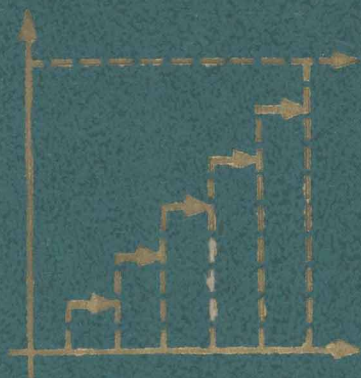


Г. Михок В. Урсяну

Выборочный метод и статистическое оценивание



Выборочный метод и статистическое оценивание

Mihoc Gh., Urseanu V.

Sondaje și estimații statistice

Teorie și aplicații

Editura tehnică
București — 1977

**Г. Михок
В. Урсяну**

Выборочный метод и статистическое оценивание

Перевод с румынского В. М. Остиану

Под редакцией В. Ф. Матвеева

Москва «Финансы и статистика»
1982

- М69 **Михок Г., Урсяну В.**
Выборочный метод и статистическое оценивание / Пер. с рум. В. М. Остиану; Под ред. В. Ф. Матвеева. — М.: Финансы и статистика, 1982. — 245 с, ил.
В пер 2 р

Книга представляет собой строгое и последовательное изложение математической статистики применительно к выборочному наблюдению. В первой части рассматриваются принципы теории вероятностей, статистические распределения и их применение в выборочных исследованиях, статистическое оценивание и проверка гипотез. Во второй части рассматриваются разные типы выборки. Приводятся примеры из экономических и социальных наук.

Для преподавателей математической статистики в экономических вузах и студентов изучающих этот курс.

М $\frac{0702000000-020}{010(01)-82}$ 37—82 (С)

ББК 22 172
517 8

¹ Второй индекс 1702060000

Предисловие

Существенное расширение границ применения математических методов при решении многочисленных практических задач на настоящем этапе строительства многосторонне развитого социалистического общества в Социалистической Республике Румынии находит выражение и во все более эффективном использовании математической статистики. Это нам кажется естественным, если учесть, что методы этой научной дисциплины полезны в первую очередь при сборе и научной обработке информации, лежащей в основе формулирования технико-экономических прогнозов, а также при разработке основных показателей текущих и перспективных планов. С другой стороны, они необходимы при исследовании современных технологических процессов. Поэтому естественным является все большее расширение круга людей, заинтересованных в познании и использовании фундаментальных методов математической статистики. Этот круг включает техников, инженеров, экономистов и другие категории специалистов сферы материального производства, а также работников центрального и местного государственного аппарата, выполняющих функции планирования и управления.

Среди методов математической статистики центральное место занимают выборки и статистические оценки, составляющие предмет обсуждения настоящей работы. Известно, что в настоящее время не существует области исследования, в которой не использовались бы статистические наблюдения. Характерной в этом отношении является, например, область деятельности, связанная со статистическим контролем качества технологии производства продукции в различных отраслях национальной экономики. В настоящее время создана математическая теория такого рода исследований, основанная на выборках и оптимальных оценках.

Конечно, авторы отдают себе отчет в том, что эта работа не исчерпывает всех теоретических и практических проблем, порождаемых статистическими исследованиями на основании больших или малых выборочных совокупностей, однако они все же надеются, что в пределах ограниченного объема книги основные проблемы были достаточно полно обсуждены и проиллюстрированы многочисленными примерами, что придало работе целостность и в то же время ясно выраженный прикладной характер.

Авторы заранее выражают свою признательность за любые замечания со стороны читателей книги.

АВТОРЫ

Часть первая. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ВЫБОРКИ И ОЦЕНКИ

Глава 1. Основные понятия теории вероятностей и наиболее важные распределения, применяемые в выборочном методе

Теория выборок целиком базируется на концепциях теории вероятностей. Естественно поэтому начать с сжатого изложения этих концепций и некоторых вероятностных законов, которые часто используются в выборках.

1.1. Событие. Поле событий

Рассмотрим множество¹ E , элементы которого будем называть элементарными событиями. Пусть $\mathcal{K}$ есть класс подмножеств множества E , обладающий следующими свойствами:

- 1) если $A \in \mathcal{K}$, то $\bar{A} \in \mathcal{K}$, под $\bar{A}$ понимается дополнение к A ;
- 2) если $A_1 \in \mathcal{K}$, $A_2 \in \mathcal{K}$, то $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{K}$.

