Nachrichtentechnik 4

H. Kremer

Numerische Berechnung linearer Netzwerke und Systeme

Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Hermann Kremer

Numerische Berechnung linearer Netzwerke und Systeme

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York 1978

Dr.-Ing. HERMANN KREMER

Dozent im Fachbereich Elektrische Nachrichtentechnik
der Technischen Hochschule Darmstadt

Dr.-Ing. HANS MARKO

o. Professor, Lehrstuhl für Nachrichtentechnik
Technische Universität München

Mit 29 Abbildungen

ISBN 3-540-08402-9 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-08402-9 Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin

Library of Congress Cataloging in Publication Data
Kremer, Hermann, 1940– Numerische Berechnung linearer Netzwerke und Systeme. (Nachrichtentechnik ; Bd. 4) Bibliography: p. Includes index. 1. System analysis. 2. Numerical analysis. 3. Electric networks. I. Title. II. Series.
QA402.K72 003 77-21715

Printed in Germany

Offsetdruck: fotokop wilhelm weihert kg, Darmstadt · Bindearbeiten: Konrad Triltsch, Würzburg
2362/3020 5 4 3 2 1 0

Nachrichtentechnik
Herausgegeben von H. Marko
Band 4

Nachrichtentechnik

Herausgeber: H. Marko

Band 1
H. MARKO, Technische Universität München

Methoden der Systemtheorie

Die Spektraltransformationen und ihre Anwendungen

87 Abbildungen, 11 Tabellen. Etwa 200 Seiten. 1977
Geheftet DM 65,–
ISBN 3-540-08106-2

Inhaltsübersicht: Zeitfunktion und Spektrum. – Allgemeine Spektraltransformation. – Lineare zeitinvariante Systeme. – Gesetze der Spektraltransformationen. – Hilbert-Transformation. – Das Abtasttheorem. – Die z-Transformation. – Finite Signale. – Systembeschreibung durch Differential- und Differenzengleichungen. – Anhang.

Band 2
P. HARTL, Technische Universität Berlin

Fernwirktechnik der Raumfahrt

Telemetrie, Telekommando, Bahnvermessung

104 Abbildungen. XIII, 208 Seiten. 1977
Geheftet DM 42,–
ISBN 3-540-08172-0

Inhaltsübersicht: Funktionen des Fernwirksystems. – Signalübertragung und Rauschen. Modulation. – Synchronisation. – Funktechnische Bahnvermessung. – Wellenausbreitung. – Anhang.

Springer-Verlag
Berlin
Heidelberg
New York

Band 3
E. LÜDER, Universität Stuttgart

Bau hybrider Mikroschaltungen

Einführung in die Dünn- und Dickschichttechnologie

141 Abbildungen. Etwa 160 Seiten. 1977
Geheftet DM 48,–
ISBN 3-540-08289-1

Inhaltsübersicht: Einführung und Überblick. – Kennzeichen der Schichtbauteile. – Substrate. – Dickschichttechnik. – Dünnschichttechnik. – Bonden. – Abgleich von Bauteilen. – Dünnschichttransistoren.

Band 4
H. KREMER, Technische Hochschule Darmstadt

Numerische Berechnung linearer Netzwerke und Systeme

29 Abbildungen, 26 Tabellen. Etwa 200 Seiten. 1977
Geheftet DM 48,–
ISBN 3-540-08402-9

Inhaltsübersicht: Berechnung linearer zeitinvarianter Netzwerke im Frequenzbereich. – Numerische Lösung linearer Gleichungssysteme. – Analyse von Netzwerken mit einstellbaren Parametern. – Ausblick auf weitere Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme.

In Vorbereitung:

R. ELSNER

Nichtlineare Schaltungen

G. FÄRBER

Prozessrechentechnik

E. LÜDER

Entwurf miniaturisierter Schaltungen

Springer-Verlag
Berlin
Heidelberg
New York

Geleitwort

Die Nachrichten- oder Informationstechnik befindet sich seit vielen Jahrzehnten in einer stetigen, oft sogar stürmisch verlaufenden Entwicklung, deren Ende nicht abzusehen ist. Durch die Fortschritte der Technologie wurden ebenso wie durch die Verbesserung der theoretischen Methoden nicht nur die vorhandenen Anwendungsgebiete ausgeweitet und den sich ändernden Erfordernissen angepaßt, sondern auch neue Anwendungsgebiete erschlossen.

