

Argyris
Mlejnek

DIE METHODE DER FINITEN ELEMENTE

Band I

Vieweg

John Argyris, F.R.S.
Hans-Peter Mlejnek

DIE METHODE DER FINITEN ELEMENTE

in der elementaren Strukturmechanik

Band I

Verschiebungsmethode in der Statik

Mit 547 Abbildungen



Friedr. Vieweg & Sohn Braunschweig/Wiesbaden

1986

Alle Rechte vorbehalten

© Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig 1986



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Satz: Friedr. Vieweg & Sohn, Wiesbaden

Druck: Lengericher Handelsdruckerei, Lengerich

Buchbinderische Verarbeitung: Hunke + Schröder, Iserlohn

Printed in Germany

ISBN 3-528-08919-9

John Argyris, F.R.S.
Hans-Peter Mlejnek

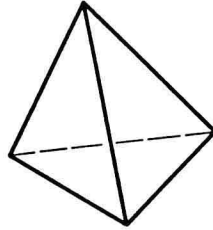
DIE METHODE
DER
FINITEN ELEMENTE

Band I

μηδεις ἀγεωμέτρητος εἰσίτω
Plato

DIE METHODE DER FINITEN ELEMENTE

in der elementaren Strukturmechanik



Band I
Verschiebungsmethode in der Statik

Band II
Kraft- und gemischte Methoden, Nichtlinearitäten

Band III
Einführung in die Dynamik

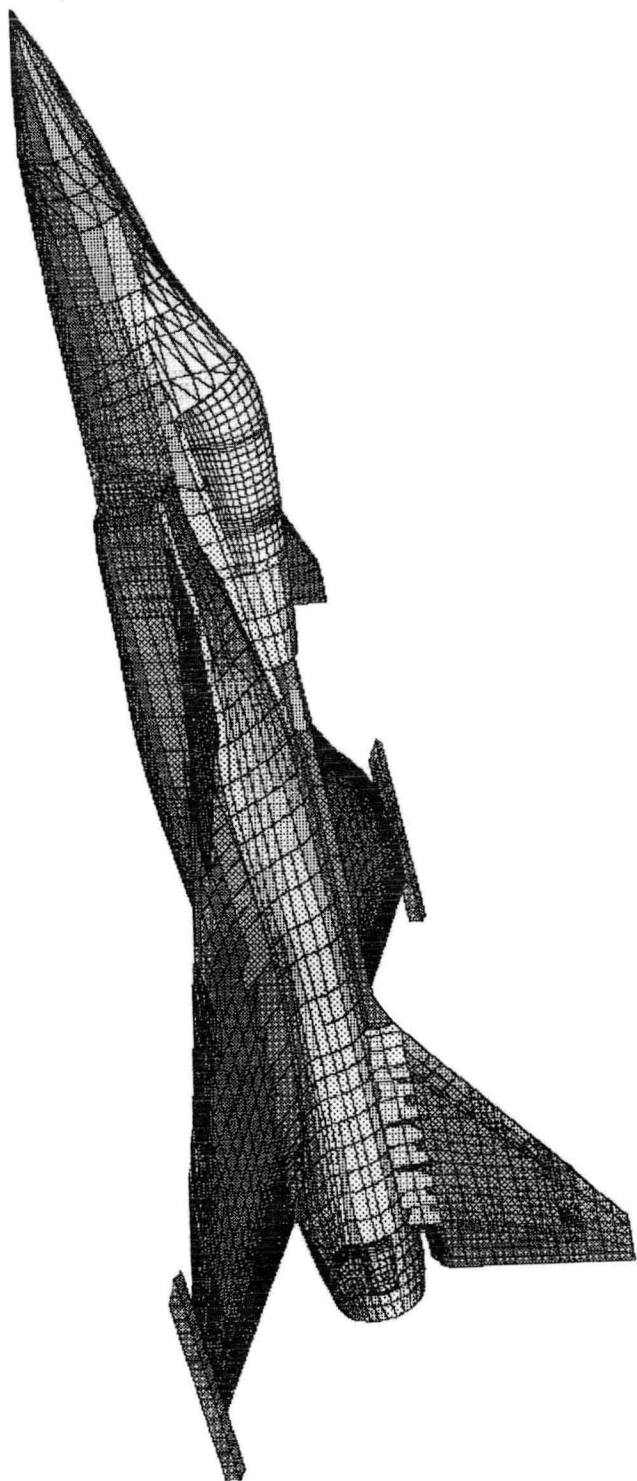
Dedicated to *H.T.M.A.*

H for Hermeneutics of a stricken ego

T for Therapeutics of body and soul

M for a golden Middle way

A for Ἀριστεύειν in Aristocracy



Hochleistungsflugzeug *Gripen* („Greif“), Saab-Scania AB
Finite Element Idealisierung.

