывным по Хаусдорфу* (*H-непрерывным*), если оно одновременно H-полунепрерывно сверху и H-полунепрерывно снизу в точке λ^0, т. е. если

$$\lim_{\lambda \to \lambda^0} d(M(\lambda),\ M(\lambda^0)) = 0;$$

5) *непрерывным*, если оно одновременно H-полунепрерывно сверху и B-полунепрерывно снизу в точке λ^0.

Данные определения непрерывности отображений могут быть сформулированы также и на языке последовательностей. Отображение является в точке λ^0:

1′) H-полунепрерывным сверху, если для любой допустимой последовательности $\lambda^t \to \lambda^0$ и любой последовательности $\mathbf{x}^t \in M(\lambda^t)$ найдется такая последовательность $\mathbf{y}^t \in M(\lambda^0)$, что $|\mathbf{x}^t - \mathbf{y}^t| \to 0$;

2′) H-полунепрерывным снизу, если для любой допустимой последовательности $\lambda^t \to \lambda^0$ и любой последовательности $\mathbf{x}^t \in M(\lambda^0)$ найдется такая последовательность $\mathbf{y}^t \in M(\lambda^t)$, что $|\mathbf{x}^t - \mathbf{y}^t| \to 0$;

3′) B-полунепрерывным снизу, если для любой допустимой последовательности $\lambda^t \to \lambda^0$ и любой ограниченной последовательности $\mathbf{x}^t \in M(\lambda^0)$ найдется такая последовательность $\mathbf{y}^t \in M(\lambda^t)$, что $|\mathbf{x}^t - \mathbf{y}^t| \to 0$.

Пример 1. Важным примером точечно-множественных отображенный является *выпуклое полиэдральное отображение:*

$$M(\lambda) = \{\mathbf{x} \in E_n \,|\, \mathbf{A}\mathbf{x} \leqslant \lambda\},\ \lambda \in \Lambda \subset E_m,$$

где $\mathbf{A}$ — фиксированная $m \times n$-матрица.
Как известно (см. также ниже теорему 5 из § 2 главы I), это отображение является H-непрерывным во всей своей области определения, т. е. на множестве

$$\Lambda = \{\lambda \in E_m \,|\, \exists \mathbf{x} \in E_n : \lambda \geqslant \mathbf{A}\mathbf{x}\}.$$

Следующие примеры иллюстрируют различные виды полунепрерывности точечно-множественных отображений.

Пример 2. Отображение

$$M(\lambda) = \{(x,\ y) \in E_2 \,|\, y\lambda \geqslant x^2,\ y \geqslant 0\},$$
$$0 \leqslant \lambda \leqslant 1,$$

(см. рис. 1) является B-полунепрерывным снизу всюду при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, H-полунепрерывным сверху лишь при $\lambda = 1$ и H-полунепрерывным снизу лишь при $\lambda = 0$.

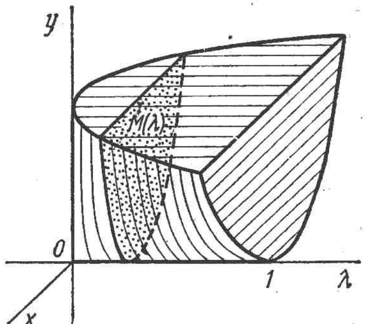


Рис. 1. График точечно-множественного отображения $M(\lambda) = \{(x,\ y) \in E_2 \,|\, y\lambda \geqslant x^2,\ y \geqslant 0\}$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$

Пример 3. Отображение

$$M(\lambda)=\{x\in E_1|0\leqslant x\leqslant 1,\ \lambda_1 x\geqslant\lambda_2^2\},$$

$$\lambda=(\lambda_1,\ \lambda_2)\in\Lambda:=\{\lambda_2^2\leqslant\lambda_1\leqslant 1\}$$

является H-полунепрерывным сверху всюду в Λ и H-полунепрерывным снизу при всех $\lambda\in\Lambda$, $\lambda\neq(0,\ 0)$. При $\lambda=(0,\ 0)$ отображение M не является и B-полунепрерывным снизу, поскольку при $\lambda=(\varepsilon^2,\ \varepsilon)\to(0,\ 0)$ выполняется $M(\lambda)=\{1\}$, в то время как $M(0,\ 0)=\{x\in E_1|0\leqslant x\leqslant 1\}$.

