КОНСТРУКТИВНЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Р. Габасов
Ф. М. Кириллова
О. И. Костюкова
В. М. Ракецкий

Р. ГАБАСОВ,
Ф. М. КИРИЛЛОВА,
О. И. КОСТЮКОВА,
В. М. РАКЕЦКИЙ

КОНСТРУКТИВНЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Часть 4

ВЫПУКЛЫЕ ЗАДАЧИ

Минск
Издательство «Университетское»
1987

УДК 519.852

Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И., Ракецкий В. М. Конструктивные методы оптимизации. Ч. 4. Выпуклые задачи.— Мн.: изд-во «Университетское», 1987.— 223 с.

Методы, изложенные в предыдущих частях монографии, развиваются на выпуклые задачи, в которых ограничения формируются с помощью линейных равенств и неравенств, а целевая функция является выпуклой. Исследуются гладкие задачи с выпуклой квадратичной целевой функцией и негладкие задачи с целевой кусочно-линейной функцией, образованной из конечного набора линейных функций при помощи операций модуля и максимума. В динамическом аспекте рассмотрены терминальные задачи оптимального управления с выпуклыми критериями качества, задачи минимизации квадратичного функционала от траектории и управления (в дискретной и непрерывной постановках задачи А. М. Лётова) и задача минимизации среднеквадратичного уклонения. Для решения этих задач развивается метод опорных задач, разработанный во второй части книги.

Библиогр. 22 назв. Ил. 3.

Рекомендовано
Советом факультета прикладной математики
Белгосуниверситета имени В. И. Ленина

Рецензент — И. И. Еремин,
доктор физико-математических наук

$\text{Г}\,\dfrac{1502000000\text{—}077}{\text{М}317(03)\text{—}87}\,20\text{—}87$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Выпуклые задачи, вслед за линейными, составляют второй актуальный во многих приложениях раздел современной теории экстремальных задач. Для них разработана глубокая теория, предложены разнообразные численные методы, которые испытывались в практических расчетах и численных экспериментах на ЭВМ.

В данной части монографии изучаются методы решения двух специальных классов выпуклых задач. Первый класс составляют гладкие задачи, в которых ограничения формируются при помощи линейных равенств и неравенств, а целевая функция является выпуклой квадратичной функцией. Второй выбранный для исследования класс задач содержит негладкие задачи, отличающиеся от упомянутых гладких задач видом целевой функции. Последняя есть кусочно-линейная функция, образованная из конечного набора линейных функций при помощи операций взятия максимума и модуля. Общие выпуклые (гладкие и негладкие) задачи будут рассмотрены в следующей (заключительной) части монографии, где материал данной и предыдущих частей используется для нелинейных задач при конструировании численных методов первого и второго порядков.

В книге наряду со статическими экстремальными задачами исследуются их динамические аналоги, задачи оптимального управления, которые с позиций конструктивного подхода в литературе изучены еще недостаточно. В этой связи среди выпуклых задач оптимального управления можно отметить задачу А. М. Лётова об аналитическом конструировании регуляторов. Для решения выпуклых задач оптимального управления применяется метод опорных задач, разработанный во второй части монографии для линейного случая. Метод, основанный на специальной редукции вариационных задач к однотипным конечномерным, позволяет строить точные решения задач оптимального управления, содержащих разнообразные ограничения на управление и фазовую траекторию.

В монографии используются традиционные обозначения. Формулы, теоремы, подзаголовки в пределах каждого параграфа имеют одинарную нумерацию. При ссылках на результаты другого параграфа той же главы используется двойная нумерация, в которой первая цифра означает номер параграфа. Если формула находится вне данной главы, то дополнительно указывается и номер главы.

Соавторами результатов, помещенных в данной части монографии, являются Е. А. Костина (§ 1 гл. 2), А. В. Лубочкин (§ 5 гл. 4), С. В. Прищепова (§ 2 гл. 2), Б. Р. Умаров (§ 2 гл. 3), А. С. Чернушевич (§ 1 гл. 1; § 3 гл. 4), Е. И. Шилкина (§ 1, 2 гл. 2). Всем перечисленным сотрудникам выражаем нашу глубокую признательность.

Авторы

Глава 1. КВАДРАТИЧНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Стало традицией, приступая к изучению теории и методов экстремальных задач, в качестве простейшей задачи, содержащей принципиальные особенности оптимизационных задач, исходить из задачи минимизации на числовой прямой скалярной функции одной переменной. Основанием для этого служат известные из анализа фундаментальное понятие производной и классическая теорема Ферма, которые позволяют просто записать необходимое условие минимума для гладких функций. Условие стационарности открывает принципиальные возможности замены одних точек на другие, в которых значение оптимизируемой функции меньше, чем в исходных. Однако для построения эффективных алгоритмов поиска минимума такой информации качественного характера недостаточно, что отчетливо проявляется уже при минимизации функций нескольких переменных. Необходимые условия минимума здесь по форме остаются прежними и позволяют заменить точки, им не удовлетворяющие, на лучшие. Но если в одномерном случае можно было указать, в какой из двух сторон от исходной точки лежат лучшие точки, то в случае двух и более переменных количество направлений улучшения становится бесконечным. Получающаяся неопределенность, интересная с точки зрения качественной теории, ставит трудные проблемы для конструктивных методов. Могут сказать, что классический анализ уже снял указанную неопределенность: среди всех направлений из указанной точки, вдоль которых функция уменьшается, можно выбрать направление антиградиента, т. е. двигаться в направлении, противоположном градиенту. Основание: антиградиент — направление наискорейшего убывания гладкой функции.