Элементы класса подмножеств $\mathcal{K}$ называются *событиями*. Если множество событий бесконечно, предположим, что оно обладает еще одним свойством:

- 3) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{K}$ при $A_i \in \mathcal{K}$.

Будем в таком случае говорить, что E и $\mathcal{K}$ образуют *поле событий*, которое обозначим $(E, \mathcal{K})$.

1.2. Вероятность. Поле вероятностей

Пусть $P(A)$ есть вещественная функция, определенная на множестве элементов $A \in \mathcal{K}$. Примем в качестве аксиом (А. Н. Колмогорова) свойства:

- 1) $P(A) \geq 0$,
- 2) $P(E) = 1$,
- 3) $P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, если $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$

(для всех $i, j = 1, 2, \dots$), где $\emptyset$ — пустое множество.

¹ Предполагается, что читатель знаком с основами теории множеств.

Вещественная функция P называется *вероятностью*, а E , $\mathcal{E}$ и P образуют *поле вероятностей*, которое будем обозначать $(E, \mathcal{E}, P)$.

Дадим некоторые дополнительные пояснения, касающиеся теории полей событий $(E, \mathcal{E})$ и полей вероятностей $(E, \mathcal{E}, P)$.

Как мы уже видели, основной принцип, принятый в построении теории вероятностей, заключается в изложении теории событий, которые рассматриваются как части некоторого множества и дополнены некоей мерой, выражающей их вероятность.

Первичная абстрактная концепция в теории вероятностей — это концепция события, т. е. наступление или ненаступление какого-либо явления в результате некоторого эксперимента.

На множестве всех событий E определяются три операции, соответствующие трем логическим связям: «ИЛИ», «И», «НЕ». В этом смысле « A или B » есть событие, которое совершается тогда и только тогда, когда происходит по крайней мере одно из событий A или B ; это событие обозначается через $A \cup B$ и называется *объединением событий*

A и B . Выше мы использовали запись $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, придавая ей тот же смысл, а именно, понимая под этим выражением событие, которое наступает, когда наступает по крайней мере одно из событий A_i ($i = 1, 2, \dots$).

« A и B » есть событие, которое наступает, если оба события A и B имеют место. Такое событие будем обозначать через $A \cap B$ и называть *пересечением событий* A и B .

Наконец, каждому событию A соответствует некоторое событие «не A », которое наступает, если не имеет места событие A ; такое событие обозначается $\bar{A}$ (мы будем использовать также обозначение C_A) и называется событием, противоположным событию A .

Становится очевидной интерпретация события $E = A \cup \bar{A}$: речь идет о наступлении либо события A , либо события $\bar{A}$; следовательно, каково бы ни было событие A , одно из событий A или $\bar{A}$ *определенно* имеет место. Аналогично событие $A \cap \bar{A}$ состоит в одновременном наступлении событий A и $\bar{A}$, что неосуществимо, т. е. событие $A \cap \bar{A}$ является *невозможным* (будем его обозначать знаком $\emptyset$). Если $A \cap B = \emptyset$, то говорят, что события A и B *несовместны*.

В теории множеств рассматривается и отношение *включения*. Говорят, что событие A влечет событие B (это обозначают $A \subset B$), если всякий раз, как наступает A , непременно наступает и B . Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$ и говорят, что эти события *эквивалентны*.

Отметим, что события могут быть как *зависимыми*, так и *независимыми*. Два события называются *независимыми*, если вероятность одного из них не зависит от наступления другого. Они называются *зависимыми*, если вероятность наступления одного из них зависит от наступления второго.

З а м е ч а н и е. Частным случаем, имеющим практическое приложение, является случай, когда множество E содержит конечное число элементарных событий, например (ω_i) $1 \leq i \leq m$. При допущении равной вероятности наступления каждого из этих элементарных событий, т. е. при $p_i = 1/m$, $1 \leq i \leq m$,

вероятность любого события $A \in E$ равна $P(A) = 1/n$, где n — число элементарных событий, составляющих событие A .
 ходим к классическому определению вероятности некоего события A как к отношению числа элементарных равновероятных событий, благоприятствующих рассматриваемому событию, к общему числу равновероятных элементарных событий.

Модели, вытекающие из моделей урн Бернулли* с двумя или большим числом состояний, согласуются с классическим определением. Пусть имеется урна с m шарами, среди которых m_i шаров i -го цвета, $1 \leq i \leq k$, $\sum_{i=1}^k m_i = m$. Допустим, что вероятность извлечения одного фиксированного шара любого цвета равна $1/m$, тогда вероятность извлечения шара i -го цвета равна $p_i = m_i/m$, $1 \leq i \leq k$.