Zu den klassischen Aufgaben der Nachrichtenübertragung und Nachrichtenvermittlung ist die Nachrichtenverarbeitung hinzugekommen, die viele Gebiete des beruflichen, neuerdings auch des privaten Lebens in zunehmendem Maße verändert. Die Bedürfnisse und Möglichkeiten der Raumfahrt haben gleichermaßen neue Perspektiven eröffnet wie die verschiedenen Alternativen zur Realisierung breitbandiger Kommunikationsnetze. Neben die analoge ist die digitale Übertragungstechnik, neben die klassische Text-, Sprach- und Bildübertragung ist die Datenübertragung getreten. Die Nachrichtenvermittlung im Raumvielfach wurde durch die elektronische zeitmultiplexe Vermittlungstechnik ergänzt. Satelliten- und Glasfasertechnik haben zu neuen Übertragungsmedien geführt. Die Realisierung nachrichtentechnischer Schaltungen und Systeme ist durch den Einsatz des Elektronenrechners und die digitale Schaltungstechnik erheblich verbessert und erweitert worden.

Die Buchreihe „Nachrichtentechnik" soll dieser Entwicklung Rechnung tragen und eine zeitgemäße Darstellung der wichtigsten Themen der Nachrichtentechnik anbieten. Die einzelnen Bände werden von Fachleuten geschrieben, die auf dem jeweiligen Gebiet kompetent sind. Jedes Buch soll in ein bestimmtes Teilgebiet einführen, die wesentlichen heute bekannten Ergebnisse darstellen und eine Brücke zur weiterführenden Spezialliteratur bilden. Dadurch soll es sowohl dem Studierenden bei der Einarbeitung in die jeweilige Thematik als auch dem im Beruf stehenden Ingenieur oder Physiker als Grundlagen- oder Nachschlagewerk dienen. Die einzelnen Bände sind in sich abgeschlossen, ergänzen einander jedoch innerhalb der Reihe. Damit ist eine gewisse Überschneidung unvermeidlich, ja sogar erforderlich.

Die derzeitige Planung für die Reihe reicht von den Methodenlehren wie Netzwerktheorie, Systemtheorie, Modulation, Codierung, Informationstheorie, logische Schaltungen, rechnergestützte Entwurfsmethoden, Simulation usw. bis zu den verschiedenen Anwendungsgebieten wie Fernwirktechnik, Sprachübertragung, Bildübertragung, Datenübertragung, Nachrichtenvermittlung, optische Nachrichtenübertragung, Datenverarbeitung, Prozeßrechentechnik usw. Ihre Realisierung wird allerdings einige Zeit in Anspruch nehmen.

Ich hoffe, daß die Konzeption dieser Buchreihe, nämlich eine dem Wissensstand entsprechende Darstellung des Gesamtgebietes der Nachrichtentechnik in Form von Einzeldarstellungen aus der Feder kompetenter Fachleute zu bringen, viele Freunde an Universitäten und Hochschulen sowie in der Industrie finden wird. Anregungen aus dem Interessentenkreis sind jederzeit willkommen.

Dem Springer–Verlag sei an dieser Stelle für die Mithilfe bei der Gestaltung dieser Reihe und die ansprechende Ausstattung der ersten Bände gedankt.

München, im Frühjahr 1977 H. Marko

Vorwort

Dieses Buch entstand aus einer vom Verfasser seit mehreren Jahren an der Technischen Hochschule Darmstadt gehaltenen Vorlesung, die die numerische Behandlung von Problemen der Netzwerk– und Systemtheorie zum Inhalt hat und sich an Studenten der Nachrichtentechnik, Regelungstechnik, Datentechnik und Theoretischen Elektrotechnik mittlerer und höherer Semester richtet. Es hat zum Ziel, die bei der Analyse linearer Netzwerke und Systeme im Frequenzbereich unter Verwendung eines Digitalrechners typischen Probleme in einer auf den Ingenieur bezogenen Form darzustellen, wobei an Vorkenntnissen etwa der Inhalt der üblichen Grundvorlesungen in Ingenieurmathematik und in elektrischer Netzwerktheorie vorausgesetzt wird.