Так ли это? В анализе упомянутое утверждение получается следующим образом. Запишем уравнение $x(t)=x^*+lt$ движения из точки x^* в направлении l. При этом движении значение функции $f(x)$ меняется по закону $\omega(t)=f(x(t))$. Скорость ее изменения в начальный момент времени $t=0$ равна

$$\frac{d\omega(t)}{dt}\bigg|_{t=0}=\left[\frac{\partial f(x(t))}{\partial x}\right]'\left[\frac{\partial x(t)}{\partial t}\right]_{t=0}=\operatorname{grad}' f(x^*)\,l.$$

Отсюда видно, что начальная скорость (кратко: скорость в точке x^*) зависит от выбора направления l. Естественно выбрать такое направление l, при котором вычисленная скорость минимальна. Но однородная линейная функция $l'\operatorname{grad} f(x^*)$ не имеет минимума по l. Поэтому на искомые направления нужно наложить дополнительные ограничения (нормировочные условия). Самой популярной (привычной, подручной) в математике является евклидова норма $\|l\|^2=l'l$. Использование ее приводит к упомянутой выше рекомендации $l=-\operatorname{grad} f(x^*)$, ибо $\min\limits_{\|l\|\leqslant 1} l'\operatorname{grad} f(x^*)=-\|\operatorname{grad} f(x^*)\|^2$. Однако евклидова норма — одна из бесчисленных типов норм и ее первоочередное использование никак не предусмотрено в исходной задаче $f(x)\to\min$, $x\in R^n$. Замена евклидовой нормы на другую приведет к другому направлению l движения из точки x^*. Возникшая неопределенность (теперь при выборе нормировочных условий) порождает принципиальные трудности при создании эффективных численных методов решения задачи $f(x)\to\min$, $x\in R^n$, и заставляет поднять ее из класса простейших экстремальных задач на высокие уровни сложности, для уверенной работы на которых нужен предварительный опыт решения простых задач.

Простейшими в данной монографии считаются линейные задачи (см. [1—3]). Вторую ступень сложности в иерархии экстремальных задач занимают, на наш взгляд, выпуклые квадратичные и выпуклые кусочно-линейные задачи, рассматриваемые в данной части монографии.

В настоящей главе разрабатываются методы решения задач квадратичного программирования [4, 5]. В качестве простейшей среди таких задач рассматривается задача $c'x+x'Dx/2\to\min$, $d_*\leqslant x\leqslant d^*$, с простыми ограничениями. Классический случай отсутствия ограничений (задача на безусловный минимум квадратичной функции) трактуется как предельный при $d_*=-\infty$, $d^*=+\infty$. Следует подчеркнуть, что ограничения-неравенства — самая характерная черта современной теории экстремальных задач. Они обусловлены многими причинами, корни которых в конечном счете лежат в практической деятельности.

§ 1. Простая задача. Прямые методы

Задачи минимизации выпуклых квадратичных функций, в которых на переменные наложены только прямые («параллелепипедные») ограничения, достаточно часто встречаются в приложениях как самостоятельные. Они нередко возникают и как вспомогательные при решении сложных экстремальных задач. Этим определяется значение эффективных методов их решения.

1. Постановка задачи. Критерий оптимальности. Простой задачей квадратичного программирования назовем задачу

$$f(x)=c'x+x'Dx/2\to\min,\quad d_*\leqslant x\leqslant d^*. \qquad (1)$$

Здесь c, x, d_*, d^* — n-векторы, $d_*<d^*$; $D=D(J,J)$ — $n\times n$-матрица, $D=D'$, $D\geqslant 0$, $J=\{1, 2, \ldots, n\}$.

Задача (1) при $\|d_*\|<\infty$, $\|d^*\|<\infty$ имеет решение, множество ее решений выпукло; решение задачи (1) существует и единственно и при $\|d_*\|=\infty$, $\|d^*\|=\infty$, если $D>0$.

Каждый n-вектор $x=x(J)=(x_j, j\in J)$, удовлетворяющий ограничениям задачи $(d_*\leqslant x\leqslant d^*)$, назовем планом. Решение задачи x^0 будем называть оптимальным планом. Субоптимальный (ε-оптимальный) план x^ε определяется неравенством $f(x^\varepsilon)-f(x^0)\leqslant\varepsilon$.

Методы построения оптимальных и субоптимальных планов принято разбивать на классы. Их изучение начнем с прямых методов. Будем считать, что наряду с математической моделью (1) известен начальный план x_0. Требуется организовать такой процесс преобразования планов, который при заданном $\varepsilon\geqslant 0$ ведет к построению ε-оптимального плана x^ε задачи (1).

Первый вопрос, который возникает при создании прямых методов решения, состоит в идентификации (распознавании) оптимального плана: не является ли данный план x оптимальным?

Чтобы ответить на этот вопрос, сначала вычислим в точке x градиент целевой функции $f(x)$:

$$\Delta(x)=\operatorname{grad} f(x)=c+Dx. \qquad (2)$$

С его помощью сравним план x с другим (произвольным) планом $\bar{x}=x+\Delta x$, т. е. найдем на этих планах приращение целевой функции:

$$\Delta f(x)=f(\bar{x})-f(x)=c'\Delta x+(x+\Delta x)'D(x+\Delta x)/2-\\ -x'Dx/2=\Delta'(x)\Delta x+\Delta x'D\Delta x/2. \qquad (3)$$

Формула приращения (3) позволяет выявить физический смысл компонент вектора $\Delta(x)$: j-я компонента $\Delta_j(x)$ равна скорости изменения в точке x целевой функции $f(x)$ при увеличении j-й компоненты x_j плана x.