§ 2. Выпуклые отображения

Точечно-множественное отображение M называется *выпуклым*, если его график — выпуклое множество.

Иначе говоря, выпуклость отображения $M:\Lambda\to 2^{E_n}$ означает, что для любых λ^1, $\lambda^2\in\Lambda$ и любого числа α $(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$ выполняется

$$\alpha M(\lambda^1)+(1-\alpha)M(\lambda^2)\subset M(\alpha\lambda^1+(1-\alpha)\lambda^2).$$

Очевидно, при любом данном $\lambda\in\Lambda$ множество $M(\lambda)$ выпукло.

Будем обозначать через $K(A)$ внутренний конус выпуклого множества $A\subset E_n$ — совокупность (вместе с точкой $\mathbf{0}$) всех направляющих векторов лучей, содержащихся в A.

Теорема 1. *Пусть $M:\Lambda\to 2^{E_n}$ — выпуклое замкнутое отображение. Тогда при всех $\lambda\in\Lambda$ выполняется*

$$K(M(\lambda))=E_n\cap K(\operatorname{graph} M),$$

где graph M — *график отображения M.*

Доказательство. Для множеств

$$\tilde{M}(\lambda)=(\operatorname{graph} M)\cap\{(\mathbf{x},\ \lambda)\,|\,\mathbf{x}\in E_n\}$$

согласно [51, теорема 8.3] имеем при любом $\lambda\in\Lambda$

$$K(\tilde{M}(\lambda))=K(\operatorname{graph} M)\cap K\{(\mathbf{x},\ \lambda)\,|\,\mathbf{x}\in E_n\}=K(\operatorname{graph} M)\cap E_n.$$

Поскольку множество $M(\lambda)$ может быть получено из $\tilde{M}(\lambda)$ параллельным переносом, теорема 1 доказана.

В дальнейшем будет неоднократно использоваться следующее известное утверждение из выпуклого анализа (см., напр., [11, с. 37]; теорему 8.2 из [51]).

Лемма 1. *Пусть $A\subset E_n$ выпуклое множество. Если для последовательности $\mathbf{x}^t\in A$ и числовой последовательности α_t существуют пределы*

$$\lim\alpha_t=+\infty,\ \mathbf{k}=\lim\frac{\mathbf{x}^t}{\alpha_t},$$

то $\mathbf{k}\in K(A)$.

Следствие. *Пусть $M:\Lambda\to 2^{E_n}$ — выпуклое замкнутое отображение. Если последовательность $\lambda^t\in\Lambda$ ограниченная, а* *для последовательности* $\mathbf{x}^t \in M(\lambda^t)$ *выполняется* $|\mathbf{x}^t| \to +\infty$ *и существует* $\mathbf{k} = \lim \frac{\mathbf{x}^t}{|\mathbf{x}^t|}$, *то*

$$\mathbf{k} \in K(M(\lambda)) \ \forall \lambda \in \Lambda.$$

Доказательство. Очевидно, что в силу леммы 1 выполняется $(\mathbf{k}, 0) \in K(\operatorname{graph} M)$. Отсюда в силу теоремы 1 следует нужное включение.

Теорема 2. *Пусть* $M:\Lambda \to 2^{E_n}$ *— выпуклое замкнутое отображение. Если при некотором* $\lambda^0 \in \Lambda$ *множество* $M(\lambda^0)$ *ограничено, то* M *является* H*-полунепрерывным сверху всюду в* Λ. *Если множество* $M(\lambda^0)$ *состоит из одной точки, то* M *является* H*-непрерывным в точке* λ^0.

Доказательство. Пусть $\mu \in \Lambda$ и $\lambda^t \in \Lambda$ — последовательность, такая, что $\lambda^t \to \mu$. Предположим, что M не является H-полунепрерывным сверху в точке μ. Тогда найдется последовательность $\mathbf{x}^t \in M(\lambda^t)$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\rho(\mathbf{x}^t, M(\lambda^0)) \geqslant \varepsilon \quad \forall t.$$

По теореме 1

$$K(M(\lambda)) = K(M(\lambda^0)) = \{0\} \quad \forall \lambda \in \Lambda, \qquad (1)$$