Любому полю вероятностей присущи следующие свойства, которые приводим без доказательства:

- 4) $0 \leq P(A) \leq 1$,
- 5) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$,
- 6) $P(\emptyset) = 0$,
- 7) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
- 8) $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

По поводу включения событий можно написать:

- 9) $P(A) \leq P(B)$, если $A \subset B$,
- 10) $P(B - A) = P(B) - P(A)$, если $A \subset B$,
- 11) $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$.

Под $B - A$ понимается событие, состоящее в наступлении B без наступления события A .

$$11) P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B).$$

Событие $(A - B) \cup (B - A)$ называется *симметричной разностью* и состоит в наступлении события A без наступления события B или в наступлении события B без наступления события A , т. е. в обязательном наступлении только одного из событий A или B .

Аналогично справедливо соотношение

$$12) P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \leq \sum_{i \in I} P(A_i)$$

для любого, самое большее, счетного семейства событий $(A_i)_{i \in I} \subset \mathcal{K}$.

1.3. Условные вероятности

Рассмотрим два события A и B , причем вероятность наступления события A обусловлена событием B^{**} , она обозначается $P(A/B)$ и выражается формулой

$$P(A/B) = P(A \cap B)/P(B). \quad (1.1)$$

Если $P(A/B) = P(A)$, то это означает, что независимо от того, наступает ли событие B , $P(A)$ не изменяется, т. е. A не зависит от B . Учитывая выражение для $P(A/B)$, получаем

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \quad (1.2)$$

Это условие независимости A и B друг от друга.

* См. определение на с. 27 и 30 — *Примеч. ред.*

** Предполагается, что $P(B) > 0$. — *Примеч. ред.*

Рассмотрим теперь три события: A, B, C . Условия взаимной независимости событий A, B, C выражаются в виде

$$\begin{aligned}P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B), & P(B \cap C) &= P(B) \cdot P(C), \\P(C \cap A) &= P(C) \cdot P(A), & P(A \cap B \cap C) &= P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).\end{aligned}$$

1.4. Закон больших чисел

Выражения 1, 2, 3 являются аксиомами, лежащими в основе построения теории вероятностей, и принимаются без доказательства. Остальные соотношения выводятся как теоремы из принятых аксиом. Эти аксиомы не произвольные, они согласуются с многочисленными статистическими наблюдениями. Многим явлениям природы, а также социально-экономической жизни свойственна определенная регулярность, «статистическая устойчивость», которая проявляется тем более отчетливо, чем больше число составляющих элементов изучаемого явления. Замечено, например, что отношение числа новорожденных мужского пола к числу новорожденных женского пола каждый год приблизительно одно и то же. Аналогично число смертных случаев в каждой популяции сохраняется статистически устойчивым в том смысле, что число смертных случаев на тысячу жителей изменяется очень незначительно. В классическом опыте подбрасывания монеты отношение числа появлений определенной ее стороны к общему числу подбрасываний сохраняется приблизительно равным $1/2$, и чем больше число подбрасываний, тем ближе это отношение к $1/2$. Регулярность статистики не может быть доказана, поскольку это экспериментальная истина, эмпирический постулат, который оправдывает применение вычислений вероятностей к практическим задачам. Эта регулярность известна под названием *закона больших чисел**, или эмпирического постулата теории вероятностей.

Этот закон лежит в основе теории выборок, когда допускается, что частичная совокупность, достаточно многочисленная, выбранная случайным образом из полной (генеральной) совокупности, имеет приблизительно ту же структуру, что и генеральная, относительно соотношений некоторых характеристик.

В 1.6.9 будут приведены некоторые математические результаты, касающиеся закона больших чисел.

1.5. Случайная величина. Функция распределения

Одним из основных понятий теории вероятностей является случайная величина (переменная). При введении этого понятия события могут быть описаны с помощью действительных числовых величин, которые, вообще говоря, являются результатом некоторых измерений.

* Строгие математические утверждения, отражающие свойство регулярности — стремление в определенных условиях усредненной суммы значений наблюдаемой величины к некоторому пределу с ростом числа наблюдений, — также называются законом больших чисел. — *Примеч. ред.*

1.5.1. Случайная величина

В общем случае под случайной величиной понимается вещественная функция от элементарных событий, которая в зависимости от результата опыта принимает значение из некоторого вполне определенного множества вещественных чисел. Значения функции не известны до осуществления опыта из-за случайных факторов, которые влияют на опыт. Например, при подбрасывании кости (опыт) нельзя знать заранее, какое число выпадет, поскольку результат опыта зависит от многих случайных факторов. В этом смысле число, которое может выпасть при подбрасывании кости, есть случайная величина, множество различных значений которой есть 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Приведем еще два примера случайной величины.

