ЗАДАЧИ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ОПЕРАЦИЙ

МГУ

ЗАДАЧИ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ОПЕРАЦИЙ

Издательство
Московского
университета
1979

УДК 519.9

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Московского университета

Рецензенты:
Чл.-кор. АН СССР *Н. Н. Моисеев*,
проф. *П. С. Краснощеков*

Ю. Б. Гермейер, В. В. Морозов, А. Г. Сухарев, В. В. Федоров.

Задачи по исследованию операций. Учебное пособие. М., Изд-во Моск. ун-та, 1979. 167 с., 13 ил., библиогр. 28 назв.

Задачник содержит как упражнения, полезные при первоначальном ознакомлении с основными понятиями и результатами теории исследования операций, так и задачи повышенной трудности, рассчитанные на читателя, обладающего соответствующей математической подготовкой. Пособие соответствует курсу «Исследование операций», читаемому на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ.

З $\frac{20203-045}{077(02)-79}$ 79—79 1702070000

© Издательство Московского университета, 1979 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник соответствует курсу «Исследование операций» на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ.

Большое внимание уделено задачам, связанным с неконтролируемыми факторами операций, т. е. факторами, которые не находятся в распоряжении оперирующей стороны; рассматриваются задачи на построение моделей операций, вычисление оценок эффективности конкурирующих способов действий оперирующей стороны — стратегий (гл. 1). Более традиционны задачи на отыскание оптимальных стратегий в операциях без неопределенностей (гл. 2) и раздел, посвященный классической теории игр двух лиц (часть гл. 3). В задачах гл. 4 прослеживается роль информированности оперирующей стороны и исследователя операций о неконтролируемых факторах, на конкретных примерах изучается зависимость от информированности поведения оперирующей стороны и получаемого ею результата.

К задачам приводятся ответы, указания, а в необходимых случаях и подробные решения. Основная масса задач оригинальна, некоторые, относящиеся к классическим разделам исследования операций и теории игр, заимствованы из источников, указанных в списке литературы.

Ранее этот материал частично был опубликован в ротапринтном издании: Задачник по исследованию операций. Ч. 1. М., 1975 (МГУ); Ч. 2. М., 1976 (МГУ).

Авторы выражают благодарность сотрудникам факультета ВМиК МГУ и ВЦ АН СССР, предоставившим свои задачи, и будут признательны читателям за все замечания по содержанию книги.

Некоторые теоретические сведения и обозначения

Под *операцией* понимают совокупность действий, направленных на достижение определенной цели [6, 8]. Участников операции, стремящихся к достижению этой цели, называют *оперирующей стороной.* Факторы, которыми распоряжается оперирующая сторона для достижения цели операции, называются *контролируемыми.* Для их обозначения будем использовать букву x, а совокупность всех значений контролируемых факторов обозначим M_0. Факторы операции, которые не контролируются оперирующей стороной, называются *неконтролируемыми.* Среди участников, составляющих оперирующую сторону, можно выделить исследователя операции, который проводит исследование по отысканию наилучших для оперирующей стороны способов действий. Неконтролируемые факторы следующим образом группируются по информированности о них исследователя операции.

Неопределенные факторы y: исследователю операции известно лишь множество значений N факторов y. *Случайные факторы z*: исследователю операции известно множество значений Z случайной величины z; кроме того, закон распределения (т. е. функция распределения или вероятностная мера [25]) ω этой случайной величины либо известен точно, либо известно лишь, что $\omega \in \Omega$, где Ω — некоторое множество законов распределения. В дальнейшем там, где это не вызовет неясностей, будем использовать одни и те же обозначения для случайной величины и ее реализации, для функции распределения и соответствующей вероятностной меры. Стремление оперирующей стороны к достижению цели описывается стремлением к увеличению значения функции $F(x, y, z)$, называемой *критерием эффективности.* Иногда цель состоит в стремлении к уменьшению значения критерия эффективности; в очевидных случаях не будем оговаривать это специально.