откуда следует [51, теорема 8.4], что все множества $M(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$ ограниченные. Более того, они ограничены и в совокупности при $\lambda \in U_\delta(\mu)$ и любом фиксированном $\delta > 0$. Действительно, в противном случае нашлась бы последовательность $\mathbf{y}^j \in M(\lambda^j)$, где $\lambda^j \to \mu$ такая, что $|\mathbf{y}^j| \to +\infty$. В этом случае *без ограничения общности*[2] в силу следствия из леммы 1 выполнялось бы $\mathbf{k} = \lim \frac{\mathbf{y}^j}{|\mathbf{y}^j|} \in K(M(\mu))$, причем $|\mathbf{k}| = 1$, что противоречит (1). Таким образом, последовательность $\{\mathbf{x}^t\}$ ограниченная и H-полунепрерывность сверху следует из замкнутости отображения M.

Если $M(\lambda^0)$ состоит из единственной точки, то H-полунепрерывность сверху отображения M в точке λ^0 означает и его H-полунепрерывность снизу в этой точке.

Теорема 2 доказана.

Следствие. *Пусть* $M:\Lambda \to 2^{E_n}$ *— выпуклое замкнутое отображение и* $M(\lambda^0)$ *— аффинное подпространство. Тогда отображение* M *является* H*-непрерывным в точке* λ^0.

Доказательство. Пусть $M(\lambda^0) = \mathbf{a} + L$, где L — линейное подпространство и $\mathbf{a} \in L^\perp$ (где $L^\perp$ — ортогональное дополнение подпространства L). Согласно теореме 1 при всех $\lambda \in \Lambda$ выполняется $K(M(\lambda)) = L$, поэтому, очевидно,

$$M(\lambda) = M'(\lambda) + L,$$

[2] Выражение «*без ограничения общности*», набранное курсивом, означает здесь и далее, что вместо выделения подпоследовательности, обладающей нужными свойствами, мы для простоты обозначений принимаем, что такими свойствами обладает исходная последовательность.

где $M'(\lambda)=M(\lambda)\cap L^{\perp}$. По теореме 2 отображение M' является H-непрерывным в точке λ^0. Легко убедиться, что таким же будет и отображение M.

Следующее утверждение (Р. Мандель [43]) будет использовано при исследовании полностью-целочисленных параметрических экстремальных задач.

Теорема 3. *Пусть даны отображения* $M_i:\Lambda_i \to 2^{E_n}$, $\Lambda_i \subset E_r$, $i=1, \ldots, m$, *имеющие вид*

$$M_i(\lambda)=C_i(\lambda)+K_i,$$

где $C_i(\lambda)$ — *H-полунепрерывные сверху отображения*[3] *с компактными образами и* K_i — *многогранные конусы*[4]. *Тогда отображение*

$$M(\lambda)=\bigcap_{i=1}^{m} M_i(\lambda)$$

является H-полунепрерывным сверху на множестве

$$\Lambda=\{\lambda \mid \lambda\in\bigcap_{i=1}^{m}\Lambda_i,\ M(\lambda)\neq\varnothing\}$$

и представимо в виде

$$M(\lambda)=C(\lambda)+K,$$

где $C(\lambda)$ — *H-полунепрерывное сверху на* Λ *отображение с компактными образами и* $K=\bigcap_{i=1}^{m}K_i$.

Доказательство. Очевидно, достаточно провести доказательство для случая $m=2$. Пусть L — линейное подпространство наибольшей размерности, которое содержится в $K=K_1\cap K_2$. Через $L^{\perp}$ обозначим ортогональное дополнение L.

Обозначим через $S^1, \ldots, S^p$ $(T^1, \ldots, T^q)$ грани $K_1\cap L^{\perp}$ (соответственно $K_2\cap L^{\perp}$); при этом в число граней включаются и сами множества $K_1\cap L^{\perp}$ и $K_2\cap L^{\perp}$. Определим отображение $C:\Lambda\to 2^{E_n}$ равенством

$$C(\lambda)=\bigcup_{(i,j):S^i\cap T^j=\{0\}}[(C_1(\lambda)+S^i)\cap(C_2(\lambda)+T^j)]$$

и покажем, что при произвольно заданном $\lambda\in\Lambda$ выполняется $M(\lambda)=C(\lambda)+K$.

