математический
анализ
экономических
моделей

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОТРАСЛЕВЫХ И РЕГИОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ЭКОНОМИКИ И ОРГАНИЗАЦИИ
ПРОМЫШЛЕННОГО ПРОИЗВОДСТВА

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОТРАСЛЕВЫХ И РЕГИОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Ответственные редакторы:
канд. экон. наук Е. Л. БЕРЛЯНД,
канд. физ-мат. наук С. Б. БАРАБАШ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
Новосибирск · 1983

Математические методы анализа взаимодействия отраслевых и региональных систем.— Новосибирск: Наука, 1983. (Серия: Математический анализ экономических моделей).

Основное содержание сборника составляют работы, посвященные вопросам математического анализа некоторых классов моделей взаимодействия, моделированию различных производств и целевых комплексных программ, построению методов нахождения согласованных отраслевых и региональных решений.

Для научных работников, преподавателей вузов, аспирантов и студентов.

М $\frac{0604020102-844}{042(02)-83}$ 79—83—III

С. Б. БАРАБАШ, В. П. БУСЫГИН

СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ ОТКЛИКА В МОДЕЛЯХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

При изучении проблемы согласования решений в системе моделей важную роль играют характеристики реакции подсистемы на внешние воздействия — свойства ее функции отклика. Эта функция определяет информацию о данной подсистеме, доступную другим подсистемам или координирующему органу. Такой информацией могут быть заявки на общесистемные ресурсы и продукцию других отраслей (функции издержек), оценки ограничений по плановым заданиям и ресурсам, производственные функции.

Важность изучения свойств функций отклика объясняется тем, что в их терминах обычно формулируются требования, предъявляемые к согласованным решениям, и условия сходимости алгоритмов согласования.

В работе изучены топологические свойства функций отклика различных типов подсистем в системах моделей, обычно рассматриваемых в экономико-математической литературе [1—6].

§ 1. Понятие решающей системы и ее функции отклика

Дадим формальное определение функции отклика для подсистем, являющихся решающими системами [7]. Входящие в описание модели подсистемы переменные делятся на переменные входа, выхода и переменные состояния. Множество допустимых значений переменных входа обозначим через X, выхода — через Y, а переменных состояния — через Z.

Системой S называется некоторая совокупность пар произведения $X \times Y$, т. е. $S \subset X \times Y$. Пара $(x, y) \in S$ называется допустимым преобразованием входа x в выход y. Система S называется решающей, если допустимые преобразования $(x, y) \in S$ определяются следующим образом. Задается семейство задач D_x, зависящее от параметра x, с множеством решений в Z и оператор $T: X \times Z \to Y$. Пара $(\bar{x}, \bar{y}) \in S$ в том и только в том случае, если существует элемент $\bar{z} \in Z$ такой, что $\bar{z}$ является решением задачи $D_{\bar{x}}$ и $T(\bar{x}, \bar{z}) = \bar{y}$.

Данное определение решающей системы охватывает широкий класс конкретных моделей подсистем и позволяет рассматривать с единой точки зрения различные схемы их взаимодействия. Введенные обозначения дают возможность определить понятие функции отклика для решающих систем.

Функцией отклика называется отображение f из множества X входов системы в множество Y ее выходов, имеющее вид:

$$f : x \to \{y : y = T(x, z), \text{ где } z \text{ — решение задачи } D_x\}. \quad (1)$$

Определим точечно-множественное отображение M по формуле $M : x \to M(x)$, где $M(x)$ — множество решений задачи D_x. Тогда функция отклика представима в виде композиции оператора T и отображения M, т. е. $f = T \circ M$. Предположим, что X, Y и Z — топологические пространства и T — непрерывный оператор. В этом случае рассматриваемая задача сводится к анализу топологических свойств отображения M (см. теорему 4). Для ее решения следует конкретизировать тип решающей системы.

В данной работе в качестве модели подсистемы рассматривается задача параметрического программирования, т. е. задача D_x имеет вид

$$\varphi(z, x) \mapsto \inf; \quad (2)$$

$$z \in F(x), \quad (3)$$

где $\varphi : X \times Z \to R$ — непрерывный функционал, а $F : x \to F(x)$ — точечно-множественное отображение, сопоставляющее элементам пространства X множества пространства Z (множества допустимых элементов экстремальной задачи D_x).

Здесь мы ограничимся изучением ситуации, когда X, Y, Z — конечномерные нормированные пространства, а $F(x)$ являются выпуклыми многогранными множествами. Однако большинство полученных результатов без труда распространяется на случай, когда D_x является задачей квазивыпуклого программирования.

В контексте ситуаций, изучаемых в работе, представляется естественным рассматривать в качестве решений задачи D_x наряду с обычными так называемые ε-оптимальные решения, где ε — фиксированное положительное число. Это связано с тем, что в процессе согласования решений значения функции отклика находятся приближенно с той или иной степенью точности. К тому же ε-оптимальные решения обладают лучшими топологическими свойствами, чем точные решения. Под ε-оптимальными решениями понимаются допустимые решения задачи D_x, на которых значения функционала φ отличаются от оптимального значения задачи на величину, не превосходящую ε. Введем следующие обозначения:

$$\psi(x) = \inf \{t/t = \varphi(z, x), z \in F(x)\}; \quad (4)$$

$$M_\varepsilon(x) = \{z \in F(x)/\varphi(z, x) \leqslant \psi(x) + \varepsilon\}. \quad (5)$$

Соотношение (4) определяет точечно-множественное отображение $M_\varepsilon : x \to M_\varepsilon(x)$, сопоставляющее элементам пространства X множества ε-оптимальных решений соответствующих задач D_x. В том случае, когда $\varepsilon = 0$, $M_0(x)$ — множество оптимальных решений задачи D_x. В дальнейшем будем изучать топологические свойства функций отклика конкретных решающих систем на подмножестве X_0 пространства X, состоящем из точек x, для которых задачи D_x разрешимы (множество их допустимых элементов $F(x)$ непустые).