С этим свойством тесно связан

Критерий оптимальности. Для оптимальности плана x в задаче (1) необходимо и достаточно выполнения соотношений

$$\Delta_j(x)\geqslant 0 \text{ при } x_j=d_{*j};\ \Delta_j(x)\leqslant 0 \text{ при } x_j=d_j^*;\\ \Delta_j(x)=0 \text{ при } d_{*j}<x_j<d_j^*,\ j\in J. \qquad (4)$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть x — оптимальный план, на котором соотношения (4) нарушаются по некоторым индексам из J. Обозначим через j_* один из таких индексов. Ясно, что $\Delta_{j_*}(x)\neq 0$. Построим семейство зависящих от числового параметра $\Theta\geqslant 0$ векторов $x(\Theta)=(x_j(\Theta),\ j\in J)$ с компонентами $x_{j_*}(\Theta)=$ $=x_{j_*}-\Theta\operatorname{sign}\Delta_{j_*}$; $x_j(\Theta)\equiv x_j$, $j\neq j_*$, $j\in J$, $\Theta\geqslant 0$. Существует такое число $\Theta^0>0$, что при всех $0\leqslant\Theta\leqslant\Theta^0$ векторы $x(\Theta)$ остаются планами задачи (1). Согласно (3) приращение целевой функции на планах x, $x(\Theta)$ равно

$$\Delta f(x)=-\Theta|\Delta_{j_*}(x)|+\Theta^2 d_{j_*j_*}/2.$$

Оно при всех достаточно малых $\Theta>0$ отрицательно. Это противоречит предположению об оптимальности плана x.

Достаточность. Пусть на плане x соотношения (4) выполняются. Тогда дополнительно при произвольном плане $\bar{x}=x+\Delta x$ выполняются и соотношения

$$\Delta x_j=\bar{x}_j-x_j\geqslant d_{*j}-d_{*j}=0, \text{ если } \Delta_j(x)>0;$$

$$\Delta x_j=\bar{x}_j-x_j\leqslant d_j^*-d_j^*=0, \text{ если } \Delta_j(x)<0,\ j\in J.$$

Поэтому $\Delta'(x)\Delta x=\sum_{j\in J}\Delta_j(x)\Delta x_j\geqslant 0$. Далее, при $D\geqslant 0$ для любого вектора Δx выполняется неравенство $\Delta x'D\Delta x\geqslant 0$. Подставив два последних неравенства в (3), получим неравенство $\Delta f(x)\geqslant 0$, доказывающее оптимальность плана x.

2. Опора задачи. Критерий субоптимальности. Критерий *оптимальности*, доказанный выше, позволяет распознать оптимальный план и остановить процесс решения задачи (1) на начальном или промежуточном плане. В прикладных задачах процесс решения целесообразно останавливать и в тех случаях, когда для заданного $\varepsilon > 0$ построен ε-оптимальный план. Распознавание ε-оптимальных планов осуществляется с помощью критерия субоптимальности.

Приведем сначала достаточное условие субоптимальности, следующее из формулы (3): если на плане x выполняется неравенство

$$\sum_{\Delta_j(x)>0,\ j\in J} \Delta_j(x)(x_j - d_{*j}) + \sum_{\Delta_j(x)<0,\ j\in J} \Delta_j(x)(x_j - d_j^*) \leqslant \varepsilon,$$

то x — ε-оптимальный план.

При $D=0$ последнее неравенство и необходимо для ε-оптимальности плана x [6]. Чтобы получить критерий субоптимальности в общем случае, введем новые понятия.

Множество индексов J разобьем на два подмножества $J_{\text{оц}}$, $J_{\text{н}}$: $J_{\text{оц}} \cup J_{\text{н}} = J$, $J_{\text{оц}} \cap J_{\text{н}} = \varnothing$. Построим матрицу $D_{\text{оц}} = D(J_{\text{оц}}, J_{\text{оц}})$.

Определение 1. Множество $J_{\text{оц}}$ называется опорой целевой функции, если $\det D_{\text{оц}} \neq 0$.

Пустое множество $J_{\text{оц}}$ считается опорой целевой функции по определению. При $D>0$ в качестве опоры целевой функции можно взять любое подмножество из J.

Множество $J_{\text{н}}$ (неопорных индексов) разобьем на два подмножества J_+, J_-: $J_+ \cup J_- = J_{\text{н}}$, $J_+ \cap J_- = \varnothing$. По этому разбиению построим n-вектор $\varkappa = (\varkappa_{\text{оц}}, \varkappa_+, \varkappa_-)$ с компонентами

$$\begin{gathered} \varkappa_+ = \varkappa(J_+) = d_*(J_+),\quad \varkappa_- = \varkappa(J_-) = d^*(J_-), \\ \varkappa_{\text{оц}} = \varkappa(J_{\text{оц}}) = -D_{\text{оц}}^{-1}[D(J_{\text{оц}}, J_{\text{н}})\varkappa(J_{\text{н}}) + c(J_{\text{оц}})]. \end{gathered} \tag{5}$$

Определение 2. Вектор $\varkappa$ назовем псевдопланом, сопровождающим совокупность $\{J_{\text{оц}}, J_+, J_-\}$.