Prolegomena

“To strive, to seek, to find,
and not to yield”

Alfred, Lord Tennyson

Dieses dreibändige Lehrbuch der Strukturmechanik faßt einen ersten und elementaren Teil der Forschungs- und Vorlesungstätigkeit zusammen, die zuerst am Imperial College of Science and Technology in London in den Jahren 1949–59 und später an der Universität Stuttgart entwickelt wurden. Es versucht, 35 Jahre intensiver, ja revolutionierender wissenschaftlicher Entwicklung so darzustellen, daß sie ohne spezielles Fachwissen von einem akademisch vorgebildeten Ingenieur verstanden werden kann. Vorausgesetzt werden Kenntnisse des Calculus, der Grundlagen der Vektor- und Matrizenrechnung, der Festigkeitslehre sowie der klassischen Elastizitäts- und Plastizitätstheorie, also in etwa der Wissensumfang, der mit dem Vordiplom an deutschen Hochschulen erreicht wird. Ein Teil dieser drei Bände fußt auf der Vorlesungsreihe „Matrizentheorie der Statik und Dynamik“, die z. Zt. im Fachbereich Luft- und Raumfahrttechnik der Universität Stuttgart sowie im “third year undergraduate and fourth year postgraduate course” im “subdepartment of aeronautical structures, Imperial College” gelesen wird. Naturgemäß bietet ein Buch Platz für all das, was dem knappen Spielraum einer Vorlesung zum Opfer fällt. So führt diese Einführung weit über den Rahmen der Vorlesung hinaus bis zum – hoffentlich – aktuellen Wissensstand der modernen Strukturmechanik.

Vielleicht sollte ein zentraler Gesichtspunkt unserer Lehr- und Forschungsphilosophie an den Stuttgarter und Imperial College Schulen schon in diesem Vorwort hervorgehoben werden. Wir sind überzeugt, daß die von uns propagierten Methoden nur dann vom Ingenieur positiv aufgenommen und verwertet werden können, wenn sie seiner Vorstellungswelt entsprechend dargelegt werden. Dazu gehört in erster Linie eine mechanische und geometrische Argumentation, die bildhaft und fern jeder unnötigen mathematischen Abstraktion vorgeht. Jeder Versuch, eine redundante Zwangsjacke von rein mathematischen Begriffen dem akademischen Ingenieur aufzuzwingen, ist nach unserem Dafürhalten zum Scheitern verurteilt und zeugt letzten Endes von begrenztem geometrischen Vorstellungsvermögen, was für einen Ingenieur fatal wäre. Ein besonders lehrreiches Beispiel bildet der Arbeitsbegriff *versus* dem variationellen Denken des angewandten Mathematikers. Den Ingenieur spricht letzten Endes das Prinzip der virtuellen Arbeit, auch wenn es wie hier in einer großen Allgemeinheit vorgetragen wird, unmittelbar wie einen angehenden Archimedes an. Im Gegensatz dazu steht die Variationsmethode, die letzten Endes umständlicher und weniger allgemein als der mechanistische Begriff der virtuellen Arbeit ist und *last not least* für die große Mehrheit der in der Praxis tätigen Ingenieure unverständlich, wenn nicht fremd bleiben muß. Wir anerkennen aber durchaus, daß eine Darstellung der Theorie für angewandte oder reine Mathematiker notwendigerweise abstrakter erfolgen kann und muß. Dies ist zum Beispiel in einer modernen computer-

gerechten Kontinuumsmechanik unerlässlich, die maßgeblich auf einer konsequenten Anwendung der Galerkinschen Methode bzw. verwandter Verfahren, die unmittelbar auf die Differentialgleichungen des Kontinuums wie eines Fluidums oder Gases angewendet werden, beruht.

Ein weiterer grundlegender Gesichtspunkt, der für dieses Werk charakteristisch ist, besteht in der Anwendung der sogenannten natürlichen Beschreibung des Deformations- und Spannungszustandes eines deformierbaren Körpers, die ausschließlich auf die Stuttgarter Schule zurückgeht. Zwei zentrale Vorstellungen gestalten insbesondere in dieser Auffassung die Theorie. Erstens besteht *ab initio* eine klare Spaltung des Verschiebungszustandes in Starrkörperbewegungen und reine Deformationszustände. Zweitens erfolgt im direkten Gegensatz zu der Cauchyschen kartesischen (oder verwandten) Beschreibung der Spannungen und Dehnungen in unserer Theorie deren Definition ausschließlich homogen und enthält nur Längsmaße. Damit erscheinen Schubdehnungen und -spannungen nur als abgeleitete Größen. Diese und damit zusammenhängende weitere Begriffe führen auf eine einfachere, aber insbesondere elegantere Theorie, die sich im Computer auch durch höhere Genauigkeit auszeichnet, was unter anderem auf die homogenen Beschreibungen der Spannungen und Dehnungen und auf eine kleinere und günstigere Anzahl von Rechenoperationen zurückgeht. Je komplizierter und nichtlinearer das Problem ist, desto mehr treten die Vorzüge der neuen Betrachtung hervor.