Включение $M(\lambda)\supset C(\lambda)+K$ тривиально. Пусть вектор $x\in \in M(\lambda)$ взят произвольно; найдутся грани S^i и T^j размерности

[3] Не обязательно выпуклые.

[4] Здесь и далее вершиной всех рассматриваемых конусов является точка 0.

меньшей, чем у множеств $K_1 \cap L^\perp$ или соответственно $K_2 \cap L^\perp$, такие, что

$$\mathbf{x} \in (C_1(\lambda) + S^i) + K,$$

$$\mathbf{x} \in (C_2(\lambda) + T^j) + K.$$

Чтобы установить включение $\mathbf{x} \in C(\lambda) + K$, достаточно доказать равенство $S^i \cap T^j = \{\mathbf{0}\}$. Найдутся точки $\mathbf{c}_t \in C_t(\lambda)$, $\mathbf{v}_t \in K$, $t=1,\ 2$; $\mathbf{u}_1 \in S^i$, $\mathbf{u}_2 \in T^j$ такие, что

$$\mathbf{x} = \mathbf{c}_t + \mathbf{u}_t + \mathbf{v}_t, \quad t=1,\ 2.$$

Поскольку S^i и T^j имеют минимальную размерность, то

$$\mathbf{u}_1 \in \operatorname{ri} S^i, \quad \mathbf{u}_2 \in \operatorname{ri} T^j.$$

Предположим, что имеется $\mathbf{u} \in S^i \cap T^j$ и $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ получим

$$\mathbf{u}_1 - \varepsilon \mathbf{u} \in S^i, \quad \mathbf{u}_2 - \varepsilon \mathbf{u} \in T^j.$$

Поскольку $(K_1 \cap L^\perp) \cap (K_2 \cap L^\perp)$ содержит только тривиальное подпространство $\{\mathbf{0}\}$, то существует $\varepsilon' > 0$ такое, что точки $\mathbf{u}_t - \varepsilon' \mathbf{u}$, $t=1,\ 2$ принадлежат граням S^{i*} и T^{j*} множеств $K_1 \cap L^\perp$ и соответственно $K_2 \cap L^\perp$, причем $\dim S^{i*} < \dim S^i$ или $\dim T^{j*} < \dim T^j$. Соотношения

$$\mathbf{u}_1 - \varepsilon' \mathbf{u} \in S^{i*}, \quad \mathbf{u}_2 - \varepsilon' \mathbf{u} \in T^{j*}, \quad \mathbf{v}_t + \varepsilon' \mathbf{u} \in K,$$

так же, как и

$$\mathbf{x} = \mathbf{c}_t + (\mathbf{u}_t - \varepsilon' \mathbf{u}) + (\mathbf{v}_t + \varepsilon' \mathbf{u}), \quad t=1,\ 2,$$

противоречат выбору S^i или T^j. Вследствие этого $S^i \cap T^j = \{\mathbf{0}\}$.

Компактность $C(\lambda)$ очевидна.

Поскольку отображения C_1, C_2 H-полунепрерывны сверху на Λ и у них компактны множества образов, то существуют компактное множество C^* и окрестность $U_\delta(\lambda^0) \subset \Lambda$, $\delta > 0$ такие, что $C(\lambda) \subset C^*$ $\forall \lambda \in U_\delta(\lambda^0)$.

Из очевидной замкнутости C в точке λ^0 вытекает H-полунепрерывность отображения C сверху в этой точке. H-полунепрерывность отображения M сверху в точке λ^0 вытекает непосредственно из представления $M(\lambda) = C(\lambda) + K$ и доказанной H-полунепрерывности сверху отображения C.

Теорема 3 доказана.

Рассмотрим теперь некоторые свойства выпуклых отображений $M: \Lambda \to 2^{E_n}$, $\Lambda \subset E_m$ с образами, задаваемыми в виде

$$M(\lambda) = \{\mathbf{x} \in E_n \mid g_i(\mathbf{x}) \leqslant \lambda_i,\ i=1,\ \ldots,\ m\},$$

где $g_i : E_n \to E$, $i=1, \ldots, m$ — выпуклые функции.