Проводимое исследование основывается на некоторых результатах параметрического анализа экстремальных задач. В их формулировке используются следующие понятия.

Пусть X_1 и X_2 — конечномерные нормированные пространства, а $N: x \to N(x)$ — точечно-множественное отображение, сопоставляющее элементам пространства X_1 множества элементов пространства X_2.

Отображение N называется полунепрерывным сверху в точке $\bar{x}$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $\|x - \bar{x}\| \leqslant \delta$, выполняется соотношение

$$N(\bar{x}) + \varepsilon B \supset N(x),$$

где B — шар единичного радиуса в пространстве X_2.

Это означает, что если точка x достаточно близка к точке $\bar{x}$ ($\|x - \bar{x}\| \leqslant \delta$), то для каждого элемента $y \in N(x)$ найдется близкий к нему элемент $\bar{y} \in N(x)$ ($\|y - \bar{y}\| \leqslant \varepsilon$). В том случае, когда множества $N(x)$ одноэлементные, это определе̇ние совпадает с определением непрерывности функции N в точке $\bar{x}$.

Полунепрерывное сверху в точке $\bar{x}$ отображение N называется непрерывным в этой точке, если дополнительно выполнено следующее условие: для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $\|x - \bar{x}\| \leqslant \delta$, справедливо включение: $N(x) + \varepsilon B \supset N(x)$.

Это означает, что множество $N(x)$ при x, достаточно близких к $\bar{x}$, в свою очередь представляет из себя хорошую аппроксимацию множества $N(\bar{x})$.

Предположим, что множество допустимых решений задачи (2)—(3) имеет вид

$$F(x) = \{z \in \Omega / \langle a_i(x), z\rangle \geqslant b_i(x),\ i = 1, \ldots, k\}, \tag{6}$$

а целевой функционал линеен по z, т. е.

$$\varphi(z, x) = \langle c(x), z\rangle. \tag{7}$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 1 [9]. Предположим, что

1) Ω — выпуклое замкнутое множество;

2) функции $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k, c$ непрерывны в точке $\bar{x}$;

3) существует вектор $z^* \in F(\bar{x})$ такой, что $\langle a_i(\bar{x}), z\rangle > b_i(\bar{x})$ для всех $i = 1, \ldots, k$;

4) $M_0(\bar{x})$ — непустое ограниченное множество.

Тогда функционал ψ и отображения M_ε для всех $\varepsilon > 0$ непрерывны, а отображение M_0 полунепрерывно сверху в точке $\bar{x}$.

Для выполнения условия 4 достаточно потребовать, чтобы множество $F(\bar{x})$ было ограниченным. В том случае, когда условие Слейтера (условие 3) в задаче $D(\bar{x})$ не имеет места, заключение теоремы 1 обеспечивает другая группа условий. Обозначим

$$I=\{1\leqslant i\leqslant k/\langle a_i(\bar{x}),\ z\rangle=b_i(\bar{x})\ \text{для всех}\ z\in F(\bar{x})\}. \qquad (8)$$

Теорема 2 [9]. Предположим, что

1) Ω — выпуклое замкнутое множество с непустой внутренностью;

2) функции $a_1, \ldots, a_k$, $b_1, \ldots, b_k$, c непрерывны в точке $\bar{x}$;

3) $F(\bar{x})\cap \operatorname{int}\Omega\neq\varnothing$;

4) $M_0(\bar{x})$ — непустое ограниченное множество;

5) семейство векторов $\{a_i(x),\ i\in I\}$ для всех x, достаточно близких к $\bar{x}$, имеет постоянный ранг.

Тогда функционал ψ и отображение M_ε для всех $\varepsilon>0$ непрерывны, а отображение M_0 полунепрерывно сверху в точке $\bar{x}$.

Условие 5 теоремы 2 выполнено, если векторы $\{a_i(\bar{x}),\ i\in I\}$ линейно независимы. В этом случае, так же как и в условиях теоремы 1, задачи D_x разрешимы для всех x, достаточно близких к $\bar{x}$. Если множество $M_0(\bar{x})$ состоит из единственной точки, то условия теорем 1 и 2 обеспечивают непрерывность отображения M_0 в точке $\bar{x}$ [8].

Одним из основных условий теорем 1 и 2 было предположение о непрерывной зависимости функциональных ограничений от параметра x (условия 2). Его можно ослабить, сохранив при этом определенные топологические свойства функционала ψ.

Обозначим $P_i(z,\ x)=\langle a_i(x),\ z\rangle-b_i(x)$, $i=1, \ldots, k$.

Теорема 3 [8]. Предположим, что

1) Ω — выпуклое компактное множество;

2) функция c непрерывна в точке $\bar{x}$; функционалы P_i, $i=1, \ldots, k$ полунепрерывны сверху на множестве $F(\bar{x})\times\bar{x}$.