In obiger Darstellung vermissen wir noch einen Rückblick, der jüngeren Studenten im allgemeinen unbekannt sein dürfte. Um dies zu verstehen, müssen wir uns ca. 35 bis 40 Jahre zurückversetzen. Damals führte das Aufkommen der Düsen- und Raketenantriebe zu immer höheren Geschwindigkeiten der Flugzeuge und ermöglichte auch den ersten großen Einsatz der Raketenträger. Die Luft- und Raumfahrt ist aber notwendigerweise so stark auf minimales, sprich optimales, Gewicht bei hoher Sicherheit angewiesen, daß sie auf extreme Genauigkeit der Strukturberechnung immer angewiesen war; dies steht im Gegensatz zu dem traditionellen Bau- und Maschinenbauingenieurbereich, zumindest vor den 60er Jahren. Zugleich haben die vorerwähnten höheren Geschwindigkeiten durch die damit zusammenhängenden aerodynamischen Erfordernisse neue Formen der Flugzeuge, wie z. B. den Pfeilflügel, geradezu erzwungen, die die Strukturingenieure vor sehr schwierige Probleme stellten. Nun wurden aber ungefähr zu gleicher Zeit und unabhängig voneinander während der letzten zwei Jahre des Zweiten Weltkriegs die ersten elektromechanischen Digitalrechner in Deutschland, England und USA entwickelt und zuerst zaghaft in der militärischen Logistik eingesetzt. Sie erwiesen sich aber im Geiste vorausschauender Luftfahrtingenieure als ein auslösender Funke, der die geistigen Voraussetzungen für die Entwicklung der revolutionierenden Methoden der Matrizentheorie der Strukturmechanik zur Lösung der brennenden Probleme der neuen Generation der Flugzeuge schuf. Im wesentlichen führte dies zum Aufbau der sogenannten Matrizenkraftmethode für die Berechnung der komplizierten Rümpfe und zur Matrizenverschiebungsmethode für die Analyse der neuen Pfeilflügel. Die erste vollständige und zugleich duale Theorie dieser Methoden wurde Ende der 40er Jahre vom Erstautor am Imperial College London und unabhängig davon etwas später, wenn auch nicht in so allgemeiner Form, bei Boeing, Seattle, USA, durch Jan Turner, Ray Clough und andere entwickelt. In Europa – und das im Gegensatz zu den fortschrittsgläubigen USA – mußten enorme Widerstände gegen diese ungewohnten neuen Methoden überwunden werden. Diese rechnerorientierten

Verfahren zwangen die Statiker und Dynamiker zum radikalen Umdenken, dem sich nicht jeder gewachsen zeigte. Anfang der 60er Jahre erwiesen sich aber die neuen Methoden auch in Europa so weit überlegen, daß in rascher Folge die alten Denkprozesse und ungläubigen Thomasse zum Aussterben verurteilt waren. Wie es dem Leser bekannt sein wird, hat diese Umstellung längst das gesamte Ingenieurwesen, wie den Bausektor und das Maschinenbauwesen, erfaßt. Dies zeigt sich auch an unserem Institut, an dem über 85 % der Forschungsarbeiten außerhalb der Luft- und Raumfahrt liegen und u. a. den Automobil- und Schiffsbau sowie Kernreaktoren umfassen.

Inzwischen wurden diese neuen Theorien unter dem Oberbegriff der Methode der Finiten Elemente zusammengefaßt, den wir auch hier in diesem Werk verwenden. Wie die Schöpfer der Revolution aber erkennen mußten, ließen sich die neuen Methoden über die Beschränkungen der Festkörpermechanik hinweg auf Hydro- und Gasdynamik unter Einschluß der Thermodynamik, Plasmaphysik, elektromagnetischer Felder usw. und damit auf die gesamte angewandte Mechanik mit großem Erfolg anwenden. Dies schuf den neuen interdisziplinären Begriff der Computermechanik, ohne die ein moderner Ingenieur nicht mehr ausgebildet werden kann und darf. Diese neuen Anwendungsgebiete können wir aber in diesem Werk, das ausschließlich der Strukturmechanik gewidmet ist, nicht behandeln. Nichtsdestoweniger bildet heute die Computermechanik eine Einheit, die über alle technischen Fakultäten hinweg wirkt. Das vorliegende Werk soll dem jungen Leser – bei aller selbstaufgelegter Beschränkung auf die Strukturmechanik – vor Augen führen, daß der Computer in den letzten 30 Jahren eine weitaus größere Umwälzung unserer wissenschaftlichen Denkprozesse als die Differential- und Integralrechnung durch Leibniz und Newton im 17. Jahrhundert bewirkt hat [1.21]. Traditionelle Bereiche der Statik, wie z. B. im Bauwesen und Maschinenbau, dürfen mit Recht als jeweilige Untermengen (nach dem schönen Sprachgebrauch der Mathematiker) der Computermechanik aufgefaßt werden und bedürfen keiner getrennten Darstellung.