Im ersten Teil werden die für die Knotenanalyse linearer Netzwerke wesentlichen rechnerspezifischen Gesichtspunkte vorgestellt. Dabei wird auf die Behandlung solcher Bauelemente besonderer Wert gelegt, die selbst keine Leitwertdarstellung besitzen, wie etwa ideale Übertrager oder gewisse ideale gesteuerte Quellen, und deren Behandlung üblicherweise große Schwierigkeiten verursacht. Damit zusammenhängend wird erstmalig in einem Lehrbuch ein systematisches Verfahren beschrieben und an zahlreichen Beispielen erläutert, welches durch Einführen bestimmter Zusatzparameter auch für Netzwerke mit solchen Elementen die Aufstellung einer Knotenleitwertmatrix auf einfache Weise gestattet.

Nach einem Abschnitt über die Berechnung beliebiger Tormatrizen aus einer Knotenleitwertmatrix wird dann im zweiten Teil die Lösung linearer Gleichungssysteme sehr ausführlich behandelt. Dabei ist im Gegensatz zu allen bekannten Lehrbüchern der numerischen Mathematik das Schwergewicht auf die komplexen Gleichungssysteme gelegt. Dieser Teil beginnt mit einer Diskussion der durch die komplexe Rechnung bedingten besonderen programmtechnischen Probleme, wonach ein recht ausführlicher Abschnitt über Normen und Konditionszahlen folgt, der dem Leser vor allem das Studium der mathematischen Originalliteratur erleichtern soll.

Dem schließt sich eine Darstellung verschiedener Varianten der LR–Zerlegung an, wobei auch eine Verallgemeinerung der üblicherweise nur für reell–symmetrische und positiv definite Gleichungssysteme betrachteten Cholesky–Elimination für allgemeine komplexe Gleichungssysteme beschrieben wird. Im Zusammenhang mit der iterativen Lösungsverbesserung wird dann auch auf die Wilkinsonsche Rundungsfehleranalyse eingegangen. Um den Leser, der Zielsetzung des Buches entsprechend, dabei aber nicht durch einen umfangreichen mathematischen Formalismus zu ermüden, ist dieser Abschnitt bewußt summarisch gehalten; er sollte ohne Anspruch auf Vollständigkeit nur als Einführung in die wesentlichsten Gedankengänge betrachtet werden.

Der folgende Abschnitt befaßt sich mit der in den meisten Lehrbüchern nur sehr stiefmütterlich behandelten Skalierung und Äquilibrierung linearer Gleichungssysteme, wobei die einheitliche Darstellung der numerisch günstigeren impliziten Skalierung im Mittelpunkt steht. Nach einem kurzen Blick auf Verträglichkeitskriterien folgt dann eine ausführliche Diskussion der sich aus der meist nach Woodbury benannten Formel ergebenden Folgerungen für die Analyse von Systemen mit einstellbaren Parametern. Daran anschließend wird die Berechnung von differentiellen Netzwerkgrößen wie Gruppenlaufzeit und Parameterempfindlichkeiten behandelt. Ein kurzer Ausblick auf sonstige numerische Verfahren schließt das Buch ab.

Bei der Darstellung der einzelnen Verfahren werden strenge Beweise, die der Leser auch in der angegebenen Literatur finden kann, weitgehend vermieden und stattdessen die bei der Programmierung wesentlichen Gesichtspunkte in den Vordergrund gerückt. Zur Einübung der bei der Verwendung von Rechenanlagen unerläßlichen algorithmischen Denkweise werden die wichtigsten Verfahren auch in Form detaillierter Algorithmen vorgestellt und dabei zu deren formaler Beschreibung die Formelsprache ALGOL 60 verwendet. Da es hierbei nur um die präzise Beschreibung von Rechenvorschriften und nicht primär um die Erstellung lauffähiger Programme geht, werden stillschweigend auch komplexe Variable verwendet, die in der Definition von ALGOL 60 nicht vorgesehen sind. Es dürfte dem Anwender aber ohne Schwierigkeiten möglich sein, die Algorithmen in lauffähige ALGOL–Programme oder Programme einer anderen Sprache, etwa PASCAL, PL/I oder FORTRAN, zu übersetzen. Zusätzlich zu den Algorithmen wird in einem Anhang eine Auswahl der wichtigsten Verfahren nochmals in Form gründlich getesteter FORTRAN–Unterprogramme angegeben.