Псевдоплан $\varkappa$ является планом, если его компонента $\varkappa_{\text{оц}}$ удовлетворяет неравенствам $d_*(J_{\text{оц}}) \leqslant \varkappa_{\text{оц}} \leqslant d^*(J_{\text{оц}})$. Подсчитаем на псевдоплане $\varkappa$ градиент целевой функции: $\Delta(\varkappa) = c + D\varkappa$.

Определение 3. Множества J_+, J_- назовем координаторами, совокупность $J_{\text{оп}} = \{J_{\text{оц}}, J_+, J_-\}$ — координированной опорой задачи (1), если на сопровождающем совокупность $J_{\text{оп}}$ псевдоплане $\varkappa$ выполняются неравенства

$$\Delta_j(\varkappa) \geqslant 0, \ j \in J_+; \ \Delta_j(\varkappa) \leqslant 0, \ j \in J_-. \tag{6}$$

При $D=0$ множества $J_+ \subset \{j \in J: \ c_j \geqslant 0\}$, $J_- \subset \{j \in J: c_j \leqslant 0\}$, $J_+ \cup J_- = J$, $J_+ \cap J_- = \varnothing$, являются координаторами. Если $D > 0$, то совокупность $J_{\text{оп}} = \{J_{\text{оц}}, J_+, J_-\}$, $J_{\text{оц}} = J$, $J_+ = J_- = \varnothing$, составляет координированную опору.

Определение 4. Пара $\{x, J_{\text{оп}}\}$ из плана и координированной опоры называется опорным планом.

На опорном плане $\{x, J_{\text{оп}}\}$ подсчитаем число

$$\beta(x, J_{\text{оп}}) = f(x) - f(\varkappa), \tag{7}$$

где $\varkappa$ — псевдоплан, сопровождающий опору $J_{\text{оп}}$. Согласно критерию оптимальности псевдоплан $\varkappa$, сопровождающий опору $J_{\text{оп}}$, является решением задачи $f(x) \to \min$, $d_{*j} \leqslant x_j \leqslant d_j^*$, $j \in J_{\text{н}}$, в которой отсутствуют ограничения $d_{*j} \leqslant x_j \leqslant d_j^*$, $j \in J_{\text{оц}}$, задачи (1). Поэтому $f(\varkappa) \leqslant \leqslant f(x^0)$ и, следовательно,

$$f(x) - f(x^0) \leqslant f(x) - f(\varkappa). \tag{8}$$

В связи с этим число (7) естественно назвать оценкой субоптимальности опорного плана.

Выясним содержание оценки субоптимальности $\beta(x, J_{\text{оп}})$. Для этого введем задачу, двойственную к (1):

$$\begin{gathered} \varphi(\lambda) = -\varkappa' D \varkappa/2 + d_*' v - d^{*\prime} w \to \max, \\ D\varkappa + c - v + w = 0, \ v \geqslant 0, \ w \geqslant 0, \ \lambda = (\varkappa, v, w). \end{gathered} \tag{9}$$

Совокупность $\lambda = (\varkappa, v, w)$, удовлетворяющая ограничениям задачи (9), называется двойственным планом задачи (1).

Координированной опоре $J_{\text{оп}}$ поставим в соответствие двойственный план $\lambda = (\varkappa, v, w)$ с компонентами: $\varkappa$ — сопровождающий псевдоплан (5); $v(J_{\text{оц}}) = w(J_{\text{оц}}) = 0$; $v_j = \Delta_j(x)$, $w_j = 0$, $j \in J_+$; $v_j = 0$, $w_j = -\Delta_j(x)$, $j \in J_-$. Построенные таким образом векторы λ, $\Delta(\varkappa)$ назовем двойственным планом и копланом, сопровождающими опору $J_{\text{оп}}$ (кратко: сопровождающими двойственным планом и копланом).

Пусть x, λ — произвольные прямой и двойственный планы задачи (1). На них выполняется следующая цепочка равенств и неравенств:

$$\varphi(\lambda) = -\varkappa' D\varkappa/2 + d_*' v - d^{*\prime} w \leqslant -\varkappa' D\varkappa/2 +$$

$$+\sum_{\Delta_j(\varkappa)<0}\Delta_j(\varkappa)\,d_j^*+\sum_{\Delta_j(\varkappa)>0}\Delta_j(\varkappa)\,d_{*j}\leqslant-\varkappa' D\varkappa/2+$$
$$+\Delta'(\varkappa)x=-\varkappa' D\varkappa/2+\varkappa' Dx+c'x=-\varkappa' D\varkappa/2-$$
$$-x'Dx/2+\varkappa' Dx+c'x+x'Dx/2=f(x)-$$
$$-(\varkappa-x)'D(\varkappa-x)/2\leqslant f(x), \qquad (10)$$

т. е.

$$\varphi(\lambda)\leqslant f(x). \qquad (11)$$

Если же двойственный план $\lambda=(\varkappa,\ v,\ w)$ сопровождает координированную опору, то

$$\varphi(\lambda)=f(\varkappa), \qquad (12)$$

ибо $\varphi(\lambda)=-\varkappa'D\varkappa/2+d_*'v-d^{*\prime}w=-\varkappa'D\varkappa/2+\Delta'(\varkappa)\varkappa=$ $=c'\varkappa+\varkappa'D\varkappa/2=f(\varkappa)$.