Тогда функционал ψ полунепрерывен снизу в точке $\bar{x}$.

Пусть $N: x\to N(x)$ — точечно-множественное отображение, а $T: X\times Z\to Y$ — оператор. Отображение R, задаваемое формулой $R(x)=\{y: y=T(x,\ z)$, где $z\in N(x)\}$ называется композицией оператора T и отображения N.

Теорема 4 [10]. Предположим, что

1) T — непрерывный оператор;

2) отображение N непрерывно (полунепрерывно сверху) в точке $\bar{x}$;

3) $N(\bar{x})$ — компактное множество.

Тогда отображение R непрерывно (полунепрерывно сверху) в точке $\bar{x}$.

§ 2. Некоторые типы решающих систем и свойства их функций отклика

В этом параграфе описываются типичные решающие системы, рассматриваемые в экономико-математической литературе, и исследуются свойства их функций отклика.

I. Модель подсистемы нижнего уровня в задаче распределения ресурсов, типа изученной И. Корнаи и Т. Липтаком [2], имеет следующий вид:

$$\langle c(x), z\rangle \mapsto \inf; \quad (9)$$

$$A(x)z \geqslant x_1; \quad (10)$$

$$B(x)z \leqslant x_2; \quad (11)$$

$$z \in \Omega, \quad (12)$$

где $x = (x_1, x_2) \in R^n$ — вектор входных переменных, причем x_1 — плановое задание подсистемы; x_2 — лимиты по общесистемным ресурсам; $A(x) \geqslant 0$ — матрица нормативов выпуска продукции размерности $k_1 \times m$; $B(x) \geqslant 0$ — матрица нормативов затрат общесистемных ресурсов размерности $k_2 \times m$; Ω — выпуклое компактное множество, выделяемое ограничениями на интенсивности способов функционирования подсистемы, на которые не оказывают влияния входные переменные.

Функция отклика в данном случае имеет вид

$$f_\varepsilon(x) = \{y = \langle c(x), z\rangle, z \in M_\varepsilon(x)\} \quad (13)$$

и носит название функции сравнительной эффективности. Заметим, что при $\varepsilon = 0$ функция отклика является обычной числовой функцией.

Предположим, что элементы матриц A и B и вектора c — непрерывные функции. В этом случае функция отклика непрерывна *для всех таких* $\bar{x}$, *для которых* существует вектор интенсивностей способов $\bar{z} = \bar{z}(\bar{x}) \in \Omega$, удовлетворяющий условиям

$$A(\bar{x})\bar{z} > \bar{x}_1; \ B(\bar{x})\bar{z} < \bar{x}_2. \quad (14)$$

Такие значения входных переменных естественно интерпретировать как ненапряженные задания. Этот результат непосредственно следует из теоремы 1.

Рассмотрим ситуацию, когда задание $\bar{x}$ является напряженным, т. е. условие (14) не выполняется. Обозначим через I_1 множества номеров продуктов, по которым система не может *перевыполнить плановое задание при всех допустимых способах* ее функционирования, а I_2 — множество номеров затрачиваемых ресурсов, которые являются лимитирующими при всех допустимых способах функционирования системы. Тогда достаточными условиями непрерывности функции отклика в точке $\bar{x}$ будут: а) непустота множества $\inf \Omega \cap F(\bar{x})$ и б) невозрастание ранга семейства матриц $C(x)$, составленных из строк матриц $A(x)$ и $B(x)$ с номерами из множества $I = I_1 \cup I_2$ для всех x, достаточно близких к $\bar{x}$.

Заметим, что обычно множество Ω имеет следующий вид: $\Omega = \{z \geqslant 0 | Dz \leqslant d\}$. В этом случае условие а) выполнено, если существует способ функционирования $z^* > 0$ такой, что $z^* \in F(\bar{x})$ и $Dz^* < d$.

Условие б) выполнено, если матрица $C(\bar{x})$ имеет полный ранг. Другим достаточным условием является предположение о постоянстве матриц $A(x)$ и $B(x)$ для всех x, достаточно близких к $\bar{x}$. Этот случай рассмотрен в работе И. Корнаи и Т. Липтака.

Такая структура задачи существенно упростила ее анализ и позволила установить непрерывность функции отклика без применения специальной техники.

Практически интересной представляется ситуация, когда некоторые из элементов матриц A и B не являются непрерывными функциями (например, случай интервального задания соответствующих нормативов). В этом случае удается установить полунепрерывность снизу функции f_0 в предположении, что функции $a_{ij}(x)$ полунепрерывны снизу в точке $\bar{x}$, а функции $b_{ij}(x)$ полунепрерывны сверху в этой точке (теорема 3).

II. Подсистема нижнего уровня в двухуровневой системе моделей согласования отраслевых решений, предложенной А. Г. Аганбегяном и К. А. Багриновским [1], имеет следующий вид:

$$\langle c(x), z\rangle \mapsto \inf; \tag{15}$$

$$A(x)z \geqslant x; \tag{16}$$

$$z \in \Omega, \tag{17}$$

где x — вектор плановых заданий отраслевой подсистемы, а матрица A, векторы c и z и множество Ω имеют тот же смысл, что и в задаче (9)—(12).