Der Verfasser möchte all denen danken, die ihn beim Abfassen des Buchs mit Rat und Tat unterstützt haben, vor allem Herrn Prof. Dr.–Ing. Wilhelm Klein für viele wertvolle Anregungen zum ersten Teil, Herrn Dipl.–Phys. Heinz von Seggern und Herrn Dipl.–Ing. Heinz–Dieter Ferling für viele wertvolle Hinweise zum zweiten Teil und den Programmen, Frau Edith Mönch für die Reinzeichnung der Bilder, Frau Gretel Scheuermann für ihre Hilfe beim Schreiben des Manuskripts und nicht zuletzt dem Herausgeber dieser Reihe und dem Verlag.

Darmstadt, im Mai 1977 Hermann Kremer

Inhaltsverzeichnis

1 Berechnung linearer zeitinvarianter Netzwerke im Frequenzbereich

1.1 Knotenanalyse linearer Netzwerke aus konzentrierten Schaltelementen

1.1.1 Einführung

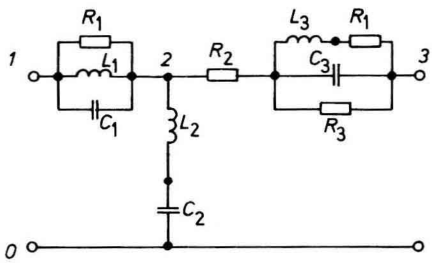
Ein lineares zeitinvariantes Netzwerk, das ausschließlich aus konzentrierten Elementen aufgebaut ist, läßt sich im Frequenzbereich entweder durch eine Maschenwiderstandsmatrix, eine Schnittmengenmatrix oder eine Knotenleitwertmatrix vollständig beschreiben [2]. Diese Beschreibungsweisen sind mathematisch gleichwertig; bei der praktischen Berechnung von Netzwerken mittels eines Digitalrechners wird man in der Regel aber die *Knotenanalyse* vorziehen, da die Bestimmung der Knotenleitwertmatrix aus der gegebenen Schaltung besonders einfach ist und insbesondere die für die Maschen- bzw. Schnittmengenanalyse notwendige Baumsuche entfällt. Enthält das Netzwerk außer Zweipolzweigen auch noch gesteuerte Quellen oder Übersetzermehrpole, wie z.B. Übertrager, so lassen sich diese Elemente, gegebenenfalls unter Einführen gewisser Zusatzknoten, ebenfalls recht einfach in eine Knotenleitwertmatrix einbauen, während dies bei der Maschen- oder Schnittmengenanalyse meist recht schwierig ist. Die für die Handrechnung wesentliche Tatsache, daß bei schwach vermaschten Netzwerken eine Maschenwiderstands- bzw. Schnittmengenmatrix häufig von niedrigerer Ordnung ist als die Knotenleitwertmatrix, ist demgegenüber für die Maschinenrechnung nur von zweitrangiger Bedeutung.

Die Theorie der Netzwerkmatrizen ist in einer ganzen Reihe von Lehrbüchern und Aufsätzen sehr ausführlich dargestellt [1–10], so daß an dieser Stelle auf eine Wiederholung verzichtet und nur das für die rechnergestützte Analyse von Netzwerken Wesentliche behandelt werden soll.

1.1.2 Zweipolzweige

Als erster Schritt im Verlauf jeder Netzwerkanalyse müssen die Knoten des Netzwerks numeriert und die Zweige des Netzwerks mit Zählpfeilen versehen werden. Die Knotennumerierung ist im Prinzip beliebig; für die schematisierte Aufstellung von Netzwerkmatrizen erweist es sich aber als vorteilhaft, die Knoten von Null beginnend in fortlaufender Reihenfolge zu numerieren und als Bezugspunkt für die Knotenpotentiale den Knoten mit der Nummer Null zu wählen. Jeder Netzwerkzweig ist durch seinen Anfangs- und seinen Endknoten definiert; vereinbart man nun z.B., daß bei Bezugnahme auf einen bestimmten Zweig immer zuerst dessen Anfangs- und dann dessen Endknoten genannt wird, so ist damit auch seine Zählrichtung festgelegt. Bei der späteren Berechnung der Zweigströme können hierbei jedoch immer dann Schwierigkeiten auftreten, wenn Zweipolzweige aus mehreren parallel geschalteten Einzelzweipolen bestehen, wie es Bild 1.1.1 z.B. für den zwischen den Knoten 1 und 2 liegenden Zweig zeigt.