Функция $f : E_n \to E$ называется *слабо аналитической*, если для любых векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in E_n$ из соотношений

$$f_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\alpha) = f(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{y}) = \text{const} \ \forall \alpha (\underline{\alpha} < \alpha < \bar{\alpha})$$

следует, что

$$f_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\alpha) = \mathrm{const}\ \forall\alpha\in E.$$

Теорема 4. *Пусть $g_i(\mathbf{x})$, $i=1, \ldots, m$ — выпуклые функции на E_n, которые при $i\in\mathcal{J}\subset\{1, \ldots, m\}$ являются, кроме того, слабо аналитическими; пусть существует точка $\mathbf{x}^0\in M(\lambda^0)$ такая, что для всех $i\notin\mathcal{J}$ выполняется $g_i(\mathbf{x}^0)<\lambda_i^0$. Тогда отображение $M(\lambda)$ является B-полунепрерывным снизу в точке λ^0.*

Доказательство. Определим множества индексов $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$ равенствами:

$$\mathcal{J}_1 = \{i \mid g_i(\mathbf{x}) = \lambda_i^0\ \forall\,\mathbf{x}\in M(\lambda^0)\},$$

$$\mathcal{J}_2 = \{i \mid \exists\,\mathbf{x}(i)\in M(\lambda^0): g_i(\mathbf{x}(i)) < \lambda_i^0\}.$$

Очевидно, $\mathcal{J}_1\subset\mathcal{J}$. Пусть далее

$$M_1(\lambda) = \{\mathbf{x}\in E_n \mid g_i(\mathbf{x})\leqslant\lambda_i,\ i\in\mathcal{J}_1\},$$
$$M_2(\lambda) = \{\mathbf{x}\in E_n \mid g_i(\mathbf{x})<\lambda_i,\ i\in\mathcal{J}_2\}.$$

Если $\mathcal{J}_1=\varnothing$, то положим $M_1(\lambda)=E_n$, а если $\mathcal{J}_2=\varnothing$, то $M_2(\lambda) = E_n$.

Очевидно, выполняется

$$M(\lambda^0) = \mathrm{cl}\,(M_1(\lambda^0)\cap M_2(\lambda^0)), \tag{2}$$

и мы имеем

$$M(\lambda)\supset\mathrm{cl}\,(M_1(\lambda)\cap M_2(\lambda))\quad \forall\lambda\in\Lambda. \tag{3}$$

Покажем, что выполняется равенство

$$M_1(\lambda^0) = \{\mathbf{x}\in E_n / g_i(\mathbf{x}) = \lambda_i^0\quad \forall\, i\in\mathcal{J}_1\}, \tag{4}$$

справедливое для случая $\mathcal{J}_1=\varnothing$ по определению.

Допустим, что

$$\exists\, x^*\in M_1(\lambda^0): \exists\, i^*\in\mathcal{J}_1: g_{i^*}(\mathbf{x}^*) < \lambda_{i^*}^0.$$

Для любого $\mathbf{z}\in M_1(\lambda^0)\cap M_2(\lambda^0)$ все точки $\mathbf{x}(\alpha)=\alpha\mathbf{z}+(1-\alpha)\mathbf{x}^*$ принадлежат $M_1(\lambda^0)$, если только $\alpha\in(0, 1)$. Возьмем $\alpha>0$ достаточно малым; тогда $\mathbf{x}(\alpha)\in M_1(\lambda^0)$ и $g_{i^*}(\mathbf{x}(\alpha))<\lambda_{i^*}^0$, что противоречит определению множества $\mathcal{J}_1$.

Поскольку функции g_i, $i\in\mathcal{J}_1$ слабо аналитические, из (4) следует, что выпуклое множество $M_1(\lambda^0)$ есть аффинное подпространство E_n. Поэтому в силу теоремы 2 отображение $M_1:\Lambda\to 2^{E_n}$ H-непрерывно в точке λ^0.

Для того чтобы доказать B-полунепрерывность снизу отображения M в точке λ^0, рассмотрим произвольную последовательность $\{\lambda^t\}\subset\Lambda$, $\lambda^t\to\lambda^0$ и точку $\mathbf{x}\in M_1(\lambda^0)\cap M_2(\lambda^0)$. Поскольку M_1 является H-непрерывным в точке λ^0, существует последовательность $\{\mathbf{x}^t\}$, для которой $\mathbf{x}^t\in M_1(\lambda^t)$ и $\mathbf{x}^t\to\mathbf{x}$. Поскольку $\mathbf{x}\in M_2(\lambda^0)$, то для достаточно малого $\varepsilon>0$ выполняется $U_\varepsilon(\mathbf{x})\subset M_2(\lambda^0)$. Таким образом, почти все $\mathbf{x}^t$ принадлежат $M_2(\lambda^0)$, вследствие чего отображение $M_1 \cap M_2$ является B-полунепрерывным снизу в точке λ^0. Теперь утверждение теоремы следует из равенств (2) и (3).