П р и м е р ы . 1. В серии из 100 штук одинаковых деталей, изготовленных автоматическим токарным станком, число деталей с дефектами есть случайная величина, которая может принимать одно из значений 0, 1, 2, ..., 100.

2. Доля промышленной продукции, приходящаяся на одного рабочего, есть случайная величина. В самом деле, она изменяется от предприятия к предприятию, от года к году под влиянием некоторых систематических факторов, воздействие которых не может быть оценено интегрально (технический прогресс, обеспечение определенными фондами, организация труда, профессиональные качества рабочих, экономическая эффективность и т. д.). Эта величина может принимать любое значение из определенного интервала значений (a , b).

Будем обозначать случайные величины прописными буквами X , Y , Z , ..., а их возможные значения — соответственно x_1 , x_2 , ..., x_n , ..., y_1 , y_2 , ..., y_m ,

В первом примере имеем случайную величину X (число бракованных деталей), которая может принимать значения из множества 0, 1, 2, ..., 100. Эти значения разделены интервалами, в которых нет возможных значений X ; следовательно, эта случайная величина может принимать только изолированные значения. Такая случайная величина является переменной *дискретного* типа (не непрерывная). Число возможных значений такой случайной величины может быть *конечным* или *бесконечным*.

Во втором примере имеем дело со случайной величиной другого типа. Ее возможные значения заполняют конечный или бесконечный интервал; подобная случайная величина называется *непрерывной*. Очевидно, число возможных значений такой случайной величины бесконечно.

1.5.2. Функция распределения

Наиболее общий способ, которым можно определить случайную величину независимо от того, является ли она дискретной или непрерывной, предоставляется функцией распределения.

Пусть X — случайная величина и x — вещественное число. Будем обозначать через $F(x)$ вероятность события ($X < x$), состоящего в том, что случайная величина X принимает значение, меньшее, чем x .

Если x меняется, то в общем случае будет изменяться и $F(x)$, т. е. $F(x)$ есть функция от x .

О п р е д е л е н и е. Функция $F(x)$, определенная как вероятность события $(X < x) : F(x) = P(X < x)$, называется *функцией распределения* случайной величины X .

Т е о р е м а 1.1. Функция распределения случайной величины X обладает следующими свойствами:

- 1) $F(-\infty) = 0$; 3) $F(x_1) \leq F(x_2)$ при $x_1 < x_2$;
- 2) $F(+\infty) = 1$; 4) $F(x-0) = F(x)$, для любого $x \in R$.

Функция распределения дискретной случайной величины, изображенная графически, представляет собой ступенчатую функцию. Она допускает скачки, причем сумма всех скачков равна 1 (рис. 1).

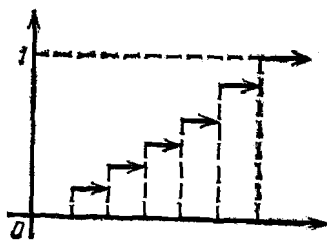


Рис. 1

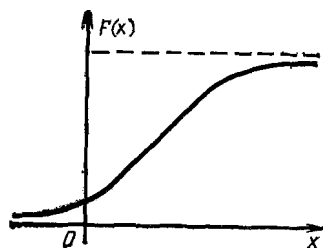


Рис. 2

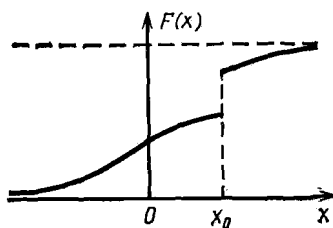


Рис. 3

Что же касается случайных величин непрерывного типа, то пример графика их функций распределения приведен на рис. 2; эта функция имеет в качестве асимптот ступени $F(x) = 0$ и $F(x) = 1^*$.

Существуют такие случайные величины, функция распределения которых изображена на рис. 3. Поскольку в точке x_0 функция $F(x)$ имеет разрыв, соответствующую случайную величину нельзя считать непрерывной.