Eine einfache Möglichkeit, um ohne eine aufwendige Zweignumerierung auch in solchen Fällen Eindeutigkeit zu erzielen, besteht darin, als topologische Netzwerkzweige grundsätzlich auch zusammengesetzte Zweipole zuzulassen und diese bei der Dateneingabe in den Rechner durch eine geeignete Sprache zu beschreiben.



$R_1 = 100\ \Omega$
$R_2 = 200\ \Omega$
$R_3 = 100\ \Omega$
$L_1 = 0{,}1$ H
$L_2 = 0{,}5$ H
$L_3 = 0{,}66$ H
$C_1 = 1\ \mu F$
$C_2 = 0{,}2\ \mu F$
$C_3 = 0{,}3\ \mu F$

Bild 1.1.1. Zweipolnetzwerk aus linearen konzentrierten Bauelementen

Eine solche Zweigbeschreibungssprache muß folgende Sprachelemente enthalten:

Alphabet der erlaubten Schaltelemente, z.B.:	R G L C
Symbol für die Reihenschaltung, z.B.:	–
Symbol für die Parallelschaltung, z.B.:	/
Gruppierungssymbol, z.B.:	( )
Trennsymbole, z.B.:	, : ;
Symbol zur Zweigdefinition, z.B.:	Z(i,k) :=
Symbole für starre Quellen:	s. Abschnitt 1.1.3
Wertzuweisung für die Schaltelemente, z.B.:	R1 = 100 .

Unter Verwendung einer solchen Sprache würde etwa die Schaltung in Bild 1.1.1 folgendermaßen beschrieben:

```
Z(1,2) := R1/L1/C1;
Z(2,0) := L2–C2;
Z(2,3) := R2–((L3–R1)/C3/R3);                    (1.1.1)
R1 = 100; R2 = 200; R3 = 100;
L1 = 0.1; L2 = 0.5; L3 = 0.66;
C1 = 1E–6; C2 = 0.2E–6; C3 = 0.3E–6;.
```

Durch die Angabe Z(i,k) := ⟨ ... ⟩ soll dabei der betreffende Zweig als vom Knoten i zum Knoten k orientiert festgelegt sein; die umgekehrte Orientierung erhält man dann einfach durch die Zweigdefinition Z(k,i) := ⟨ ... ⟩. Einschließlich des Bezugsknotens Null enthält das Netzwerk bei dieser Beschreibung also nur vier Knoten, während bei einer Beschreibung durch nicht zusammengesetzte Zweige insgesamt sieben Knoten erforderlich wären.

Eine solche Zweigbeschreibungssprache läßt sich relativ leicht auf einem Digitalrechner verarbeiten. Dazu kann man entweder die einzelnen Zweiganweisungen in internen

Listen ablegen und diese dann zur Objektzeit durch einen speziellen Interpreter abarbeiten oder aber einen Precompiler implementieren, der die Zweiganweisungen in einer gesonderten Übersetzungsphase in Maschinenbefehle übersetzt und diese an denjenigen Programmteil übergibt, der die eigentliche Zahlenrechnung durchführt, wie es z.B. in dem in [11] beschriebenen Analyseprogramm geschieht.

Zusätzlich zu der oben skizzierten Zweigbeschreibung sind für die Aufstellung der Analysegleichungen eines Netzwerks in einem Frequenzpunkt noch folgende Angaben notwendig:

- Topologie des nur aus Zweipolzweigen bestehenden Teils des Netzwerks (Zweipolteilnetz),
- Topologie der nicht in Zweipolnetze zerlegbaren Mehrpole des Netzwerks (Mehrpolteilnetze),
- Zahlenwerte der Schaltelemente für den gerade betrachteten Frequenzpunkt.