Eines sollten sich aber angehende Ingenieure der Luft- und Raumfahrt und deren Dozenten auch weiterhin vergegenwärtigen. Wir haben vorher dargelegt, wie die Revolution der neuen Methodik in der Luft- und Raumfahrt entstanden ist. Letzten Endes war dies die notwendige Folge der viel größeren Kompliziertheit und des größeren Schwierigkeitsgrads der Statik und Dynamik im Luftfahrtbereich als in anderen Ingenieurwissenschaften. Dies ist, zumindest im linearen Bereich, immer noch der Fall. Der Senior-Autor kann sich noch gut an die Mitte der Vierzigerjahre erinnern, als das Dreieckselement für die Pfeilflügel als *deus ex machina* erfunden und mit einer ausgereiften Matrizenverschiebungsmethode verbunden werden mußte. Tatsächlich sind Subtilität und innovative Art des Denkens notwendigerweise immer charakteristische Eigenschaften der Luft- und Raumfahrt-Wissenschaftler gewesen. Wir können es damit als gegeben ansehen, daß eine hochentwickelte Computermechanik ohne den Anstoß der Luftfahrttechnik erst viel später hätte entwickelt werden können. Dieses oft als eigenwillig erscheinende Charakteristikum der Luft- und Raumfahrt, als vorwärts treibender Impetus der Wissenschaft zu dienen, ist aber geblieben. Jedoch bedingen gerade diese Eigenschaften der Luft- und Raumfahrt ein tiefes Verständnis der Grundlagenwissenschaften und ein physikalisch intuitives Denken. Ohne dieses können akademisch vorgebildete Ingenieure nicht die Herausforderungen der zukünftigen Entwicklungen meistern. Wir folgern: ein Fachbereich der Luft- und Raumfahrt kann sich, zumindest in einer Universität, nur auf der Prämisse des Primats der

Grundlagenwissenschaft bewähren. Diese Schlußfolgerung ist für die angelsächsische Denkart eine Selbstverständlichkeit und hat in Europa ihre Bestätigung am Imperial College in London und an der Universität in Stuttgart zum Wohle der Industrie gefunden. Selbstverständlich hat die Übernahme der Methode der Finiten Elemente in anderen Ingenieurwissenschaften auch zu vielen wertvollen Beiträgen aus Bereichen wie dem Bauwesen und dem Maschinenbau geführt. Die Notwendigkeit der Grundlagenforschung, unabhängig von technologischen Eintauchfliegen, verbleibt aber als ein entscheidendes Vermächtnis für die Luft- und Raumfahrt. Vielleicht lohnt es sich, hier den großen Theodor von Kármán zu zitieren, der in einer seiner typisch hintergründigen Adressen einmal erklärt hat: Es ist ein Leichtes für einen akademisch ausgerichteten Luftfahrt-Ingenieur, jederzeit in andere Bereiche einzusteigen und sich dort schöpferisch zu bewähren, das Umgekehrte trifft aber nur in den seltensten Fällen für Ingenieure anderer Fachrichtungen zu. Die ehemaligen, erfolgreichen Studenten der Luft- und Raumfahrt am Imperial College und der Universität Stuttgart haben schon längst den Beweis für diese Behauptung in der Praxis geliefert. Durch ihr auf die Grundlagen orientiertes Studium und ihren auch in anderen Industriezweigen sehr gefragten kritischen Geist haben sie wiederholt demonstriert, wie man neue Probleme meistert und sich in anderen Industriebereichen glänzend bewährt.

Bei der Gestaltung dieses Werkes mußten hunderte eigene und fremde Veröffentlichungen in Betracht gezogen werden. Andererseits war unser erstes Ziel, eine möglichst lückenlose Darstellung der Stuttgarter Schule zu geben, die bisher fehlt. Es wurde aber von vornherein nicht versucht, eine vollständige Bibliographie über das Gebiet der Finiten Elemente auch nur anzustreben, die für sich allein ein Buch gefüllt hätte. So weist schon die erste Ausgabe von Norrie und Vries "A Finite Element Bibliography" aus dem Jahre 1974 über 2800 Zitate auf, und es ist zwecklos, mit dieser und anderen ähnlichen Publikationen in Wettbewerb zu treten. Wir bitten deshalb schon jetzt alle die verdienten Mitglieder der großen Finite-Element-Familie um Nachsicht, die sich nicht oder nur unvollständig zitiert fühlen.