К моменту проведения операции оперирующая сторона может располагать большей информацией о неконтролируе-

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

мых факторах, чем располагал исследователь операции во время проведения исследования. Информация, которой будет располагать оперирующая сторона к моменту проведения операции, фиксируется в модели операции *информационной гипотезой. Стратегиями* оперирующей стороны называют разрешенные информационной гипотезой способы действий. Так, если оперирующая сторона не располагает дополнительной информацией о неконтролируемых факторах, то ее стратегиями являются сами контролируемые факторы из M_0. Стратегии из M_0 называются *стратегиями-константами*. Если неконтролируемые факторы станут известными оперирующей стороне к моменту проведения операции, то ее стратегиями являются всевозможные отображения $\tilde{x}: N \times Z \to M_0$; множество всех таких отображений будем обозначать $\tilde{M}$. Информационная гипотеза может быть задана с помощью информационной функции $R: N \times Z \to E^m$, определенной на множестве $N \times Z$: оперирующей стороне к моменту проведения операции станет известным значение $R(y, z)$, где y, z — неконтролируемые факторы в рассматриваемой операции. Множеством стратегий оперирующей стороны служит в этом случае множество

$$M_R = \{\tilde{x} \in \tilde{M} \mid \tilde{x}(y_1, z_1) = \tilde{x}(y_2, z_2), \quad \text{если } R(y_1, z_1) = R(y_2, z_2)\}.$$

Информационная гипотеза может быть задана и иными способами. В любом случае множество стратегий M является подмножеством $\tilde{M}$. Мы будем, кроме того, рассматривать лишь такие множества стратегий M, что $M \supset M_0$.

Зачастую случайные факторы отсутствуют в операции или случайные факторы имеются, но по информационной гипотезе оперирующая сторона информации о них не получит, т. е. стратегии не зависят от случайных факторов, а также допустимо осреднение критерия по случайностям. В таких случаях мы будем обозначать критерий через $W(x, y)$, где $W(x, y) = \int\limits_Z F(x, y, z)\, d\omega(z)$, если случайные факторы имеются. При этом информационная функция, очевидно, не зависит от z; для множества всех стратегий $\tilde{x}: N \to M_0$ мы сохраним обозначение $\tilde{M}$.

Критерий эффективности, определенный на множестве $M_0 \times N \times Z$ $(M_0 \times N)$, очевидным образом может быть доопределен на множестве $M \times N \times Z$ $(M \times N)$:

$$F(\tilde{x}, y, z) = F(\tilde{x}(y, z), y, z) \, (W(\tilde{x}, y) = W(\tilde{x}(y), y)), \; \tilde{x} \in M.$$

Если допустимо применение оперирующей стороной *смешанных стратегий* $\varphi \in \Phi$ (через φ мы обозначаем и саму случайную величину со значениями в M_0 и ее функцию распределения и соответствующую вероятностную меру), то для оценки эффективности таких стратегий используется критерий

$$\overline{W}(\varphi, y) = \int_{M_0} W(x, y)\, d\varphi(x).$$

Вероятностные смеси стратегий из множеств $M \neq M_0$ в данном сборнике не рассматриваются.

Если в операции все неконтролируемые факторы являются случайными и допустимо осреднение критерия, то *оценкой эффективности* стратегии $\tilde{x}$ называют величину

$$\overline{F}(\tilde{x}, \omega) = \int_{Z} F(\tilde{x}, z)\, d\omega(z).$$

Если же в операции отсутствуют случайные факторы или критерий, как было описано выше, уже осреднен по случайностям, то оценкой эффективности стратегии $\tilde{x}$ называется величина

$$\underline{W}(\tilde{x}) = \inf_{y \in N} W(\tilde{x}, y).$$

Если в операции имеются различные типы неконтролируемых факторов, то оценка эффективности определяется в зависимости от дополнительных предположений об этих факторах. Пусть, например, в критерии

$$F(x, y, z), \quad y = (y_1, y_2), \quad y_1 \in N_1, \quad y_2 \in N_2, \quad N = N_1 \times N_2,$$