1.6. Распределение. Плотность распределения

1.6.1. Распределение дискретной случайной величины

Распределением *дискретной* случайной величины называется закон вероятностей, по которому она появляется.*

* При $x \rightarrow -\infty$ и $x \rightarrow +\infty$ соответственно. — Примеч. ред.

Обычно это распределение записывается следующим образом:

$$X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}, \text{ или, короче, } X = \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Имея в виду, что в опыте дискретная случайная величина принимает одно и только одно из своих возможных значений, будем говорить, что события $(X = x_1)$, $(X = x_2)$, ..., $(X = x_n)$ образуют полное поле событий и, следовательно, $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1^*$.

1.6.2. Плотность распределения

О п р е д е л е н и е. Плотностью распределения называется первая производная (если она существует) функции распределения:

$$f(x) = F'(x). \quad (1.3)$$

Плотность распределения существует только для непрерывных случайных величин. Из (1.3) следует, что $f(x) \geq 0$, так как является производной неубывающей функции, и функция распределения $F(x)$ есть интеграл плотности распределения $f(x)$.

Каким образом интерпретировать плотность распределения?

Из определения следует, что $f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [F(x + \Delta x) - F(x)] / (\Delta x)^{-1}$.

Из дифференциального исчисления известно, что при достаточно малых Δx справедливо приближенное равенство $F(x + \Delta x) - F(x) \approx f(x) \Delta x$, вероятностная интерпретация которого очевидна: вероятность того, что случайная величина принимает значение, принадлежащее интервалу $(x, x + \Delta x)$, приблизительно равна произведению плотности распределения в точке x на длину Δx интервала.

Если известна плотность распределения, можно определить функцию распределения $F(x)$ с помощью следующей формулы:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx. \quad (1.4)$$

В самом деле, из определения плотности распределения следует, что $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx + C$, где C — константа. Устремляя x к $+\infty$ и учитывая свойство 2 функции распределения, получаем $C = 0$.

Т е о р е м а 1.2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X принимает значение из интервала (x_1, x_2) , равна интегралу от плотности распределения на интервале (x_1, x_2) : $P(x_1 <$

$$X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx.$$

* $p_i = P(X = x_i)$ — Примеч. ред.

В самом деле, учитывая равенство $P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$, в соответствии с (1.4) имеем $F(x_2) - F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} f(x) dx - \int_{-\infty}^{x_1} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$.

Можно дать геометрическую интерпретацию теоремы: вероятность того, что непрерывная случайная величина X принимает значение из

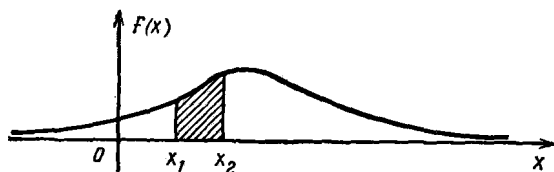


Рис. 4

интервала (x_1, x_2) , равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox , кривой плотности функции распределения $f(x)$ и прямыми $x = x_1$, $x = x_2$ (рис. 4).

Характеристическими свойствами плотности распределения являются $f(x) \geq 0$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

1.6.3. Многомерные случайные величины. Функция распределения

Определение, которое мы дали случайной величине, относится и к многомерному случаю. И в природе, и в обществе встречается много примеров многомерных случайных величин.

Допустим, какое-либо устройство изготавливает детали, характеризующиеся двумя измерениями, например длиной и шириной. Оба параметра измеряются с некоторой точностью в определенных интервалах, поскольку устройство не идеально. Пусть ξ — длина и η — ширина. Это приводит нас к рассмотрению случайной величины $X(\xi, \eta)$. Очевидно, что X можно понимать как случайный вектор, компонентами которого являются одномерные случайные величины ξ и η .

В качестве примера одномерной случайной величины мы приводили случайную величину, выявляющуюся при подбрасывании кости. Если бросать две кости, то пары чисел, появляющиеся на гранях этих двух костей, являются примером двумерной случайной величины. При бросании трех костей будем иметь дело с трехмерной случайной величиной.

Наконец, многомерной случайной величиной является вектор, каждая компонента которого — одномерная случайная величина.

Пусть $X(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ есть m -мерная случайная величина. Функция $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$, определенная равенством $F(x_1, x_2, \dots, x_m) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_m < x_m)$, где $x_1, x_2, \dots, x_m$ — вещественные числа, называется m -мерной функцией распределения.