Покажем, что задача (9) имеет решение и среди ее решений существует двойственный план, сопровождающий некоторую координированную опору.

Пусть x^0 — оптимальный план задачи (1). Построим двойственный план

$$\begin{gathered}\varkappa^0=x^0;\ v_j^0=\Delta_j(x^0),\ w_j^0=0 \ \text{при}\ \Delta_j(x^0)\geqslant 0;\\ v_j^0=0,\ w_j^0=-\Delta_j(x^0)\ \text{при}\ \Delta_j(x^0)<0,\ j\in J.\end{gathered} \qquad (13)$$

Поскольку в силу (4) на плане x^0 и двойственном плане (13) все неравенства в (10) обращаются в равенства, то

$$\varphi(\lambda^0)=f(x^0). \qquad (14)$$

Из (11) и (14) следует, что λ^0 — решение задачи (9).

Положим $J_+=\{j\in J\colon\ \Delta_j(x^0)>0$ либо $\Delta_j(x^0)=0,$ $x_j^0=d_{*j}\}$, $J_-=\{j\in J\colon \Delta_j(x^0)<0$ либо $\Delta_j(x^0)=0,\ x_j^0=$ $=d_j^*\}$, $J_0=J\setminus(J_+\cup J_-)$. Из множества J_0 выделим максимальное подмножество $J_{\text{оц}}\subset J_0$ такое, что $\det D(J_{\text{оц}},$ $J_{\text{оц}})\neq 0$. Если $J_{\text{оц}}=J_0$, то совокупность $J_{\text{оп}}=\{J_{\text{оц}},\ J_+,\ J_-\}$ — координированная опора, $\lambda^0=(x^0,\ v^0,\ w^0)$ — ее сопровождающий двойственный план.

Пусть $J_{\text{оц}}\neq J_0$. Исходя из x^0, J_+, J_-, J_0, $J_{\text{оц}}$, осуществим следующую процедуру. Найдем индекс j_0: $j_0\in J_0$, $j_0\,\overline{\in}\,J_{\text{оц}}$. Построим направление l: $l(J\setminus(J_{\text{оц}}\cup j_0))=0$, $l_{j_0}=1$, $l(J_{\text{оц}})=-D^{-1}(J_{\text{оц}},\ J_{\text{оц}})D(J_{\text{оц}},\ j_0)$. В силу $D\geqslant 0$ и $\det D(J_{\text{оц}}\cup j_0,\ J_{\text{оц}}\cup j_0)=0$ оно удовлетворяет равенству

$$Dl=0. \qquad (15)$$

Построим новый план $\tilde{x}^0=x^0+\Theta l$, где $\Theta_0=\min\Theta_j$, $j\in J_{\text{оц}}\cup j_0$; $\Theta_j=(d_j^*-x_j^0)/l_j$ при $l_j>0$; $\Theta_j=(d_{*j}-x_j^0)/l_j$

при $l_j<0$; $\Theta_j=\infty$ при $l_j=0$. Из (15) и (3) следует, что $f(x^0)=f(\widetilde{x}^0)$, т. е. $\widetilde{x}^0$ — также оптимальный план задачи (1), причем $\Delta(x^0)=\Delta(\widetilde{x}^0)$.

Если $\Theta_0=\Theta_{j_0}$, то положим $\widetilde{J}_+=J_+$, $\widetilde{J}_-=J_-\cup j_0$, $\widetilde{J}_0=J_0\setminus j_0$, $\widetilde{J}_{оц}=J_{оц}$. Если $\Theta_0=\Theta_{j_*}$, $j_*\neq j_0$, то положим $\widetilde{J}_{оц}=J_{оц}\setminus j_*$, $\widetilde{J}_0=J_0\setminus j_*$; $\widetilde{J}_+=J_+\cup j_*$, $\widetilde{J}_-=J_-$ при $l_{j_*}<0$; $\widetilde{J}_+=J_+$, $J_-=J_-\cup j_*$ при $l_{j_*}>0$. В случае $\widetilde{J}_{оц}\neq\neq\widetilde{J}_0$ описанную процедуру повторим, исходя из $\widetilde{x}^0$, $\widetilde{J}_+$, $\widetilde{J}_-$, $\widetilde{J}_0$, $\widetilde{J}_{оц}$.

Поскольку $|\widetilde{J}_0|<|J_0|$ и $f(x^0)=f(\widetilde{x}^0)$, то через конечное число шагов реализуется случай $\bar{J}_{оц}=\bar{J}_0$ и будет построена координированная опора $\bar{J}_{оп}=\{\bar{J}_{оц}, \bar{J}_+, \bar{J}_-\}$ задачи (1), сопровождающий двойственный план $\bar{\lambda}^0=(\bar{x}^0, v^0, w^0)$ которой является решением задачи (9), причем

$$f(x^0)=f(\bar{x}^0). \tag{16}$$

Качество компонент x, $J_{оп}$ опорного плана $\{x, J_{оп}\}$ оценим с помощью чисел $\beta(x)$, $\beta(J_{оп})$: $\beta(x)=f(x)-f(x^0)$ — мера неоптимальности плана, $\beta(J_{оп})=\varphi(\lambda^0)-\varphi(\lambda)$ — мера неоптимальности опоры. Здесь λ^0 — оптимальный двойственный план (решение задачи (9)), λ — сопровождающий двойственный план.