где y_1 выбирается первым противником, знающим реализацию случайной величины z, а y_2 выбирается вторым противником, не знающим реализацию z. Тогда, если интересы противников неизвестны, а оперирующая сторона разрешает осреднение по случайностям, то оценка эффективности стратегии $\tilde{x}$ имеет вид

$$\underline{\overline{W}}(\tilde{x}) = \inf_{\omega \in \Omega} \inf_{y_2 \in N_2} \int_{Z} \inf_{y_1 \in N_1} F(\tilde{x}, y_1, y_2, z)\, d\omega(z).$$

Пусть $W(x, y)$ — критерий эффективности оперирующей стороны, а $W_п(x, y)$ — критерий эффективности противника. Предположим, что противнику известна стратегия $\tilde{x}$ оперирующей стороны и что

$$N(\tilde{x}) = \{y \in N \mid W_п(\tilde{x}, y) = \max_{y' \in N} W_п(\tilde{x}, y')\} \neq \varnothing.$$

Тогда оценка эффективности стратегии $\tilde{x}$ принимает вид

$$\underline{W}(\tilde{x}) = \inf_{y \in N(\tilde{x})} W(\tilde{x}, y).$$

Если y — природная неопределенность или стратегия противника, имеющего противоположные интересы и не знающего реализацию смешанной стратегии φ, то оценкой эффективности стратегии φ называют величину

$$\underline{\overline{W}}(\varphi) = \inf_{y \in N} \overline{W}(\varphi, y).$$

Стратегия $x_0 \in M$ называется *оптимальной* в множестве M, если

$$\underline{W}(\tilde{x}_0) = \max_{\tilde{x} \in M} \underline{W}(\tilde{x});$$

стратегия $\tilde{x}_\varepsilon \in M$ называется ε-*оптимальной* в M, если

$$\underline{W}(\tilde{x}_\varepsilon) \geqslant \sup_{\tilde{x} \in M} \underline{W}(\tilde{x}) - \varepsilon.$$

Величина $W(M) = \sup\limits_{\tilde{x} \in M} \underline{W}(\tilde{x})$ называется *наилучшим гарантированным* в множестве стратегий M *результатом*. Точно так же в случае, когда в операции неконтролируемые факторы случайны или имеются неконтролируемые факторы разных типов, оптимальной называют стратегию с наибольшей оценкой эффективности. По аналогии с приведенными выше определениями определяются в этом случае понятия ε-оптимальной стратегии и наилучшего гарантированного результата. Наконец, величину

$$\overline{W}(\Phi) = \sup_{\varphi \in \Phi} \inf_{y \in N} \overline{W}(\varphi, y)$$

называют наилучшим гарантированным результатом в смешанных стратегиях, а стратегию $\varphi_0 \in \Phi$, для которой

$$\inf_{y \in N} \overline{W}(\varphi_0, y) = \overline{W}(\Phi),$$

— оптимальной смешанной стратегией.

Если цель операции состоит в уменьшении значения критерия эффективности, то во всех определениях верхние грани нужно заменить на нижние и наоборот.

В дальнейшем без дополнительных пояснений и ссылок используются приведенные определения и обозначения. Кроме того, в задачнике используются следующие обозначения:

E^n — n-мерное евклидово пространство;

$E_+^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n \mid x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n\}$;

$S_n = \left\{x \in E^n \,\middle|\, \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, n\right\}$ — симплекс;

$\rho(x, y)$ — евклидово расстояние между векторами $x, y \in E^n$;

$\rho(x, A) = \inf\limits_{y \in A} \rho(x, y)$ — расстояние от точки $x \in E^n$ до множества $A \subset E^n$;

$B(x, r) = \{y \in E^n \mid \rho(x, y) \leqslant r\}$ — шар радиуса r с центром в точке x;

$$I_a(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant a, \\ 1, & t > a; \end{cases}$$

$[t]$ — целая часть числа t;

$|A|$ — число элементов конечного множества A;

2^A — множество всех подмножеств множества A;

$\bar{A}$ — замыкание множества A;

$\operatorname{int} A$ — внутренность множества A;

$\operatorname{co} A$ — выпуклая оболочка множества A:

$$(a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

$$(W(x, y))_{m \times n} = \begin{pmatrix} W(1, 1) & W(1, 2) & \dots & W(1, n) \\ W(2, 1) & W(2, 2) & \dots & W(2, n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ W(m, 1) & W(m, 2) & \dots & W(m, n) \end{pmatrix};$$

$(W(x, y)) = (a_{ij})_{m \times n}$ — означает, что $W(i, j) = a_{ij}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$;

$\tilde{x}_0 = \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m$ — в соответствующем контексте означает, что существует m оптимальных стратегий $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m$;

к.э. — критерий эффективности;

к. ф. — контролируемые факторы;

н. ф. — неконтролируемые факторы;

с. ф. — случайные факторы.