Из определения вытекают следующие свойства:

- 1) $0 \leq F(x_1, x_2, \dots, x_m) \leq 1$,
- 2) $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$ является неубывающей функцией относительно каждой из своих переменных x_i ($i = 1, 2, \dots, m$),
- 3) $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$ непрерывна слева по каждой переменной x_i ($i = 1, 2, \dots, m$),
- 4) $F(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$, если по крайней мере одна из переменных x_i равна $-\infty$,
- 5) $F(x_1, x_2, \dots, x_m) = 1$, если все переменные x_i ($i = 1, 2, \dots, m$) равны $+\infty$.

1.6.4. Плотность многомерного распределения

Пусть $X(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ есть многомерная случайная величина.

Если $F(x_1, x_2, \dots, x_m) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_m} f(t_1, t_2, \dots, t_m) dt_1 \dots dt_m$ (для всех значений x_i , $i = 1, 2, \dots, m$), где $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$ есть функция распределения, то функция $f(t_1, t_2, \dots, t_m)$ — плотность распределения. Справедливы свойства $f(t_1, t_2, \dots, t_m) \geq 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1, t_2, \dots, t_m) dt_1 dt_2 \dots dt_m = 1.$$

Если $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$ дифференцируема по совокупности всех переменных, то $f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \partial^m F(x_1, x_2, \dots, x_m) / (\partial x_1 \dots \partial x_m)$.

1.6.5. Независимость двух случайных величин

О п р е д е л е н и е. Две случайные величины X и Y независимы, если независимы события $(X < x)$ и $(Y < y)$, каковы бы ни были значения x и y . Иными словами, $P(X < x, Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y)$ при любых значениях x и y . Учитывая, что $P(X < x, Y < y) = F(x, y)$, $P(X < x) = F_1(x)$, $P(Y < y) = F_2(y)$, где $F(x, y)$, $F_1(x)$ и $F_2(y)$ — соответствующие функции распределения, получаем $F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$.

С л е д с т в и е. Для того чтобы непрерывные случайные величины X и Y были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы двумерная плотность распределения $f(x, y)$ случайного вектора (X, Y) была равна произведению плотностей распределения $f_1(x)$ и $f_2(y)$ случайных величин X и Y : $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$.

1.6.6. Основные характеристики случайных величин

Случайная величина может быть задана с помощью функции распределения. Однако иногда для изучения различных случайных величин приходится прибегать к так называемым основным характеристикам, которые сопоставлены изучаемым случайным величинам. Отметим такие характеристики, как среднее значение, дисперсия, среднее

квадратическое отклонение, средние значения более высоких порядков (моменты), медиана, мода и т. п. Далее будем последовательно давать определения этим характеристикам, уточняя их наиболее важные свойства для двух типов случайных величин — дискретных и непрерывных.

Среднее значение. По определению среднее значение дискретной случайной величины X с распределением $X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}$, $1 \leq i \leq n$, равно сумме произведений значений, принимаемых величиной X , на соответствующие значения вероятностей.

Будем обозначать среднее значение случайной величины $M(X)$, m и $\bar{x}$ (в случае выборки); используя первое обозначение, можно написать: $M(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = \sum_{i=1}^n p_i x_i$.

Свойства среднего значения

1. Среднее значение константы a равно этой константе a : $M(a) = a$.

2. Среднее значение произведения константы a на случайную величину X равно произведению константы a на среднее значение этой случайной величины X :

$$M(a \cdot X) = a \cdot M(X). \quad (1.5)$$

3. Среднее значение конечной суммы случайных величин равно сумме их средних значений:

$$M(X + Y + \dots + Z) = M(X) + M(Y) + \dots + M(Z). \quad (1.6)$$

4. Среднее значение произведения двух независимых случайных величин равно произведению их средних значений:

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y). \quad (1.7)$$

Это свойство сохраняется и для любого конечного числа независимых случайных величин.

5. В процессе изменения случайная величина X колеблется вокруг своего среднего значения.

Другими словами, если $M(X) = m$, а x_α и x_β — самое малое и самое большое значения соответственно, то можно записать

$$x_\alpha \leq m \leq x_\beta. \quad (1.8)$$

6. Среднее значение отклонения от среднего случайной величины равно нулю.

Пусть X — случайная величина и $M(X)$ — ее среднее значение. Рассмотрим случайную величину $X - M(X)$, которая называется отклонением случайной величины от ее среднего значения (короче — «отклонение»). Если X имеет распределение $X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}$, $1 \leq i \leq n$, то отклонение имеет распределение

$$X - M(X) : \begin{pmatrix} x_i - M(X) \\ p_i \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i \leq n.$$