Der Rückblick auf die gewaltige Arbeit vieler Jahre von den bescheidenen Anfängen eines Drei-Zimmer-Institutes im Stuttgarter Herdweg bis zum hochmodernen Großforschungsinstitut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen im Hochschulgelände Pfaffenwald weckt die Frage, wie diese erstaunliche Entwicklung möglich war. Es ist nicht nur der Zusammenhalt, die Motivation und die Leitung des Erstautors und der bis an die Grenze des Physischen gehende Einsatz der Mitarbeiter, die ein weltbekanntes Institut und die Leitgedanken für eine moderne Fakultät geschaffen haben, die zum Nutzen aller Bürger des Landes und Bundes wirken. Es war auch eine glückliche Fügung, daß sich in Baden-Württemberg einige weitblickende Persönlichkeiten – wie der Präsident und ehemalige Ministerpräsident Professor Dr. Gebhardt Müller, der Kultusminister Professor Dr. Gerhard Storz, der Altbundeskanzler und ehemalige Ministerpräsident Dr. Kurt Georg Kiesinger, die Ministerialdirigenten Professor Franz Schad und Dr. Georg Boulanger und der nachmalige Regierungsdirektor und Kanzler Hermann Kammerer – fanden, die von dem enormen industriellen Potential einer computergerechten Mechanik überzeugt waren. Ihre Unterstützung war durchaus keine Selbstverständlichkeit und barg, wie so oft am Beginn einer neuen wissenschaftlichen Ära, den Mut zum Risiko in sich. Männern dieses Typs verdanken wir jedoch die fruchtbaren Jahre der Finite-Elemente-Entwicklung in

Stuttgart, die die Ingenieurwissenschaften in den letzten 30 Jahren revolutioniert haben. Selbstverständlich konnte sich dieser politische Wille nur als Folge eines Beschlusses einer akademischen Institution manifestieren. In unserem Fall ging die Initiative von Professor Artur Weise von der damaligen Technischen Hochschule Stuttgart aus, der mit Zähigkeit und Entschlossenheit das Plazet des Senats seiner Hochschule erhielt. Seinem Einsatz verdankt Stuttgart den Beschluß zu diesem sich später als so erfolgreich erweisenden Experiment. An dieser Stelle ist es für den Senior-Autor eine Verpflichtung, nicht nur Artur Weise, sondern auch den anderen Kollegen der ursprünglichen Fakultät für Luftfahrt – Fran Bošnjaković, Ulrich Hütter und Ulrich Senger – für ihr Verständnis und ihre uneingeschränkte Unterstützung im Aufbau dieser für die Bundesrepublik ungewöhnlichen Fakultät zu danken.

Heute, beim Abschluß der Manuskriptarbeiten, stehen wir wieder am Beginn eines neuen Arbeitsabschnittes. Die Entwicklung des traditionellen ISD verließ schon in der Vergangenheit mehr und mehr den Namensbereich Luft- und Raumfahrt. An mehreren wissenschaftlichen Brennpunkten der Welt begannen sich Zentren der Numerik und Datenverarbeitung zu formen, die auf breitem Anwendungsfeld arbeiten. Dem war auch in Stuttgart Rechnung zu tragen. Wieder trafen wir in ökonomisch schwierigsten Zeiten auf Männer, die bereit waren, das Risiko eines neuen Anfangs mitzutragen und auf dem politischen Feld zu vertreten. Die Gründung des ICA, des Institutes für Computer-Anwendungen, das die wissenschaftliche Tradition des ISD unter alter Leitung fortführen wird, ist allen voran dem Ministerpräsidenten Lothar Späth und den mit Beharrlichkeit und Nachdruck wirkenden Ministerialdirigenten Dr. Eberhard Leibing und Ministerialrat Hans Jürgen Müller-Arens im Staatsministerium sowie der weisen Planung des Ministerialdirigenten Dr. Bernhard Bläsi im Ministerium für Wissenschaft und Kunst zu verdanken. Ihr Einsatz wurde auf dem wissenschaftlichen Feld durch die Tatkraft seiner Magnifizenz Hartmut Zwicker und seinem Rektorat ergänzt und verstärkt. Letztlich hat aber der Senat der Universität Stuttgart mit herausragender Unterstützung der Kollegen Gerhard Kohn, Helmut Sorg und Hans Kammerer entschieden und mit seinem Votum dieses Projekt realisiert. Wir können nur hoffen, daß sich die Wissenschaft auch in Zukunft auf Männer mit Weitblick und intuitiver Erfassung der wesentlichen Zusammenhänge und Entscheidungsfreude auf dem so wichtigen politischen Feld stützen kann.