Следующие задачи рекомендуется решать последовательно, поскольку они посвящены исследованию «близких» моделей:

1.3—4.35, 1.5—3.36, 1.6—1.7—3.42, 1.8—1.9—4.18, 1.10—3.35, 1.12—4.36—4.41, 1.14—4.42, 1.21—3.43, 1.23—4.46—4.47, 1.24—4.48—4.49—4.50, 1.32—1.36; 3.6—3.7—3.8, 3.9—3.10, 3.19—3.20; 4.11—4.12, 4.13—4.20—4.21—4.22—4.30—4.31, 4.14—4.23—4.32, 4.15—4.16, 4.24—4.25, 4.27—4.28—4.29, 4.33—4.34.

ЗАДАЧИ

ГЛАВА 1

Составление моделей операций и оценка эффективности стратегий

В задачах этой главы требуется составить модель операции, т. е. описать контролируемые и неконтролируемые факторы, критерий эффективности и множество стратегий оперирующей стороны, а также найти оценки эффективности стратегий. В конце главы предлагается несколько задач, в которых используются свертывание критериев, объединение операций и эффективные векторы [8, 9]. Начиная с задачи **1.31**, до конца главы предполагается, что оперирующая сторона стремится к увеличению значения своего критерия.

1.1. В автомобильном туннеле скорость движения машин v не превосходит 50 км/ч и связана с плотностью потока (количеством машин на километр дороги) P следующим эмпирическим соотношением

$$P = \frac{60 - v}{z},$$

где z — случайная величина, которая в любой момент определяется соотношением легковых и грузовых машин, проходящих через туннель. Известно, что величина z равномерно распределена на отрезке $[{}^1/_2, 1]$. Регулировка движения в туннеле производится путем выбора скорости движения v. Цель операции состоит в увеличении потока машин F, т. е. количества машин, выходящих из туннеля за час [17].

Составить модель операции. Найти оценку эффективности произвольной стратегии в каждом из следующих предположений:

а) оперирующая сторона разрешает осреднение критерия;

б) оперирующая сторона не разрешает осреднение критерия.

Найти скорость движения машин, при которой поток F будет максимальным.

1.2. Самолеты, пролетающие над наблюдательным пунктом могут подавать сигналы двух видов: «свой» и «неприятель». Предположим, что свои самолеты знают расположение своего наблюдательного пункта и всегда подают сигнал «свой». Неприятельские самолеты не знают о том, чьей стороне принадлежит наблюдательный пункт, но знают, как подавать сигнал «свой». Поэтому неприятельские самолеты могут подавать любой сигнал; при этом отсутствие сигнала для наблюдателя равносильно подаче сигнала «неприятель». Пусть для следующих событий ущерб[1] для наблюдателя от осуществления этих событий равен:

a — если свой самолет принимается за свой;

b — если свой самолет принимается за неприятельский;

c — если неприятельский самолет принимается за неприятельский;

d — если неприятельский самолет принимается за свой.

Пусть ω — вероятность того, что приближающийся к наблюдательному пункту самолет является своим. Относительно ω лишь известно, что $\omega' \leqslant \omega \leqslant \omega''$. Предположим, что оперирующей стороной является наблюдатель, который принимает решение о том, чей самолет приближается к пункту: свой или неприятельский. Целью наблюдателя является уменьшение ущерба от осуществления перечисленных выше событий.

Составить модель операции. Осреднить полученный критерий. Найти оценку эффективности произвольной стратегии [15].