По аналогии с тем, что при $\beta(x)=0$ план x называется оптимальным, назовем опору $J_{оп}$ оптимальной, если $\beta(J_{оп})=0$.

Лемма. Оценка субоптимальности опорного плана допускает разложение

$$\beta(x, J_{оп})=\beta(x)+\beta(J_{оп}). \tag{17}$$

Разложение (17) следует из (7), (12), (14).

Критерий субоптимальности. При любом $\varepsilon\geqslant0$ для ε-оптимальности в задаче (1) плана x необходимо и достаточно существования такой опоры задачи $J_{оп}$, при которой оценка субоптимальности опорного плана $\{x, J_{оп}\}$ удовлетворяет неравенству $\beta(x, J_{оп})\leqslant\varepsilon$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть x — ε-оптимальный план, т. е. $f(x)-f(x^0)\leqslant\varepsilon$. Припишем ему оптимальную опору $J_{оп}=J^0_{оп}$. Тогда в силу леммы имеем $\beta(x, J_{оп})=\beta(x)+\beta(J_{оп})=\beta(x)=f(x)-f(x^0)\leqslant\varepsilon$.

Достаточность. Если $\beta(x, J_{оп}) \leqslant \varepsilon$, то из (7), (8) получаем $f(x) - f(x^0) \leqslant \varepsilon$.

При $\varepsilon = 0$ критерий субоптимальности принимает форму следующего критерия оптимальности: для оптимальности плана x необходимо и достаточно существования такой оптимальной координированной опоры $J_{оп}$, что $f(\varkappa) = f(x)$. Это утверждение (теорема двойственности) эквивалентно критерию оптимальности из п. 1.

Действительно, пусть существует такая координированная опора $J_{оп}$, что на сопровождающем ее псевдоплане $\varkappa$ справедливо равенство $f(x) = f(\varkappa)$. Покажем, что для x и $\Delta(x) = Dx + c$ выполняются условия оптимальности (4). Согласно (3) имеем

$$f(x) - f(\varkappa) = \Delta'(\varkappa)(x - \varkappa) + (x - \varkappa)'D(x - \varkappa)/2. \tag{18}$$

Из условий (5), (6) и того, что $D \geqslant 0$, следуют неравенства $\Delta_j(\varkappa)(x_j - \varkappa_j) \geqslant 0$, $j \in J$; $(x - \varkappa)'D(x - \varkappa) \geqslant 0$. По предположению, $f(x) - f(\varkappa) = 0$. Поэтому

$$\Delta_j(\varkappa)(x_j - \varkappa_j) = 0, \ j \in J; \tag{19}$$

$$(x - \varkappa)'D(x - \varkappa) = 0. \tag{20}$$

Из (20) в силу $D \geqslant 0$ получаем $D(x - \varkappa) = 0$, т. е.

$$\Delta(x) = \Delta(\varkappa). \tag{21}$$

Подставив (21) в (19) и учитывая (5), убеждаемся в справедливости соотношений (4).

Предположим теперь, что для плана x^0 задачи (1) выполняются условия оптимальности (4). Выше показано (см. (13)—(15)), что тогда существует такая координированная опора $\bar{J}_{оп} = \{\bar{J}_{оц}, \bar{J}_+, \bar{J}_-\}$, что на сопровождающем ее псевдоплане $\bar{\varkappa}^0$ (двойственном плане $\lambda^0 = (\bar{\varkappa}^0, v^0, w^0)$) имеет место равенство (16): $f(x^0) = f(\bar{\varkappa}^0)$. Эквивалентность двух критериев оптимальности полностью доказана.

Приведенный критерий субоптимальности показывает, что идентификация ε-оптимального плана осуществляется при помощи специального дополнительного элемента, названного опорой задачи. Опора задачи будет играть решающую роль и в дальнейшем при осуществлении итерации адаптивного метода. Поэтому имеет смысл остановиться на особенностях построения начальной опоры.

Выше отмечалось, что опора тесно связана с двойственной задачей. В частности, было показано, что оптимальная координированная опора может быть построена с помощью оптимальных планов двойственной задачи. В связи с этим для формирования начальной координированной опоры следует использовать информацию экспертов о возможных оптимальных значениях двойственных планов. В общем случае подобная информация может оказаться недостаточной для построения координированной опоры. Рассмотрим две типичные ситуации:

1) нет никакой информации об опоре;

2) имеется совокупность $\{J_{\text{оц}}, J_+, J_-\}$, $\det D_{\text{оц}} \neq 0$, не удовлетворяющая условиям (6).

Для обработки информации, доступной в каждой ситуации, ниже предлагаются две процедуры. Обе процедуры строят координированную опору, но учитывают разные данные, которые формируются специальным образом по доступной информации: в случае 1) полагаем $\varkappa = x$, $J_{\text{оц}}$ — подмножество из $\{j \in J : \Delta_j(x) = 0\}$, для которого $\det D(J_{\text{оц}}, J_{\text{оц}}) \neq 0$; в случае 2) полагаем $\varkappa(J_+) = d_*(J_+)$, $\varkappa(J_-) = d^*(J_-)$, $\varkappa(J_{\text{оц}}) = -D^{-1}(J_{\text{оц}}, J_{\text{оц}}) \times \times (c(J_{\text{оц}}) + D(J_{\text{оц}}, J_{\text{н}})\varkappa(J_{\text{н}}))$, $J_{\text{н}} = J \setminus J_{\text{оц}}$.