Wie schon erwähnt, geht der Ursprung des vorliegenden Werkes viele Jahre zurück. Es entspricht einem inneren Bedürfnis des Senior-Autors, auch dem Andenken der leider früh verstorbenen Freunde, Sir Patrick Linstead, F.R.S., Rektor des Imperial College, und John Corin, Sekretär (sprich: Kanzler) an dieser Institution, für die großzügige Unterstützung in den frühen 50er Jahren seine bleibende Dankbarkeit auszusprechen. Dieses Mitfühlen und Mitdenken von überragenden Persönlichkeiten in der langen Entwicklungshistorie eines so umfassenden Werkes wie der vorliegenden Buchreihe kreieren erst das notwendige intellektuelle Klima, um das gesetzte Ziel zu erreichen. In diesem Zusammenhang empfindet der Senior-Autor eine tief empfundene Dankbarkeit für die stetige moralische Unterstützung, die ihm The Right Honourable Lord Flowers, F.R.S., Rektor am Imperial College in den Jahren 1974–1985, zugleich ein führender Physiker und eine überragende Persönlichkeit des öffentlichen Lebens in Großbritannien – der eine außerordentliche Ausstrahlungskraft und Autorität besitzt – gewährt hat. Überhaupt kann man nur mit Bewunderung feststellen, welche wissenschaftliche Prominenz das Imperial College als Rektoren über

viele Jahre für sich gewinnen konnte. Wir haben schon Sir Patrick Linstead, F.R.S., einen führenden organischen Chemiker, erwähnt. Als Nachfolger von Lord Flowers, der jetzt als Vice-Chancellor der gesamten Universität London vorsteht, hat ein Spitzenforscher der Mikroelektronik sowie der Glasfaser- und Lasertechnologie, Professor Eric A. Ash, C.B.E., F.R.S., das Amt übernommen.

Wir dürfen unseren Rückblick und Ausblick nicht beenden, ohne der vielen Autoren, die uns in den letzten 20 Jahren eine große Anzahl von interessanten und lesenswerten Lehrbüchern und Einführungen in die Methode der Finiten Elemente geschenkt haben, zu gedenken. Sicherlich verdient mehr als eines eine Erwähnung und besondere Anerkennung. Es würde aber den selbstgesetzten Rahmen sprengen, wenn alle wichtigen Werke hier genannt werden würden. Letzten Endes besteht bei den *cogniscendi* kein Zweifel, daß dem ersten, in den 60er Jahren erschienenen Buch über Finite Elemente von Olek Zienkiewicz [P.1] die Palme zuerkannt werden muß. Dieses Werk – leicht und flüssig geschrieben – hat sich mit seiner dritten Ausgabe zu einem Klassiker entwickelt und hat wesentlich zu der nun weitverbreiteten Anwendung der Finiten Elemente beigetragen. Auch Dick Gallaghers Werk [P.2] verdient besondere Beachtung auf Grund der langen und fruchtbaren akademischen und praktischen Erfahrung des Autors. Ferner sehen wir uns verpflichtet, eine besondere Anerkennung der Einführung von Eduard Pestel und Fred Leckie [P.3] zu zollen, die in einem bemerkenswert klaren und attraktiven Stil geschrieben ist, wie es aber letzten Endes von Ed. Pestel zu erwarten ist. *Last not least* dürfen wir auch das mehr mathematisch orientierte, 6-bändige Werk von Tinsley Oden et al. [P.4] nicht übersehen, dessen Umfang von der Einführung in die Methode bis zur Strömungsmechanik reicht und das in meisterhafter Weise die Grundideen der Finite-Elemente-Technik herausarbeitet. Nichtsdestoweniger glauben wir, daß unser hier vorgelegtes Werk von einer anderen Prämisse ausgeht. Wir haben immer, über das hinaus, was wir anfangs aufgeführt haben, geglaubt und gepredigt, daß die Entstehung und der Fortschritt dieser Methodik nur auf Grund der Einheit von Theorie und Praxis, die sich als Folge der Revolution des Computers ergeben hat, verstanden werden können. Wir haben wiederholt in den frühen 60er Jahren ausgerufen: *“The computer shapes the theory”* – „Der Computer formt die Theorie“. Dies war und ist unser Leitgedanke in den letzten dreißig Jahren. Wir hoffen, mit diesem Werk zumindest einen Einblick in die durch den Computer veränderte Welt der Ingenieurwissenschaften vermitteln zu können. Eine positive Reaktion des Lesers würde uns freuen.

Ein umfangreiches Werk wie das vorliegende kann ohne die großzügige Unterstützung vieler Mitarbeiter nicht realisiert werden. Wir erwähnen hier in erster Linie Maria Haase, die uns ständig mit Rat und Tat, insbesondere bei Schalen- und Plattenproblemen und bei der natürlichen Darstellung der Theorie sowie dem Bereich großer Verschiebungen, zur Seite gestanden ist. Johann Doltsinis hat für den zweiten Band einen Vorentwurf zum elastoplastischen Materialverhalten beigesteuert. Auf die wertvollen Beiträge von Karl Straub in der Vollendung der Bände II und III werden wir noch in den entsprechenden Einleitungen eingehen.