Пусть, как и выше $B(x)$ — матрица нормативов расхода общесистемных ресурсов. Тогда функция отклика подсистемы имеет вид

$$f_\varepsilon(x) = \{y = B(x)z,\ z \in M_\varepsilon(x)\} \tag{18}$$

и называется функцией издержек.

Предположим, что Ω — выпуклый компакт, а элементы матриц A и B и векторы c являются непрерывными функциями. Тогда, как следует из теоремы 1, функция f_ε при $\varepsilon > 0$ непрерывна для всех $\bar{x}$, удовлетворяющих условию:

$$\text{существует } \bar{z} = \bar{z}(\bar{x}) \in \Omega \text{ такой, что } A(\bar{x})\bar{z} > \bar{x}. \tag{19}$$

Такие плановые задания естественно считать ненапряженными.

Изучим ситуацию, когда плановое задание является напряженным, т. е. условие (19) не выполняется. Обозначим, как и ранее, через I множество индексов продуктов, для которых плановое задание не может быть перевыполнено. Тогда достаточными условиями непрерывности отображения f_ε при $\varepsilon > 0$ являются непустота множества $\operatorname{int}\Omega \cap F(\bar{x})$ и невозрастание ранга семейства матриц $D(x)$, составленных из строк матриц $A(x)$ с номерами из множества I для всех x, достаточно близких к $\bar{x}$. Эти условия при $\varepsilon = 0$ гарантируют полунепрерывность сверху отображения f_0. Отметим два частных случая, когда это отображение непрерывно в точке $\bar{x}$.

1. Множество $M_0(\bar{x})$ состоит из единственной точки.

2. Матрица $B(x) = [b_{ij}(x)]$ имеет следующий специальный вид:

$$b_{ij}(x) = \alpha_i(x)c_j(\bar{x}),$$

где $\alpha_i(x)$ — доля затрат на i-й ресурс в общей сумме затрат. Это случай подсистемы с фиксированной структурой затрат [1]. Простейшей является ситуация, когда для производства продукции используется один способ, который может применяться с неограниченной интенсивностью (случай леонтьевской системы). Непосредственное обобщение этого случая состоит в рассмотрении подсистем с несколькими способами производства одного продукта, имеющими ограничения на интенсивность их применения. В этом случае функция издержек является кусочно-линейной непрерывной, причем может быть задана в аналитической форме [1].

3. Идейно близка к рассмотренной выше модель производства, предложенная Э. Браверманом [4]. Линейный вариант задачи подсистемы имеет следующий вид:

$$\langle c(x), z\rangle \mapsto \sup; \tag{20}$$

$$B(x)z \leqslant x; \tag{21}$$

$$z \in \Omega, \tag{22}$$

где B — матрица нормативов расхода общесистемных ресурсов; x — величина лимитов по общесистемным ресурсам для данной подсистемы.

Функцией отклика в этой модели является производственная функция $f_\varepsilon(x) = \{y = A(x)z,\ z \in M_\varepsilon(x)\}$, где $A(x)$ — матрица нормативов выпуска продукта. Для этой функции устанавливаются при тех же условиях топологические свойства, аналогичные свойствам функции издержек.

4. Модель подсистемы, типа рассмотренной в работе Дж. Данцига и Ф. Вулфа [5], имеет вид

$$\langle c(x, z\rangle \to \sup; \tag{23}$$

$$z \in \Omega, \tag{24}$$

где x — вектор расчетных оценок используемых ресурсов и выпускаемых продуктов; Ω — выпуклое множество.

Функцией отклика служит функция избыточного спроса $f_\varepsilon(x) = \{y = C(x)z,\ z \in M_\varepsilon(x)\}$, где $C(x) = A(x) - B(x)$ — матрица нормативов чистого выпуска.

Важной особенностью параметрического семейства задач (23)—(24) является то обстоятельство, что от параметра x зависит лишь критерий оптимальности подсистемы. Если эта зависимость носит в точке $\bar{x}$ непрерывный характер и $M_0(\bar{x})$ — компактное множество, то функция отклика f_ε будет непрерывна в этой точке для всех $\varepsilon > 0$, а f_0 — полунепрерывна сверху в $\bar{x}$. В том случае, когда множество оптимальных решений при данном значении входного параметра состоит из единственной точки, отображение f_0 будет непрерывно в точке $\bar{x}$. В том случае, когда $\Omega = \{z/Dz \leqslant d\}$, достаточным условием ограниченности множества $M_0(\bar{x})$ является полнота ранга матрицы D и существование положительного допустимого вектора v в соответствующей двойственной задаче:

$$\varphi(c) = \langle d, v\rangle \mapsto \inf; \tag{25}$$

$$vD = c = c(\bar{x}); \tag{26}$$

$$v \geqslant 0. \tag{27}$$

Действительно, в этом случае двойственная задача имеет оптимальное решение для всех векторов c, достаточно близких к $c(\bar{x})$. Тогда точка $c(\bar{x})$ принадлежит внутренности области определения выпуклой функции $\varphi(c)$ и, следовательно, множество ее субградиентов $M_0(\bar{x})$ ограничено [11].