П р о ц е д у р а 1. Исходные данные: n-вектор $\varkappa$ и множество $J_{\text{оц}}$, удовлетворяющие (при $J_{\text{оц}} \neq \varnothing$) условиям

$$\begin{gathered} \det D(J_{\text{оц}}, J_{\text{оц}}) \neq 0,\ \Delta_j(\varkappa) = 0,\ j \in J_{\text{оц}}, \\ d_{*j} \leqslant \varkappa_j \leqslant d_j^*,\ j \in J_{\text{н}} = J \setminus J_{\text{оц}};\ \Delta(\varkappa) = c + Dx. \end{gathered} \tag{22}$$

Положим $J_+ = \{j \in J_{\text{н}} : \Delta_j(\varkappa) \geqslant 0\}$, $z = \varkappa$. Осуществим следующие операции, используя

$$\text{множества } J_{\text{оц}},\ J_+, \text{ вектор } z. \tag{23}$$

Пусть

$$\begin{gathered} l_j = d_j^* - z_j,\quad j \in J_- = J_{\text{н}} \setminus J_+;\ [J_{\text{н}} = J \setminus J_{\text{оц}};]\ l_j = \\ = d_{*j} - z_j,\ j \in J_+;\ l(J_{\text{оц}}) = -D^{-1}(J_{\text{оц}}, J_{\text{оц}}) \times \\ \times D(J_{\text{оц}}, J_{\text{н}})\, l(J_{\text{н}});\ \delta = Dl,\ \Delta = c + Dz. \end{gathered} \tag{24}$$

Найдем числа

$$\begin{gathered} \sigma_j = -\Delta_j/\delta_j \text{ при } \delta_j < 0,\ j \in J_+, \text{ или } \delta_j > 0,\ j \in J_-; \\ \sigma_j = +\infty \text{ в остальных случаях, } j \in J_{\text{н}}; \\ \sigma_{j_*} = \min \sigma_j,\ j \in J_{\text{н}};\ \sigma_0 = \min\{1, \sigma_{j_*}\}. \end{gathered} \tag{25}$$

Если $\sigma_0 = 1$, то совокупность $\{J_{\text{оц}}, J_+, J_-\}$ — координированная опора. Сопровождающий ее псевдоплан $\varkappa = z + \sigma_0 l$.

Предположим, что $\sigma_0 < 1$. Поскольку $\delta_{j_*} = [D(j_*, J_н) - D(j_*, J_{оц}) D^{-1}(J_{оц}, J_{оц}) D(J_{оц}, J_н)] l(J_н) \neq 0$, то и $\alpha = D(j_*, j_*) - D(j_*, J_{оц}) D^{-1}(J_{оц}, J_{оц}) D(J_{оц}, j_*) \neq 0$. Следовательно, $\det D(J_{оц} \cup j_*, J_{оц} \cup j_*) \neq 0$. Повторим операции (24), (25), заменив данные (23) на

$$\tilde{J}_{оц} = J_{оц} \cup j_*, \quad \tilde{J}_+ = J_+ \setminus j_*, \quad \tilde{z} = z + \sigma_0 l. \tag{26}$$

Очевидно, что количество таких повторений не превосходит числа $n = |J|$.

Замечание. В силу (11) справедливо неравенство $f(x) - f(x^0) \leqslant \beta(x, \lambda)$, где $\beta(x, \lambda) = f(x) - \varphi(\lambda)$, $\lambda = (\varkappa, v, w)$ — двойственный план задачи (1), компоненты v, w которого согласованы с $\varkappa$:

$$\begin{aligned} &v_j = \Delta_j(\varkappa); \quad w_j = 0 \text{ при } \Delta_j(x) \geqslant 0; \\ &v_j = 0, \quad w_j = -\Delta_j(x) \text{ при } \Delta_j(x) < 0, \quad j \in J. \end{aligned} \tag{27}$$

Поэтому качество плана x можно наряду с $\beta(x, J_{оп})$ оценить и с помощью числа $\beta(x, \lambda^{нач})$, где $\lambda^{нач} = (\varkappa^{нач}, v^{нач}, w^{нач})$, $v_j^{нач} = \Delta_j(\varkappa^{нач})$, $w_j^{нач} = 0$ при $\Delta_j(\varkappa^{нач}) \geqslant 0$; $v_j^{нач} = 0$, $w_j^{нач} = -\Delta_j(\varkappa^{нач})$ при $\Delta_j(\varkappa^{нач}) < 0$, $j \in J$; $\varkappa^{нач} = x$ в случае 1); $\varkappa^{нач}$ — псевдоплан, сопровождающий совокупность $\{J_{оц}, J_+, J_-\}$ в случае 2). Покажем, что процедура 1 строит такую начальную кординированную опору $J_{оп}$, что $\beta(x, J_{оп}) \leqslant \beta(x, \lambda^{нач})$, т. е. оценка качества плана x, которую дает число $\beta(x, J_{оп})$, точнее, чем при использовании числа $\beta(x, \lambda^{нач})$.