1.3. Две страны обмениваются товарами. Пусть A_i, $i=1, \ldots, m$ — количество товара i-го типа первой страны, предназначенное для обмена на товары второй страны, а B_j, $j=1, \ldots, n$ — количество товара j-го типа второй страны, предназначенное для обмена на товары первой страны. Товары обеих стран, вообще говоря, разные. Пусть a_i, a_i' и λ_i — стоимость единицы товара i-го типа первой страны соответственно на внутреннем рынке первой страны, на внутреннем рынке второй страны и на международном рынке. Аналогично пусть b_j, b_j' и μ_j — стоимость единицы товара j-го типа второй страны соответственно на внутреннем рынке второй страны, на внутреннем рынке первой страны и на международном рынке. Стоимость в международных ценах обмениваемых товаров должна быть одинаковой.

Обмен товарами осуществляется следующим образом. Первая (соответственно вторая) страна выбирает количество x_{ij} (соответственно y_{ij}) товара i-го (j-го) типа, которое она желает обменять на соответствующее количество товара j-го (i-го) типа второй (первой) страны. Обмен товара i-го типа первой страны на товар j-го типа второй страны произво-

[1] Под ущербом можно понимать математическое ожидание стоимостных затрат, которые несет оперирующая сторона от осуществления нижеперечисляемых событий.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

дится в количестве, максимально допустимом величинами x_{ij} и y_{ij}, т. е. на сумму $\min(\lambda_i x_{ij}, \mu_j y_{ij})$, выраженную в международных ценах. Будем считать первую страну оперирующей стороной, которая не знает выбор y_{ij} второй страной. Цель первой страны — так выбрать x_{ij}, чтобы по возможности увеличить прибыль, полученную в результате обмена и выраженную в ценах своего внутреннего рынка. Составить модель операции. Найти оценку эффективности произвольной стратегии, если:

а) интересы второй страны неизвестны,

$$\mu_j B_j = \lambda_i A_i, \quad \frac{b'_j}{a_i} \geqslant \frac{\mu_j}{\lambda_i}, \quad i, j = 1, \ldots, m = n;$$

б) интересы второй страны известны и задаются критерием эффективности, аналогичным критерию первой страны; второй стране известна стратегия первой страны и

$$\frac{\mu_j}{\lambda_i} \geqslant \frac{b_j}{a'_i}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

1.4. Межотраслевое объединение ведет строительство автомобильного завода. Предстоит выполнить следующие основные работы:

A. строительство заводских корпусов;

B. завершение разработки модели нового автомобиля;

C. наем рабочей силы;

D. монтаж оборудования;

E. отладка модели автомобиля.

Очередность выполнения работ задана сетевым графиком (рис. 1).

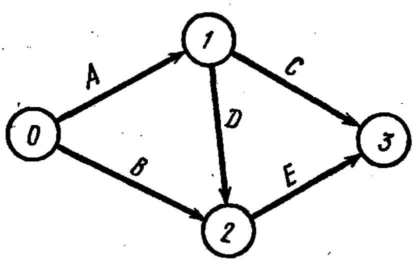

Рис. 1

Пусть $t_A=2$ и $t_D=1$ — время выполнения работ *A* и *D*, а для остальных работ времена их выполнения точно неизвестны и являются независимыми случайными величинами. При этом t_B и t_C принимают значения 2, 3, 4 с вероятностями $^1/_3$, а t_E принимает значения 1, 2, 3 с вероятностями $^1/_3$. Ниже приведена зависимость дополнительной прибыли объединения от времени выполнения всего комплекса работ:

Время выполнения всего комплекса работ	3	4	5	6	7
Дополнительная прибыль объединения (в тыс. руб.)	120	110	100	50	0

В распоряжении объединения имеется резерв, ввод которого ускоряет все строительство завода на одну единицу времени, но потребует дополнительных расходов в 20 тыс. р.

Следует ли использовать резерв, если целью объединения является увеличение по мере возможности чистой дополнительной прибыли (т. е. дополнительной прибыли за вычетом расходов в случае использования резерва)? Составить модель операции. Критерий эффективности записать с помощью матрицы. Осреднить полученный критерий и ответить на вопрос о целесообразности ввода резерва [4].