Если $\Omega = \{z \geqslant 0,\ Rz \leqslant r\}$, то указанное условие ограниченности множества $M_0(\bar{x})$ эквивалентно условию Слейтера в задаче

$$\langle r, u\rangle \mapsto \inf; \tag{28}$$

$$uR \geqslant c(\bar{x}); \tag{29}$$

$$u \geqslant 0. \tag{30}$$

5. В заключение рассмотрим задачу подсистемы в модели межрегионального взаимодействия [6]:

$$\langle c, z\rangle \mapsto \sup; \tag{31}$$

$$Az \leqslant b; \tag{32}$$

$$\langle x, z_1\rangle \leqslant \langle x, z_2\rangle; \tag{33}$$

$$z = (z_1, z_2, z_3) \in \Omega_0, \tag{34}$$

где x — вектор цен межрегионального обмена; $z_1(z_2)$ — объемы ввозимой (вывозимой) в регион продукции.

Обычно множество $\Omega = \{z \in \Omega_0 | Az \leqslant b\}$ является компактным и выпуклым. Функцией отклика является отображение $f_\varepsilon(x) = \{y = z_1 - z_2|$, где существует z_3, $(z_1, z_2, z_3) \in M_\varepsilon(x)\}$.

Это так называемая функция избыточного спроса. При $\varepsilon > 0$ ее непрерывность обеспечена для таких $\bar{x}$, что существует вектор $\bar{z} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3) \in \Omega$, удовлетворяющий условию

$$\langle \bar{x}, z_1\rangle < \langle \bar{x}, z_2\rangle. \tag{35}$$

Это условие означает существование при данных ценах $\bar{x}$ планов производства, ввоза и вывоза продукции региона с положительным сальдо обмена. Оно заведомо выполнено, если в задаче региона является допустимым элемент вида $(0, \bar{z}_2, \bar{z}_3)$, где $\bar{z}_2 > 0$. Если в основе модели подсистемы лежит уравнение межотраслевого баланса, т. е. соотношение (32) имеет вид

$$z_3 = Pz_3 + z_2 - z_1 + \lambda u,$$

где P — матрица промежуточного продукта; $u > 0$ — вектор структуры конечного продукта; $\lambda \geqslant 0$ — количество потребительских наборов, то указанное условие выполнено, когда условия задачи позволяют произвести положительный конечный продукт.

Условие (35) обеспечивает также полунепрерывность сверху отображения f_0. Если оно не выполнено, то непрерывность отображения f_ε, $\varepsilon > 0$ и полунепрерывность сверху отображения f_0 гарантированы, если существует допустимый в задаче вектор $z^* \in \operatorname{int} \Omega$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Математические** вопросы построения системы моделей. Новосибирск: Наука, 1976.
2. **Корнаи Я., Липтак Т.** Планирование на двух уровнях.— В кн.: Применение математики в экономических исследованиях. Т. III. М.: Мысль, 1965, с. 107—136.
3. **Никайдо Х.** Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972.
4. **Браверман Э. М.** Модель производства с неравновесными ценами.— Экономика и математические методы, 1972, т. VIII, вып. 3, с. 175—190.
5. **Данциг Дж., Вулф Ф.** Алгоритмы разложения для задач линейного программирования.— Математика, 1964, т. 8, № 1, с. 151—160.
6. **Рубинштейн А. Г.** Модели экономического взаимодействия регионов и возможности их использования.— В кн.: Территориальные народнохозяйственные модели. Новосибирск: Наука, 1976.
7. **Месарович М., Мако Д., Такахара И.** Теория иерархических многоуровневых систем. М.: Мир, 1973.
8. **Барабаш С. Б., Бусыгин В. П.** Анализ параметрических свойств экстремальных задач (абстрактная теория).— В кн.: Методы анализа взаимодействия в экономических системах. Новосибирск: Наука, 1980, с. 5—32.
9. **Барабаш С. Б.** Параметрический анализ конечномерных экстремальных задач.— В кн.: Математический анализ моделей экономического взаимодействия. Новосибирск: Наука, 1981, с. 3—21.
10. **Барабаш С. Б., Бусыгин В. П.** Непрерывность точечно-множественных отображений и анализ взаимодействия в системе моделей.— В кн.: Моделирование в экономических исследованиях. Новосибирск: Наука. 1978, с. 5—35.
11. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

Н. П. ДЕМЕНТЬЕВ

ОБОБЩЕННЫЕ МАГИСТРАЛИ В ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЯХ ЛЕОНТЬЕВА С ПЕРЕМЕННОЙ ТЕХНОЛОГИЕЙ

В статье определяются магистральные отображения, которые сопоставляют каждой модели из некоторого класса динамических моделей Леонтьева с переменной технологией траекторию, являющуюся аналогом магистрали, обобщенной магистралью. Смысл отображения состоит в том, что помимо свойств оптимальности, обобщенная магистраль должна обладать структурой, изменяющейся во времени в определенном смысле не быстрее, чем экзогенно задаваемые технологические параметры модели. Формализация этой идеи осуществляется с помощью некоторого функционала, определенного на произвольных ограниченных последовательностях векторов

$$(y) = \left(y^1(t), \ldots, y^m(t)\right)_{t=0}^{\infty};$$
$$|y|_m = \sup_{t,i} \max\left(\left|y^i(t+1) - y^i(t)\right|;\right.$$
$$\left.|y^i(t+2) - 2y^i(t+1) + y^i(t)|^{1/2}\right),$$

который можно понимать как показатель степени изменчивости траектории, определенный при соответствующих m на последовательностях параметров модели и на структурах ее допустимых траекторий. После определения магистрального отображения описываются условия, при которых подмножество всех моделей Леонтьева допускает магистральное отображение. Доказательство соответствующей теоремы носит конструктивный характер, т. е. указывает способ построения магистрального отображения.