Hervorzuheben ist auch die wesentliche Unterstützung in der mühevollen Vorbereitung eines druckreifen Manuskriptes durch Joachim Bühlmeier und Martin Mai sowie andere Mitarbeiter. Unser Dank gebührt auch dem technischen Personal des Institutes und insbesondere den immer einsatzbereiten Damen des Sekretariats, Ingeborg Hucklenbroich,

Marlies Parsons und Karin Schnabl, sowie Gertraude Grimm, die die vielen Abbildungen mit großer Sorgfalt ausgeführt hat.

Die Forderungen, einen modernen mathematischen Text in Matrizenschreibweise für ein Textbuch über die Methode der Finiten Elemente und der Strukturmechanik aufzustellen, sind sehr hoch. Die Kunst, einen derartigen mathematischen Satz lesbar, aber auch ästhetisch befriedigend zu gestalten, erfordert eine *dedicated* Einstellung des Verlags und das aktive Mitwirken der Autoren. Dafür sei dem Verlag gedankt und insbesondere Frau Brigitte Gödecke, Frau Ute Hummert und Herrn Wolfgang Nieger. Eine entscheidende Voraussetzung, die gestellten Forderungen zu erfüllen, ist aber auch einfühlsame Diszipliniertheit beim Lesen und Korrigieren der Druckfahnen, was ein tiefes Verständnis der Materie und ein bemerkenswertes Pflichtgefühl bedingt. Hier danken wir Karl Straub für seinen unermüdlichen Einsatz, der diese Arbeit praktisch allein und nur mit Hilfe des Erstautors durchgeführt hat. Für die äußerst sorgfältigen Umbruchkorrekturen zeichnet Gerhard Frik, dem wir auch hier herzlich danken. Letzterer hat auch in Zusammenarbeit mit Peter Streiner eine computergerechte Aufstellung des Sachregisters vorgenommen.

John Argyris

Stuttgart, im Februar 1986

Literatur

- [P.1] *O. C. Zienkiewicz*; The finite element method, 3rd. edition, McGraw-Hill Book Company, London (1977).
- [P.2] *R. H. Gallagher*; Finite element analysis, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, (1975).
- [P.3] *E. C. Pestel, F. A. Leckie*; Matrix methods in elastomechanics, McGraw-Hill Book Company Inc., New York (1963).
- [P.4] *E. B. Becker, G. F. Carey, J. T. Oden*; Finite elements, Vol. I bis VI, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1981–85).

Inhaltsverzeichnis

Prolegomena	VII
1 Einleitung	1
1.1 Die Rolle des Computers in der Mechanik	1
1.2 Entwicklungsstand der Finite-Elemente Technik	9
1.3 Hinweise über unsere Matrizenschreibweise	50
Literatur zu Kapitel 1	56
2 Mechanik der festen Körper und virtuelle Arbeitsprinzipien für kleine Verschiebungen	59
2.1 Einführung	59
2.2 Kinematik: Verschiebungen und Dehnungen am festen Körper	60
2.3 Statik: Kräfte und Spannungen am festen Körper	70
2.4 Der Begriff der virtuellen Arbeit und entsprechende Kräfte und Verschiebungen sowie Spannungen und Dehnungen	80
2.5 Das Prinzip der virtuellen Arbeit (P.V.A.)	97
2.5.1 Der Gaußsche Integralsatz	97
2.5.2 Herleitung und Bedeutung des Prinzips der virtuellen Arbeit	99
2.6 Das Verhalten des linear-elastischen Materials	102
2.7 Das Prinzip der virtuellen Verschiebung (P.V.V.) und das Einheitsverschiebungsgesetz (E.V.G.) [2.4, 2.6]	108
2.8 Das Prinzip der virtuellen Kräfte (P.V.K.) und das Einheitslastgesetz (E.L.G.)	111
2.9 Der Satz von Betti	115
Ergänzungen zu Kapitel 2	118
*2.1 Virtuelle Arbeitsprinzipien in Zylinderkoordinaten	118
*2.2 Spezielle Energiethoreme, die aus dem P.V.A. bzw. P.V.V. und P.V.K. ableitbar sind	130
*2.2.1 Die Definition einiger spezieller Arbeits- und Energiebegriffe	130
*2.2.2 Theoreme, die aus dem P.V.V. folgen	138
*2.2.3 Theoreme, die aus dem P.V.K. folgen	146
Literatur zu Kapitel 2	155
3 Im analytischen Sinne exakte Anwendungen des P.V.V. und des E.V.G.	156
3.1 Allgemeine exakte Anwendungen bei Kontinua	156
3.2 Die Steifigkeitsmatrix eines Tragwerkes	163