Der Gewinnung und Verarbeitung dieser Angaben auf einem Digitalrechner sind die folgenden Abschnitte gewidmet.

1.1.3 Starre Quellen

In der Regel wird ein Netzwerk durch eine oder mehrere starre, d.h. nichtgesteuerte Spannungs- bzw. Stromquellen angeregt. Solche Quellen sind Zweipolquellen; sie können daher als Teile des Zweipolnetzes betrachtet werden. Verbieten muß man dabei jedoch offensichtlich unsinnige Anordnungen, wie etwa die Reihenschaltung zweier Stromquellen oder die Parallelschaltung zweier Spannungsquellen. Zur Dateneingabe in den Rechner sind dann in das Netzwerk Knoten in der Weise einzuführen, daß für jeden Zweig mit starren Quellen eine der in Bild 1.1.2 gezeigten äquivalenten Zweigstrukturen entsteht. Für den Fall, daß dabei ein Zweig nur eine einzige Spannungsquelle (Stromquelle) enthält, ist der Wert von $I_E(U_E)$ in Bild 1.1.2 zu Null zu setzen. Im Fall, daß ein Netzwerkzweig nur aus einer innenwiderstandsfreien Spannungsquelle gebildet wird, ist allerdings keine der angegebenen Zweigstrukturen zu erzielen; es müssen dann besondere Maßnahmen getroffen werden, die in Abschnitt 1.1.10 näher erläutert werden sollen.

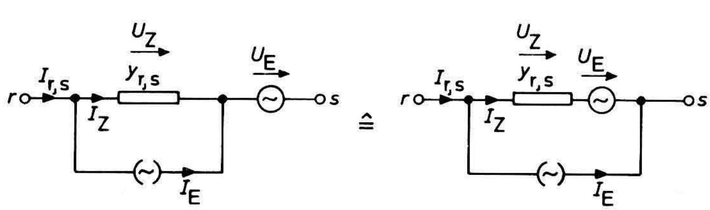


Bild 1.1.2. Äquivalente Ersatzbilder von Zweipolzweigen mit starren Quellen

In Bild 1.1.2 ist $y_{r,s}$ der Leitwert des Zweiges zwischen den Knoten r und s; I_E bedeutet den Kurzschlußstrom einer idealen starren Stromquelle mit Innenwiderstand $R_i = \infty$ und U_E die Leerlaufspannung einer idealen starren Spannungsquelle mit Innenwiderstand $R_i = 0$. Die Äquivalenz der beiden Schaltungen erkennt man sofort aus den Beziehungen

$$\begin{aligned} U_{r,s} &= U_Z + U_E \\ I_{r,s} &= I_Z + I_E \ . \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Zur Beschreibung von starren Quellen bei der Dateneingabe in einen Rechner kann man die oben skizzierte Zweigbeschreibungssprache um geeignete Elemente erweitern. Man kann z.B. die Symbole +UE, −UE, +IE, −IE noch in das Alphabet der Schaltelemente aufnehmen; dabei soll das positive Vorzeichen angeben, daß der Quellenzählpfeil mit dem Zweigzählpfeil übereinstimmt, und das negative Vorzeichen, daß Quellen- und Zweigzählrichtung entgegengesetzt sind. Mit diesen Vereinbarungen kann z.B. der in Bild 1.1.3 gezeigte Zweig folgendermaßen beschrieben werden:

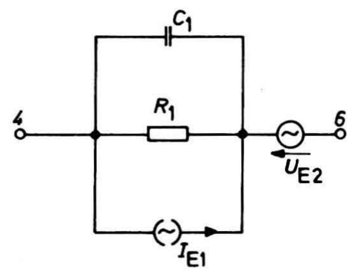


Bild 1.1.3. Zweipolzweig mit starren Quellen

Z(4,6) := R1/C1, IE1, − UE2;

oder gleichbedeutend:

Z(6,4) := R1/C1, − IE1, UE2; .

In einer Wertzuweisung müssen dann noch die Zahlenwerte für U_{E2} bzw. I_{E1} angegeben werden.