Рассмотрим дискретную динамическую модель Леонтьева с n отраслями, описываемую системой балансовых ограничений

$$x(t) \geqslant A(t)x(t) + B(t+1)x(t+1) - B(t)x(t) + \\ + \gamma(t+1)\lambda(t+1); \quad (1)$$
$$\alpha(t)x(t) \leqslant q^t; \quad (2)$$
$$x(t) \geqslant 0,\ \lambda(t) \geqslant 0,\ t = 0,\ 1,\ \ldots,$$

заданными величинами являются: $n \geqslant 1$ — число отраслей в модели; $A(t) \geqslant 0$ — матрица коэффициентов прямых затрат, $A(t) = \{A^{ij}(t)\}_{i,j=1}^n$; $B(t) \geqslant 0$ — матрица коэффициентов фондоемкостей, $B(t) = \{B^{ij}(t)\}_{i,j=1}^n$; $\alpha(t) \geqslant 0$ — вектор коэффициентов трудоемкостей, $\alpha(t) = (\alpha^1(t),\ \ldots,\ \alpha^n(t))$; $\gamma(t) \geqslant 0$ — вектор структуры потребительского набора в году t, $\sum_{i=1}^n \gamma^i(t) \equiv 1$; $q \geqslant 1$ — темп роста трудовых ресурсов, постоянный во времени.

Неизвестные величины допускают следующую интерпретацию: $x^j(t)$ — объем валового выпуска отрасли j в году t, $j = 1,\ \ldots,\ n$; $\lambda(t)$ — количество наборов, идущих в потребление в году t.

Назовем тройку $(A,\ B,\ \alpha)$ технологической, если выполнены следующие условия:

1) $\exists x \in R_t^n$ такой, что $x > Ax$ (продуктивность матрицы A);

2) из того, что $\rho > 0$, $x \geqslant 0$, $x \neq 0$, $x \geqslant \rho Ax$, следует $x > 0$ (неразложимость матрицы A);

3) $\sum_{i=1}^n B^{ij} > 0$, $j = 1, \ldots, n$;

4) $\alpha^j > 0$, $j = 1, \ldots, n$.

Всюду ниже предполагается, что в модели Леонтьева тройка $(A(t), B(t), \alpha(t))$ является технологической для всех $t=0, 1, \ldots$.

Допустимая траектория модели представляет собой последовательность $(x(t), \lambda(t))$, удовлетворяющую ограничениям модели. Полезность всей траектории $(x(t), \lambda(t))$ выражается величиной $\sum_{t=0}^{\infty} \mu^{-t}\lambda(t)$, где $\mu^{-t} \in (0, 1)$ — дисконтирующий множитель.

Траектория $(\bar{x}(t), \bar{\lambda}(t))$ называется ε-оптимальной, если

$$\varliminf_{t\to\infty} \sum_{\tau=0}^{t} \mu^{-\tau}\left(\bar{\lambda}(\tau) - \lambda(\tau)\right) \geqslant -\varepsilon, \varepsilon \geqslant 0$$

для всех допустимых траекторий $(x(t), \lambda(t))$, исходящих в момент 0 из состояния $(\bar{x}(0), \bar{\lambda}(0))$. ε-оптимальная траектория называется оптимальной, если $\varepsilon = 0$.

Пусть $\delta = (\delta_t)_{t=0}^{\infty}$ — некоторая последовательность неотрицательных чисел, причем $\Delta = \sum_{t=0}^{\infty} \delta_t < \infty$. Будем говорить, что траектория $(\bar{x}(t), \bar{\lambda}(t))$ допускает δ-характеристику, если найдется последовательность $(p(t))$, где $p(t) \in R_+^n$ такая, что для всякого t

$$p(t+1)\bar{x}(t+1) - p(t)\bar{x}(t) + \mu^{-t-1}\bar{\lambda}(t+1) + \delta_t \geqslant$$
$$\geqslant p(t+1)y - p(t)x + \mu^{-t-1}\lambda$$

для всех x, y, λ, удовлетворяющих ограничению

$$x \geqslant A(t)x + B(t+1)y - B(t)x + \gamma(t+1)\lambda,$$
$$\alpha(t)x \leqslant q^t,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ \lambda \geqslant 0.$$

В том случае, когда $\delta_t = 0$, $t = 0, 1, \ldots$, δ называется характеристикой.

Приведем аналог теоремы 20.3 [2].

Теорема 1. Пусть траектория $(\bar{x}(t), \bar{\lambda}(t))$ допускает δ-характеристику $(p(t))$ такую, что $\lim_{t\to\infty} p(t)\bar{x}(t) = 0$. Тогда траектория $(\bar{x}(t), \bar{\lambda}(t))$ является Δ-оптимальной, где $\Delta = \sum_{t=0}^{\infty} \delta_t$.