3.3 Die Verschiebungsmethode bei finit kinematisch unbestimmten Tragwerken	178
3.3.1 Grundlagen mit erläuternden Beispielen	178
3.3.2 Eine weitere einfache Anwendung der Verschiebungsmethode. Die exakte Schubflußverteilung am eingespannten Ende eines zylindrischen Flügels	179
3.4 Die Verschiebungsmethode für diskrete Tragwerke	190
3.5 Computerorientierter Ausbau der Verschiebungsmethode bei diskreten Tragwerken	205
3.6 Modifikation von Tragwerkselementen einschließlich Erstarrung und vollständiger Elimination bei der Verschiebungsmethode	224
Literatur zu Kapitel 3	234
4 Im analytischen Sinne exakte Anwendungen des P.V.K. und des E.L.G.	235
4.1 Allgemeine exakte Anwendungen bei Kontinua	235
4.2 Die Nachgiebigkeits- oder Flexibilitätsmatrix eines Tragwerkes	241
4.3 Die Kraftmethode bei finit statisch unbestimmten Tragwerken	253
4.4 Einige einfache Anwendungen der Kraftmethode aus Luftfahrt und Leichtbau	262
4.4.1 Gekrümmte Balken und Spanten unter Einschluß verteilter Lasten	262
4.4.2 Torsion mehrzelliger zylindrischer Schalen – die Bredt-Bathoske Schubflußverteilung	270
4.5 Die Kraftmethode für diskrete Tragwerke	277
4.6 Modifikation von Tragwerkselementen einschließlich Erstarrung und vollständiger Elimination bei der Kraftmethode	288
Literatur zu Kapitel 4	292
5 Allgemeine Anwendung der Verschiebungsmethode bei linearem Tragwerksverhalten	293
5.1 Approximation des Verschiebungszustandes für ein beliebiges Tragwerk: historische Verfahren und finite Elemente	293
5.2 Grundlagen der natürlichen Methode	327
5.3 Urelemente oder die Simplexfamilie	339
5.3.1 Das Urelement in einer Dimension: FLA2	339
5.3.2 Das Urelement in zwei Dimensionen: TRIM3	344
Ergänzung zu 5.3.2	371
*5.3.2.1 Zur Geometrie des Dreiecks	371
*5.3.2.2 Natürliche Komponentendehnungen und entsprechende totale natürliche Spannungen	372
*5.3.2.3 Behandlung des ebenen Dehnungszustandes mit TRIM3	375
5.3.3 Das Urelement in drei Dimensionen: TET4	378

5.4 Entwicklung höherrangiger und auch krummliniger Elemente mit Hilfe der Subelemententechnik	394
5.4.1 Das Abbildungsverfahren bei Elementen allgemeiner Gestalt	394
5.4.2 Die Familie der FLAC-Elemente	404
Ergänzung zu 5.4.2	411
*5.4.2 Direkte Ableitung des subparametrischen Elementes FLA3 mit der natürlichen Methode	411
5.4.3 Die Familie der TRIC-Elemente	413
Ergänzung zu 5.4.3	427
*5.4.3 Direkte Ableitung des subparametrischen Elementes TRIM6 mit der natürlichen Methode	427
5.4.4 Die Familie der TEC-Elemente	432
Ergänzung zu 5.4.4	441
*5.4.4 Direkte Ableitung des Elementes TET10 mit Hilfe der natürlichen Methode	441
5.4.5 Die Familie der viereckigen gekrümmten QUAC-Membran-Elemente	445
5.4.6 Die Familie der PENTAC-Keil-Elemente	454
5.4.7 Die Familie der HEXEC-Quader-Elemente	463
5.4.8 Aspekte für die praktische Anwendung von höherrangigen Elementen und Beispiele	470
Literatur zu Kapitel 5	490
6 Zur Analyse der Matrizen Gleichung in den Verschiebungen	492
6.1 Direkte Lösungsverfahren	493
6.1.1 Grundlagen der Verfahren	493
6.1.2 Das Bandlösungs- und das Sparse-Matrix-Verfahren	500
6.1.3 Die Wellenfrontmethode	508
6.2 Iterative Lösungsverfahren	515
6.2.1 Grundsätzliches zu den Iterationsverfahren	515
6.2.2 Das Einzelschrittverfahren	516
6.2.3 Die Gradientenverfahren	520
6.3 Fehleranalyse der direkten Lösungsverfahren	524
6.4 Unterstrukturtechnik in der Verschiebungsmethode	530
6.4.1 Notwendigkeit und Nutzen der Unterstrukturtechnik	531
6.4.2 Freiheitsgrade in Unterstruktur und Hauptnetz	532
6.4.3 Aufbau der Unterstrukturmatrizen und Elimination der inneren Freiheitsgrade	534
6.4.4 Zusammenbau des Hauptnetzes und Berechnung des Gesamtsystems	538
6.4.5 Rekursive Anwendung: Unterstrukturen auf mehreren Arbeitsebenen	539
6.4.6 Grenzen der Unterstrukturtechnik	541
6.4.7 Praktische Anwendungen und Tricks	543