Теорема 4 доказана.

Покажем, что теорема 4 становится несправедливой, если вместо существования точки $\mathbf{x}^0$ с соответствующими свойствами предположить лишь, что $M(\lambda^0) \neq \varnothing$ и что условия этой теоремы, вообще говоря, не обеспечивают H-полунепрерывности сверху отображения M.

Рассмотрим с этой целью следующую функцию $g: E_2 \to E$

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} |x_2| e^{-\frac{x_1}{|x_2|}}, & \text{если } x_1 \geqslant 0,\ x_2 \neq 0; \\ 0, & \text{если } x_1 \geqslant 0,\ x_2 = 0; \\ |x_2| - x_1, & \text{если } x_1 \leqslant 0. \end{cases}$$

Легко убедиться, что g обладает следующими свойствами:

1) g непрерывна;

2) $g(x_1, \pm 1) = \begin{cases} e^{-x_1}, & \text{если } x_1 \geqslant 0 \\ 1 - x_1, & \text{если } x_1 \leqslant 0 \end{cases};$

3) $g(\cdot, 1)$ выпукла;

4) для $\mathbf{z} = \alpha(x_1, 1)$, $\alpha > 0$ выполняется $g(\mathbf{z}) = \alpha g(x_1, 1)$;

5) $g(\alpha \mathbf{z}) = \alpha g(\mathbf{z})$ $\forall \alpha > 0$, $\forall \mathbf{z} \in E_2$;

6) $g(x_1, x_2) \leqslant g(x_1, y_2)$, если $|x_2| < |y_2|$;

7) $g(x_1, x_2) \geqslant g(y_1, x_2)$, если $x_1 < y_1$.

В силу 1) функция g выпукла, если для произвольных $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in E_2$ выполняется неравенство

8) $g\left(\frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v})\right) \leqslant \frac{1}{2} g(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} g(\mathbf{v})$.

Мы докажем это неравенство при предположениях

$$u_2 + v_2 \neq 0,\ u_2 \neq 0,\ v_2 \neq 0.$$

Используя представление

$$(u_1, |u_2|) = \alpha(x_1, 1),$$
$$(v_1, |v_2|) = \beta(y_1, 1)$$

и свойства 4)—6), получим:

$$g\left(\frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v})\right) = g\left(\frac{1}{2}(u_1 + v_1,\ u_2 + v_2)\right) \leqslant$$

$$\leqslant g\left(\frac{1}{2}(u_1 + v_1,\ |u_2| + |v_2|)\right) = \frac{1}{2} g(\alpha x_1 + \beta y_1,\ \alpha + \beta) =$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot g(\alpha(\alpha + \beta)^{-1} x_1 + \beta(\alpha + \beta)^{-1} y_1,\ 1) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \alpha g(x_1, 1) + \frac{1}{2} \beta g(y_1, 1) = \frac{1}{2} g(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} g(\mathbf{v}).$$

Пусть теперь $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ взяты произвольно. Тогда существует непустой открытый отрезок $(0, \varepsilon_0)$ такой, что для любого ε, взятого на этом отрезке, выполняются неравенства

$$u_2+v_2+2\varepsilon\neq 0,\ u_2+\varepsilon\neq 0,\ v_2+\varepsilon\neq 0.$$

Для точек

$$\mathbf{u}^\varepsilon=(u_1,\ u_2+\varepsilon),\ \mathbf{v}^\varepsilon=(v_1,\ v_2+\varepsilon),$$

поэтому (как только что доказано) выполняется 8). Предельным переходом $\varepsilon\to 0$ в силу 1) можно получить соответствующее неравенство для $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$.

Таким образом, функция g выпукла. Она не является слабо аналитической (например, из-за ее свойств на прямой $x_2=0$).