Справедливость теоремы следует из соотношений

$$\sum_{\tau=0}^{t} \mu^{-\tau}\left(\bar{\lambda}(\tau) - \lambda(\tau)\right) = \sum_{\tau=1}^{t} \mu^{-\tau}\left(\bar{\lambda}(\tau) - \lambda(\tau)\right) =$$
$$= \sum_{\tau=0}^{t-1}\left(-p(\tau)\bar{x}(\tau) + p(\tau+1)\bar{x}(\tau+1) + \mu^{-\tau-1}\bar{\lambda}(\tau+1)\right) -$$
$$- \sum_{\tau=0}^{t-1}\left(-p(\tau)x(\tau) + p(\tau+1)x(\tau+1) + \mu^{-\tau-1}\lambda(\tau+1)\right) -$$
$$- p(t)\bar{x}(t) + (p)(t)x(t) \geqslant -\sum_{\tau=0}^{t-1}\delta_\tau - p(t)\bar{x}(t),$$

справедливых для всех допустимых траекторий $(x(t), \lambda(t))$ таких, что $(x(0), \lambda(0)) = (\bar{x}(0), \bar{\lambda}(0))$.

Описанную выше модель Леонтьева можно отождествлять с последовательностью $2n^2+2n$-мерных векторов $L = (L(t))_{t=0}^{\infty} = (\ldots, A^{ij}(t), \ldots, B^{ij}(t), \ldots, \alpha^j(t), \ldots, \gamma^i(t), \ldots)_{t=0}^{\infty}$ и скалярами q и μ. Всюду ниже модель Леонтьева обозначается нами через $\mathfrak{M} = (L, q, \mu)$.

Пусть $l = (\ldots, A^{ij}, \ldots, B^{ij}, \ldots, \alpha^j, \ldots, \gamma^i, \ldots) \in R_+^{2n^2+2n}$ — такой вектор, что тройка (A, B, α) — технологическая, и $\sum_{i=1}^{n} \gamma^i = 1$. Пусть D — множество всех таких векторов. Покажем, что D — незамкнутое и неограниченное множество. Действительно, пусть $l_0 = (A_0, B_0, \alpha_0, \gamma_0) \in D$. Тогда $l_m = (m^{-1}A_0, B_0, \alpha_0, \gamma_0) \in D$, $m = 1, 2, \ldots$. Однако предельный элемент этой последовательности $(0, B_0, \alpha_0, \gamma_0)$ не принадлежит D, так как нулевая матрица разложима. Примером неограниченной последовательности, лежащей в D, служит $l_m = (A_0, mB_0, \alpha_0, \gamma_0)$, $m = 1, 2, \ldots$.

Сопоставим каждому вектору $l \in D$ конус Гейла $K(l) = \{(x, y) \in R_+^n \times R_+^n / x \geqslant Ax + B(y - x)\}$, технологический темп роста которого обозначим через $\rho(l)$. Очевидно, $\rho(l) \in (1, \infty)$, $l \in D$.

Лемма 1. Функция $\rho(l)$ непрерывна на D.

Доказательство. Зафиксируем $l_0 \in D$, тогда $\rho(l_0)$ определяется как оптимальное значение экстремальной задачи

$$x \geqslant A_0 x + (\rho - 1) B_0 x; \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x^i = 1, \ x^i \geqslant 0, \ i = 1, \ldots, n; \tag{4}$$

$$\rho \to \max.$$

Покажем, что для оптимального решения задачи x_0, ρ_0 выполняется равенство $x_0 = A_0 x_0 + (\rho_0 - 1) B_0 x_0$. Предположим противное. Тогда $x_0 = A_0 x_0 + (\rho_0 - 1) B_0 x_0 + u$ для некоторого $u \geqslant 0$, $u \neq 0$. В силу строгой положительности матрицы $(E - A)^{-1}$, следующей, как известно, из продуктивности и неразложимости A, при достаточно малом $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in R$ найдется $\bar{x}$ такой, что $\bar{x} < x_0$ и

$$\bar{x} = A_0 \bar{x} + (\rho_0 - 1) B_0 x_0 + \varepsilon v, \ v = (1, \ldots, 1) \in R^n.$$

Из последнего соотношения следует, что ρ_0 не является оптимальным значением задачи (3), (4). Итак, $x_0 = A_0 x_0 + (\rho_0 - 1) B_0 x_0$, или $x_0 = (\rho_0 - 1)(E - A_0)^{-1} B_0 x_0$.

Так как положительная матрица $(E - A_0)^{-1} B_0$ имеет единственный (с точностью до множителя) собственный неотрицательный вектор, то задача (3), (4) эквивалентна отысканию положительного собственного вектора матрицы $(E - A_0)^{-1} B_0$, или решению системы уравнений

$$x = (\rho - 1)(E - A_0)^{-1} B_0 x;$$

$$\sum_{i=1} x^i = 1, \ x \geqslant 0.$$

Заменим задачу отыскания технологического темпа роста $\rho(l)$ (3), (4) на эквивалентную:

$$x = (\rho - 1)(E - A)^{-1}Bx; \tag{5}$$

$$p_0 x = 1, \ x \geqslant 0, \tag{6}$$

где p_0 — строго положительный вектор-строка, такой что $p_0 = (\rho_0 - 1)p_0(E - A_0)^{-1}B_0$.