1.5. Склад имеет форму треугольника G с вершинами A_j, $j=1, 2, 3$. Грабитель может проникнуть на склад только в точках A_j с вероятностями ω_j, относительно которых лишь известно, что $\omega_j' \leqslant \omega_j \leqslant \omega_j''$, $j=1, 2, 3$. Цель операции — «наилучшим» образом установить сторожевую вышку на территории склада, чтобы обнаружить грабителя в момент проникновения на склад. Известно, что вероятность необнаружения грабителя пропорциональна квадрату расстояния до грабителя. Составить модель операции. Найти оценку эффективности произвольной стратегии, если

а) $\omega_j' = 0, \quad \omega_j'' = 1, \quad j = 1, 2, 3;$

б) $\omega_j' = 0, \quad \omega_j'' = \dfrac{1}{2}, \quad j = 1, 2, 3;$

в) $\omega_1' = \omega_1'' = \omega_2'' = \omega_3'' = \dfrac{1}{2}, \quad \omega_2' = \omega_3' = 0.$

1.6. В дуэли принимают участие два противника (первый и второй дуэлянты). В начальный момент времени они находятся друг от друга на расстоянии D. Затем противники начинают без остановок сближаться, но не ближе барьеров, расстояние между которыми равно d, $d<D$. Каждый из противников имеет в своем распоряжении по одному выстрелу и имеет право выстрелить в любой момент времени после начала сближения. Дуэль заканчивается либо когда оба противника сделали по выстрелу, либо когда выстрелил один из них и поразил другого. Пусть $p_i(d_i)$ — вероятность поражения i-м дуэлянтом противника, если выстрел был произведен с расстояния d_i, $i=1, 2$. Предположим, что каждый дуэлянт слышит выстрел другого. Будем считать первого дуэлянта оперирующей стороной.

Составить модель операции, предполагая, что критерий эффективности принимает значение 0 или 1 в зависимости от выполнения следующих целей оперирующей стороны:

а) поражение противника;

б) сохранение собственной жизни;

в) сохранение собственной жизни и поражение противника.

Осреднить полученные критерии по случайностям. В случаях а), б), в) найти оценку эффективности стратегии, которая рекомендует первому дуэлянту стрелять с расстояния d, если противник выстрелил раньше него и промахнулся.

1.7. Пусть в условии задачи 1.6 первый дуэлянт имеет возможность произвести два выстрела в различные моменты времени, а второй дуэлянт имеет по-прежнему в своем распоряжении только один выстрел.

Составить модель операции, предполагая выполненными условия а), б), в) задачи 1.6, и осреднить полученный критерий.

1.8. Имеется n пунктов возможного прорыва средств нападения. Нападающая сторона распределяет общее количество A средств[1] по x_i на i-й пункт, $i=1, \ldots, n$. Защищающаяся сторона выделяет резерв C из общего количества B средств защиты и распределяет оставшееся количество $B-C$ средств по u_i на i-й пункт, не имея информации о распределении средств нападения. Нападение знает распределение основных средств защиты u_i. После того, как происходит нападение, защита узнает распределение средств нападения x_i и, в свою очередь, размещает резерв C по v_i на i-й пункт, $i=1, \ldots, n$.

Пусть p_i — количество средств нападения, которое может уничтожить одна единица основных средств защиты на i-м пункте, а q_i — количество средств нападения, которое может уничтожить одна единица резерва защиты на i-м пункте. Будем считать нападение оперирующей стороной. Целью нападения является стремление к увеличению суммарного количества средств, прорвавшихся через все пункты. Составить модель операции. Показать, что для любой стратегии нападения найдется стратегия, имеющая не меньшую оценку эффективности и состоящая в нанесении «концентрированного удара», т. е. в направлении всех средств нападения на один пункт.

1.9. Пусть в условии задачи 1.8 защита резерва не выделяет, а нападение перед началом операции производит разведку расположения средств защиты. Поступающая информация u_i' о расположении средств защиты, вообще говоря, не является точной: нападению известно лишь, что

$$|u_i'-u_i| \leqslant \varepsilon_i, \quad u_i' \geqslant 0, \quad i=1, \ldots, n,$$

где $\varepsilon_i \geqslant 0$ — точность разведки. Выполнить задание, сформулированное в условии задачи 1.8.