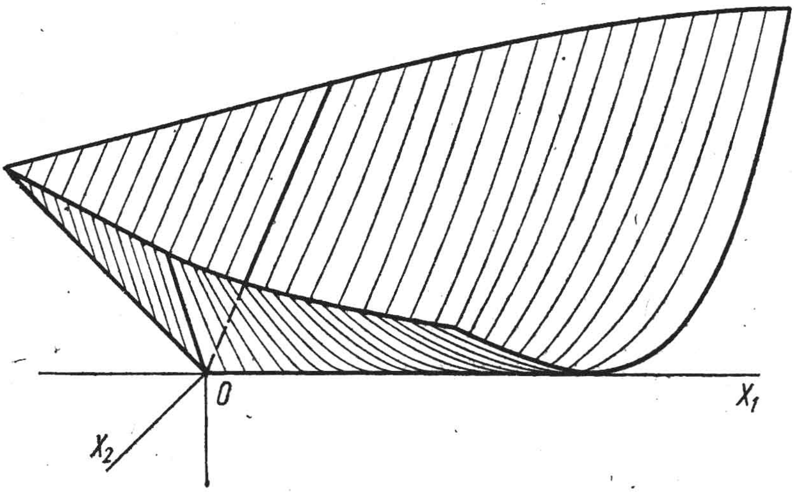


Рис. 2. График выпуклой конической поверхности $y=g(x_1,\ x_2)$

На рис. 2 представлен эскиз выпуклой конической поверхности — графика функции g.

Пример 1. Пусть

$$M(\lambda)=\{\mathbf{x}\in E_2\,|\,g(\mathbf{x})\leqslant\lambda_1,\ -x_2\leqslant\lambda_2\}.$$

Отображение M не является B-полунепрерывным снизу в точке $\lambda^0=(0,\ 0)$.

Действительно, для

$$\lambda(\varepsilon)=(\varepsilon\cdot e^{-\frac{1}{\varepsilon}},\ -\varepsilon),\ \ \varepsilon>0,$$

при достаточно малых ε выполняется $\varepsilon\cdot e^{-\frac{1}{\varepsilon}}<\varepsilon$ поэтому неравенство $g(\mathbf{x})\leqslant\varepsilon\cdot e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$ не может выполняться при $x_1\leqslant 0$, $-x_2\leqslant$

$\leqslant -\varepsilon$. Отсюда следует, что $x_1 > 0$, если только $\mathbf{x} \in M(\lambda(\varepsilon))$ и ε достаточно мало. Таким образом, мы имеем

$$\mathbf{x} \in M(\lambda(\varepsilon)) \Rightarrow (x_1, -\varepsilon) \in M(\lambda(\varepsilon)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot e^{-\frac{x_1}{\varepsilon}} \leqslant e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \cdot \varepsilon \Leftrightarrow x_1 \geqslant 1.$$

Поскольку $(0, 0) \in M(\lambda^0)$, отображение M не может быть B-полунепрерывным снизу в точке λ^0.

Пример 2. В условиях теоремы 4 отображение M не является, вообще говоря, H-полунепрерывным сверху.

Построим с помощью рассмотренной выше выпуклой функции g слабо аналитическую функцию h:

$$h(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + e^{-x_1} \quad (\mathbf{x} \in E_2)$$

и положим

$$M(\lambda) = \{\mathbf{x} \in E_2 \mid h(\mathbf{x}) \leqslant \lambda\} \quad (\lambda \in E).$$

Для того чтобы убедиться, что отображение M не является H-полунепрерывным сверху ни в одной точке $\lambda^0 = e^c$ $(c \in E)$, поступим следующим образом.

Рассмотрим соответствующую последовательность $\{\mathbf{x}^t\} \subset E_2$, $h(\mathbf{x}^t) \to c^c$ и положим $\lambda^t = h(\mathbf{x}^t)$. Очевидно, $\mathbf{x}^t \in M(\lambda^t)$. Пусть

$$\mathbf{z}^t = (x_1^t + 1,\ x_2^t - 1).$$

В силу свойств монотонности 6) и 7), которые справедливы и для h, из неравенств $\rho(\mathbf{x}^t, M(\lambda^0)) < 1$ следует, что $\mathbf{x}^t \in M(\lambda^0)$. Убедимся, что $h(\mathbf{z}^t) > e^c$ и всегда $\mathbf{z}^t \in M(\lambda^0)$, а, значит, $\rho(\mathbf{x}^t, M(\lambda^0)) \geqslant 1$ для достаточно больших t.