1.1.4 Analysegleichungen des Zweipolteilnetzwerks

Die Topologie eines reinen Zweipolnetzes läßt sich für die Knotenanalyse durch die sog. Knoten–Zweig–Inzidenzmatrix **K** beschreiben [2]. Enthält das Netzwerk einschließlich des Bezugsknotens n+1 Knoten und z Zweige, und hat der Bezugsknoten die Nummer Null, so ist diese Inzidenzmatrix eine rechteckige Matrix mit n Zeilen und z Spalten, die nach folgender Vorschrift gebildet wird:

Vorschrift V1: Liegt der j–te Zweig zwischen dem Anfangsknoten r und dem Endknoten s und ist weder r noch s gleich Null, so erhält **K** die Einträge

$$\begin{aligned} &K(r,j) = +1 \\ &K(s,j) = -1 \\ &K(l,j) = 0;\ l = 1, \dots n,\ l \neq r,s\ . \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

Ist r oder s gleich Null, so erfolgt dafür kein Eintrag.

Die Inzidenmatrix **K** enthält also nur die Elemente +1, −1, und 0, wobei in jeder Spalte höchstens zwei von Null verschiedene Elemente stehen. Betrachten wir als Beispiel den Graphen in Bild 1.1.4, wobei der besseren Übersicht wegen die Zweige ebenfalls numeriert sind, so wird dieser durch die folgende (6 × 12)–reihige Inzidenzmatrix beschrieben:

$$\begin{array}{rcc}
\text{Zweig:} & \begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12\end{matrix} & \text{Knoten:}\\
\mathbf{K} = & \begin{bmatrix}
1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
-1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&-1&1&0&1&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-1&0&1&0&1\\
0&-1&-1&0&-1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&1&-1
\end{bmatrix} & \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{matrix}
\end{array} \qquad (1.1.4)$$

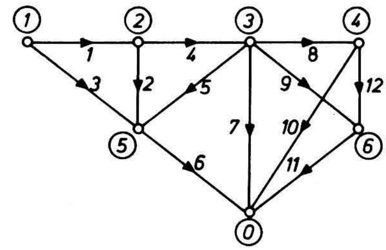


Bild 1.1.4. Allgemeiner Netzwerkgraph mit 7 Knoten und 12 Zweigen

Allgemein gibt die p–te Zeile der Knoten–Zweig–Inzidenzmatrix eines Netzwerks an, welche Zweige am p–ten Knoten angreifen, und die q–te Spalte, zwischen welchen Knoten der q–te Zweig liegt, wobei die zum Knoten hin weisende Zählrichtung durch -1 und die vom Knoten weg weisende Zählrichtung durch $+1$ gekennzeichnet ist. Enthält eine Spalte nur einen von Null verschiedenen Eintrag, so liegt der betreffende Zweig mit dem anderen Ende am Bezugsknoten. Faßt man nun sämtliche Zweigströme in einem Vektor $\mathbf{I}_K$ und sämtliche Zweigspannungen in einem Vektor $\mathbf{U}_K$ zusammen und führt man zusätzlich den Vektor $\mathbf{U}$ der Knotenpotentiale bezüglich des Bezugsknotens ein, in unserem Beispiel:

$$\mathbf{I}_K = \begin{bmatrix} I_{1,2}\\ I_{2,5}\\ \vdots\\ I_{4,6}\end{bmatrix} ; \qquad \mathbf{U}_K = \begin{bmatrix} U_{1,2}\\ U_{2,5}\\ \vdots\\ U_{4,6}\end{bmatrix} ; \qquad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_{1,0}\\ U_{2,0}\\ U_{3,0}\\ U_{4,0}\\ U_{5,0}\\ U_{6,0}\end{bmatrix} ,$$

so lassen sich die Kirchhoffschen Gleichungen für das Netzwerk folgendermaßen anschreiben:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{I}_K = \mathbf{0} \quad , \qquad (1.1.5)$$

$$\mathbf{K}' \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U}_K \quad , \qquad (1.1.6)$$

wobei $\mathbf{K}'$ die zu $\mathbf{K}$ transponierte (gespiegelte) Matrix bedeutet. Legt man den allgemeinen Zweig nach Bild 1.1.2 zugrunde und faßt man sämtliche starren Spannungsquellen in einem Vektor $\mathbf{U}_E$ und sämtliche starren Stromquellen in einem Vektor $\mathbf{I}_E$ zusam-