1.10. Город имеет форму круга G радиуса R. Будем предполагать, что из любой точки города можно проехать на ма-

---

[1] Средства предполагаются бесконечно делимыми.

шине в любую другую точку по прямой линии и что машины движутся по городу с постоянной скоростью. Решается вопрос о размещении в городе трех пожарных частей. Нужно так выбрать точки расположения пожарных частей, чтобы до возникшего в точке y пожара можно скорее всего добраться. Составить модель операции. Найти оценку эффективности произвольной стратегии.

1.11. Нефтеносный район имеет форму области G на плоскости. Предположим, что форма залегания нефти имеет вид круга $B(y, r)\subset G$ известного радиуса r. Положение центра круга y неизвестно. Разведка нефти производится путем поочередного бурения скважин в точках области G до тех пор, пока не будет обнаружена нефть. Цель операции — обнаружить нефть и пробурить при этом как можно меньше скважин. Составить модель операции. Найти оценку эффективности произвольной стратегии.

1.12. Две конкурирующие фирмы производят для рынка один вид продукции. Каждая фирма планирует выпуск продукции и назначает на нее цены; при этом первая фирма не знает планируемого выпуска и цены на продукцию второй фирмы. Пусть D — потребность рынка в продукции, а u и v — количества продукции, производимой соответственно первой и второй фирмами; причем $u, v\leqslant K$, где константа K задает ограничения на производственные мощности обеих фирм. Пусть p и q — цены единицы продукции, назначаемые первой и второй фирмами и удовлетворяющие неравенствам: $a\leqslant p\leqslant b$, $a\leqslant q\leqslant b$, где a — себестоимость (цена единицы) продукции. Предполагается, что вначале на рынке покупается более дешевая продукция, а если цены равны, то покупается продукция второй фирмы. Будем считать первую фирму оперирующей стороной. Цель оперирующей стороны состоит в получении как можно большей прибыли от продажи произведенной продукции. Составить модель операции. Найти оценку эффективности призвольной стратегии, если:

а) интересы второй фирмы неизвестны;

б) интересы второй фирмы известны и задаются критерием, аналогичным критерию первой фирмы; кроме того, второй фирме известна стратегия первой фирмы.

1.13. Две конкурирующие фирмы производят для рынка m видов продукции. Пусть u_i, v_i — количества продукции i-го вида, производимой соответственно первой и второй фирмами, $u_i, v_i\leqslant K_i$, $i=1, ..., m$, а p_i, q_i — цены единицы продукции i-го вида, назначаемые первой и второй фирмами и удовлетворяющие неравенствам: $a_i\leqslant p_i\leqslant b_i$, $a_i\leqslant q_i\leqslant b_i$, где a_i — себестоимость продукции i-го вида. Предположим, что для производства вектора $u=(u_1, ..., u_m)$ первой фирме необходимо затратить $g_j(u)$ единиц j-го вида производственных факторов, $j=1, ..., n$; при этом первый вид производственных факторов — деньги. Количество денег на рынке ограничено и равно C, а потребность рынка в продукции i-го вида равна D_i. Целью первой фирмы (оперирующей стороны) является увеличение прибыли от продажи всех видов продукции. Записать критерий эффективности оперирующей стороны, если:

а) сначала у второй фирмы покупается продукция тех видов, на которые она назначила цены не большие, чем оперирующая сторона. После окончания всех таких закупок продукция покупается у оперирующей стороны, если на рынке, конечно, остались деньги и имеется неудовлетворенный спрос;

б) сначала у второй фирмы покупается продукция тех видов, на которые она назначила цены не большие, чем оперирующая сторона, затем у оперирующей стороны закупается продукция тех видов, цены на которые не выше, чем у второй фирмы, затем оставшаяся продукция закупается у второй фирмы, затем оставшаяся продукция закупается у оперирующей стороны.