Пусть точки $\mathbf{x}^t$ и $\mathbf{z}^t$ при $t > 1$ имеют вид

$$\begin{aligned}
x_1^t &= (t-1)\ln(t-1) - c(t-1) - 1,\\
x_2^t &= t,\\
z_1^t &= (t-1)\ln(t-1) - c(t-1),\\
z_2^t &= t-1.
\end{aligned}$$

Для достаточно больших t $(t > t(c))$ выполняется $x_1^t > 0$ и, как легко убедиться,

$$g(\mathbf{z}^t) = e^c,$$
$$h(\mathbf{z}_t) > e^c.$$

Для того чтобы установить равенство

$$\lim_{t\to\infty} g(\mathbf{x}^t) = e^c$$

(из которого следует, что $h(\mathbf{x}^t) \to e^c$), мы воспользуемся теоремой о среднем:

$$t\ln t - (t-1)\ln(t-1) = 1 + \ln\tau,\quad \tau \in (t-1, t).$$

Отсюда

$$g(\mathbf{x}^t) = e^{c\frac{t-1}{t} + \frac{1}{t}(2+\ln\tau)}.$$

Поскольку $\tau<t$, правая часть здесь сходится к e^c. Таким образом, рассматриваемое отображение M не является H-полунепрерывным сверху ни в одной точке λ.

Важным частным случаем выпуклых слабо аналитических функций являются выпуклые полиномы. Из теоремы 4 следует, что задаваемое выпуклыми полиномами $g_i(\mathbf{x}), i=1, \ldots, m$ выпуклое полиномиальное отображение

$$M(\lambda) = \{\mathbf{x}\in E_n \mid g_i(\mathbf{x}) \leqslant \lambda_i,\ i=1, \ldots, m\}$$

является всюду B-полунепрерывным снизу.

Однако в главе V будет показано (см. пример 1 § 2), что рассматриваемое выпуклое полиномиальное отображение при $n\geqslant 4$ не является, вообще говоря, непрерывным по Хаусдорфу ни снизу, ни сверху; там же выделяются широкие подклассы выпуклых полиномов — так называемые простые полиномы, — для которых рассматриваемое точечно-множественное отображение является всюду H-непрерывным.

Следующая теорема 5 представляет собой обобщение результата Куммера, содержащегося в [6], и доказана в приводимой здесь формулировке Манделем [43]. Условие 2) является необходимым и достаточным для того, чтобы рассматриваемое в теореме 5 выпуклое полиномиальное отображение было представлено в виде $M(\lambda) = C(\lambda) + K$, где $C(\lambda)$ — выпуклый компакт и K — многогранный конус.

Теорема 5. *Пусть для отображения $M(\lambda) = \{\mathbf{x}\in E_n \mid g_i(\mathbf{x}) \leqslant \lambda_i,\ i=1, \ldots, m\}$ выполнены условия:*

1) *все функции g_i, $i=1, \ldots, m$ — выпуклые полиномы;*

2) *$\exists\lambda^0\in\Lambda$ такое, что $M(\lambda^0)$ представимо как сумма компакта и рецессивного конуса.*

Тогда существуют H-непрерывное отображение $C:\Lambda \to 2^{E_n}$ выпуклыми компактными множествами образов $C(\lambda)$ и конус K такие, что выполняется равенство

$$M(\lambda) = C(\lambda) + K \quad \forall\lambda\in\Lambda.$$

Доказательство. В [11] установлено (см. также § 1 главы IV), что K — рецессивный конус множества $M(\lambda)$ — есть многогранный конус с вершиной в точке $\mathbf{0}\in E_n$, который может быть представлен в виде

$$K = \{\mathbf{u}\in E_n \mid \mathbf{d}^j\mathbf{u} \leqslant 0,\ j=1, \ldots, p\}.$$

В силу условия 2)

$$\varphi_j(\lambda^0) := \sup\{\mathbf{d}^j\mathbf{x} \mid \mathbf{x}\in M(\lambda^0)\} < \infty,\ j=1, \ldots, p.$$

По теореме 5 § 3 все функции $\varphi_j(\lambda)$ непрерывны на Λ.