Пусть $\lambda = (z, v, w)$ и $\tilde{\lambda} = (\tilde{z}, \tilde{v}, \tilde{w})$ — двойственные планы (27), соответствующие данным (23) и (26). Покажем, что $\varphi(\tilde{\lambda}) \geqslant \varphi(\lambda)$. Действительно, представим приращение $\Delta\varphi(\lambda) = \varphi(\tilde{\lambda}) - \varphi(\lambda)$ в виде

$$\Delta\varphi(\lambda) = -(z + \sigma_0 l)' D (z + \sigma_0 l)/2 + z' D z/2 + d_*' (\tilde{v} - v) - d^{*\prime} (\tilde{w} - w) = -\sigma_0^2 l' D l/2 - \sigma_0 \delta' z + d_*' \Delta v - d^{*\prime} \Delta w, \tag{28}$$

где $\Delta v = \tilde{v} - v$, $\Delta w = \tilde{w} - w$. Поскольку, по построению, $\Delta_j(z) \geqslant 0$, $\Delta_j(\tilde{z}) \geqslant 0$, $j \in J_+$; $\Delta_j(z) \leqslant 0$, $\Delta_j(\tilde{z}) \leqslant 0$, $j \in J_-$; $\Delta_j(z) = \Delta_j(\tilde{z}) = 0$, $j \in J_{оц}$, то согласно (27) имеем

$$\begin{gathered} \Delta v_j = \Delta w_j = 0, \quad j \in J_{оц}; \quad \Delta v_j = \sigma_0 \delta_j, \quad \Delta w_j = 0, \quad j \in J_+; \\ \Delta v_j = 0, \quad \Delta w_j = -\sigma_0 \delta_j, \quad j \in J_-. \end{gathered} \tag{29}$$

Подставив (29) в (28), получим

$$\Delta\varphi(\lambda) = -\sigma_0^2 l'Dl/2 - \sigma_0\delta'z + d'_*(J_+)\delta(J_+)\sigma_0 + $$
$$+ d^{*\prime}(J_-)\delta(J_-)\sigma_0 + \sigma_0(z(J_{оц}) + l(J_{оц}))\delta(J_{оц}) =$$
$$= -\sigma_0^2 l'\delta/2 - \sigma_0\delta'z + \sigma_0\delta'(z + l) = -\sigma_0^2 l'\delta/2 +$$
$$+ \sigma_0\delta' l = (1 - \sigma_0/2)\sigma_0 l'Dl.$$

Используя последнее равенство и соотношения $0 \leqslant \sigma_0 \leqslant 1$, $l'Dl \geqslant 0$, убеждаемся в справедливости неравенства $\varphi(\tilde{\lambda}) \geqslant \varphi(\lambda)$. Следовательно,

$$\varphi(\lambda^{нач}) \leqslant \varphi(\lambda^*) = f(\varkappa^*), \tag{30}$$

где $\lambda^* = (\varkappa^*, v^*, w^*)$ — двойственный план, сопровождающий опору $J_{оп}$, построенную согласно процедуре 1. С учетом (30) получаем

$$\beta(x, \lambda^{нач}) = f(x) - \varphi(\lambda^{нач}) \geqslant \beta(x, J_{оп}) = f(x) - f(\varkappa^*).$$

П р о ц е д у р а 2. Исходные данные:

$$n\text{ — вектор } \varkappa \text{ и множество } J_{оц}, \tag{31}$$

удовлетворяющие (при $J_{оц} \neq \varnothing$) условиям (22).

Если выполняются соотношения

$$\begin{gathered} \varkappa_j = d_{*j} \text{ при } \Delta_j(\varkappa) > 0;\ \varkappa_j = d_j^* \text{ при } \Delta_j(\varkappa) < 0; \\ \varkappa_j = d_{*j} \vee d_j^* \text{ при } \Delta_j(\varkappa) = 0,\ j \in J_н = J \setminus J_{оц}, \end{gathered} \tag{32}$$

то совокупность $\{J_{оц}, J_+, J_-\}$, $J_+ = \{j \in J_н : \varkappa_j = d_{*j}\}$, $J_- = J \setminus (J_{оц} \cup J_+)$ является координированной опорой, которую сопровождает псевдоплан $\varkappa$.

Предположим, что соотношения (32) не выполняются. Тогда найдется индекс $j_* \in J_н$, для которого $\varkappa_{j_*} > d_{*j_*}$ при $\Delta_j(\varkappa) > 0$; либо $\varkappa_{j_*} < d^*_{j_*}$ при $\Delta_{j_*}(\varkappa) < 0$; либо $d_{*j_*} < \varkappa_{j_*} < d^*_{j_*}$ при $\Delta_{j_*}(\varkappa) = 0$. Положим

$$l_{j_*} = -1,\ \Theta = \varkappa_{j_*} - d_{*j_*} \text{ при } \Delta_{j_*}(\varkappa) \geqslant 0;$$
$$l_{j_*} = 1,\ \Theta = d^*_{j_*} - \varkappa_{j_*} \text{ при } \Delta_{j_*}(\varkappa) < 0;$$
$$l_j = 0,\ j \in J_н \setminus j_*;$$
$$l(J_{оц}) = -D^{-1}(J_{оц}, J_{оц})D(J_{оц}, j_*)l_{j_*};$$
$$\alpha_{j_*} = (D(j_*, j_*) - D(j_*, J_{оц})D^{-1}(J_{оц}, J_{оц})D(J_{оц}, j_*))l_{j_*};$$
$$\sigma = -\Delta_{j_*}(\varkappa)/\alpha_{j_*} \text{ при } \alpha_{j_*} \neq 0;\ \sigma = \infty \text{ при } \alpha_{j_*} = 0;$$
$$\sigma_0 = \min\{\Theta, \sigma\}.$$