1.14. Предприятие производит продукцию в течение T отрезков времени. В начале t-го отрезка предприятие производит продукцию в количестве x_t. Спрос y_t на продукцию в начале t-го отрезка неизвестен, но известно, что $d_t \leqslant y_t \leqslant D_t$, где d_t, D_t — фиксированные границы спроса. Предположим, что спрос y_t на продукцию удовлетворяется в начале t-го отрезка, а вся произведенная нереализованная (в том числе и в предшествующие моменты времени) продукция хранится на складе в течение всего t-го отрезка времени. Пусть α — стоимость единицы произведенной продукции, β — стоимость хранения единицы продукции в течение одного отрезка времени, γ — плата за единицу недоданной продукции (неустойка) и i_0 — начальный запас продукции на складе. Цель предприятия состоит в таком выпуске продукции x_t, $t=1, ..., T$, чтобы суммарные издержки (производство, хранение и неустойка) были по возможности меньшими. Составить модель операции. Найти оценку эффективности произвольной стратегии — константы [4].

1.15. Турист заблудился в лесу; он знает, что лес имеет форму области G на плоскости, но не знает, в какой точке P области G он находится. Цель туриста — выйти из леса как можно более коротким путем [28].

а). Пусть G — полуплоскость; турист знает, что он находится на расстоянии 1 от границы леса, но он не знает, в каком направлении от него находится граница леса. Доказать, что стратегия, состоящая в движении по кривой $PQRHE$, изображенной на рис. 2 (PQ, QR, HE — отрезки, RH — большая дуга окружности длины $7\pi/6$), является единственной оптимальной стратегией.

б) Пусть G — квадрат с длиной стороны, равной 1. Доказать, что стратегия, состоящая в движении вдоль отрезка длины $\sqrt{2}$, является единственной оптимальной стратегией.

в) В условиях пункта б) найти оценку эффективности следующей смешанной стратегии φ: сначала турист согласно равномерному закону выбирает случайное направление, затем движется прямолинейно вдоль выбранного направления вплоть до выхода из леса.

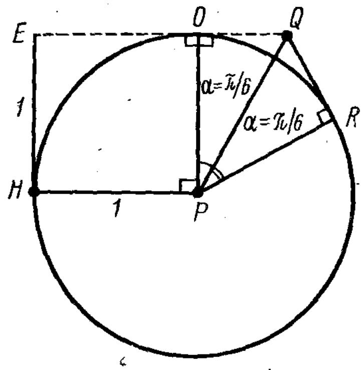

Рис. 2

1.16. Первая страна планирует войну со второй страной в течение периода длины T, начиная с момента $t=0$ и заканчивая моментом $t=T$. Пусть в момент времени t первая и вторая страны имеют вооружение в количествах, соответственно равных $p(t)$ и $q(t)$, а скорости производства вооружения для первой и второй страны равны соответственно m_1 и m_2 и не зависят от t. Предположим, что в момент t первая и вторая страны выделяют доли $u(t)$ и $v(t)$ вооружения на уменьшение производства (изнурение) противника. При этом скорость производства вооружения противника уменьшается соответственно на величины $c_2u(t)p(t)$ и $c_1v(t)q(t)$, где c_1 и c_2 — постоянные, не зависящие от t. Остальное вооружение в количествах $(1-u(t))p(t)$ и $(1-v(t))q(t)$ отправляется на поле боя, где единица вооружения одной страны уничтожает единицу вооружения другой страны. Превосходство одной страны над другой за всю войну выразим как разность между суммарными количествами вооружений сторон, участвовавших в бою за весь период T [1]. Будем считать первую страну оперирующей стороной, цель которой — выбрать $u(t)$ таким образом, чтобы ее превосходство над второй страной было бы как можно большим. Пусть запасы вооружения в момент $t=0$ у первой и второй стран равны соответственно p_0 и q_0, причем $p_0<m_1/c_1-m_1T$, $q_0<m_2/c_2-m_2T$. Найти оценку эффективности стратегии u_τ:

$$u_\tau(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant\tau\\ 0, & \tau<t\leqslant T, \text{ где } \tau<T-\dfrac{1}{c_1}.\end{cases}$$

1.17. Лесное хозяйство занимается посадкой и вырубкой леса на некотором участке земли. Если лес вырубить в начале k-го года после посадки, то прибыль от продажи леса с

此为试读，需要完整PDF请访问： www.ertongbook.com