Непрерывность функции $\rho(l)$ в точке l_0 будет доказана, если якобиан систем (5), (6) относительно переменных x, ρ в точке (l_0, x_0, ρ_0) не равен 0. Предположим, что

$$\det\begin{pmatrix} E - (\rho_0 - 1)(E - A_0)^{-1}B_0 & \vdots & -(E - A_0)^{-1}B_0x_0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots\cdots \\ p_0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Тогда найдется вектор $(y, u) \neq 0$ такой, что

$$y = (\rho_0 - 1)(E - A_0)^{-1}B_0y - (E - A_0)^{-1}B_0x_0u = 0; \tag{7}$$

$$p_0 y = 0. \tag{8}$$

Покажем, что $u \neq 0$. Действительно, в противном случае $y = (\rho_0 - 1)(E - A_0)^{-1}B_0y$. Так как строго положительная матрица $(E - A_0)^{-1}B_0$ имеет единственный собственный вектор (с точностью до множителя), соответствующий собственному числу $(\rho_0 - 1)^{-1}$, то $y = cx$ для некоторого $c \neq 0$. Поэтому $0 = p_0 y = cp_0x \neq 0$. Итак, можно считать, что $u = 1$.

Умножим соотношение (7) на p_0:

$$p_0(E - (\rho_0 - 1)(E - A_0)^{-1}B_0)y - p_0(E - A_0)^{-1}B_0x_0 = 0.$$

откуда в силу определения p_0 следует $p_0(E - A_0)^{-1}B_0x_0 = 0$. Последнее не верно, так как p_0, x_0, $(E - A_0)^{-1}B_0$ строго положительные величины. Ввиду произвольности $l_0 \in D$ лемма доказана полностью.

Лемма 2. Пусть $l \in D$ и $\rho(l)$ — технологический темп роста. Тогда для всякого $\rho \in [1, \rho(l)]$ матрица $A + (\rho - 1)B$ продуктивна и неразложима.

Доказательство неразложимости тривиально, докажем продуктивность. В силу определения технологического темпа роста существует $x_0 \geqslant 0$, $x_0 \neq 0$ такой, что $x_0 \geqslant Ax + (\rho(l) - 1)Bx_0$.

Пусть $\rho \in [1, \rho(l))$. Тогда для некоторого $u \geqslant 0$, $u \neq 0$

$$x_0 = Ax_0 + (\rho - 1)Bx_0 + u.$$

В силу строгой положительности матрицы $(E - A)^{-1}$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует $\bar{x} > 0$, $\bar{x} < x_0$ такой, что

$$\bar{x} \geqslant A\bar{x} + (\rho - 1)Bx_0 + \varepsilon v, \ v = (1, 1, \ldots, 1) \in R^n,$$

или $\bar{x} > (A + (\rho - 1)B)\bar{x}$. Лемма доказана.

Дадим определение магистрального отображения. Пусть $(x(t))_{t=0}^{\infty}$ — некоторая ограниченная последовательность m-мерных векторов $x(t) = (x^1(t), \ldots, x^m(t))$. Сопоставим каждой такой последовательности величину

$$|x|_m = \sup_t \max_i \max (|x^i(t+1) - x^i(t)|;$$
$$|x^i(t+2) - 2x^i(t+1) + x^i(t)|^{1/2}).$$

Там, где размерность величины $x(t)$ не вызывает сомнений, вместо $|x|_m$ будем писать $|x|$.

Смысл функционала $|\cdot|$ заключается в оценках для разностных аналогов производных первого и второго порядков:

$$|x^i(t+1) - x^i(t)| \leqslant |x|, \ |x^i(t+2) - 2x^i(t+1) + x^i(t)| \leqslant |x|^2.$$

Ниже всегда предполагается, что для модели Леонтьева (L, q, μ) множество $\{L(t) | t = 0, 1, \ldots\}$ ограничено, а поэтому определена величина $|L|$.

Обозначим множество всех динамических моделей Леонтьева через $\mathfrak{L}$.

Пусть $\tilde{L} \subset \mathfrak{L}$. Будем называть определенное на $\tilde{L}$ отображение магистральным, если оно сопоставляет каждой модели $\mathfrak{M} = (L, q, \mu) \in \tilde{L}$ числа $C(q, \mu)$, $\delta_1(q, \mu)$, $\delta_2(q, \mu)$, зависящие только от q, μ, и допустимую траекторию $(\overline{x}(\mathfrak{M}, t), \overline{\lambda}(\mathfrak{M}, t))$, что

$$\text{M1} \quad |q^{-t}\overline{x}(\mathfrak{M})| \leqslant C(q, \mu)|L|,$$
$$|q^{-t}\overline{\lambda}(\mathfrak{M})| \leqslant C(q, \mu)|L|;$$

$$\text{M2} \quad \varliminf_{t\to\infty} \sum_{\tau=t_0}^{t} \mu^{-\tau}\left(\overline{\lambda}(\mathfrak{M}, \tau) - (\lambda(\tau)\right) \geqslant -C(q, \mu)\, q^{t_0}\mu^{-t_0}|L|^2$$

для произвольного t_0 и произвольной допустимой траектории $(x(t), \lambda(t))$, исходящей в момент t_0 из состояния $(\overline{x}(\mathfrak{M}, t_0), \overline{\lambda}(\mathfrak{M}, t_0))$;

$$\text{M3} \quad q^t\delta_1(q, \mu)(1 - C(q, \mu)|L|) \leqslant \overline{x}^i(\mathfrak{M}, t), \ \overline{\lambda}(\mathfrak{M}, t) \leqslant q^t\delta_2(q, \mu),$$
$$t = 0, 1, \ldots, \ i = 1, \ldots, n.$$

Пусть подмножество $\tilde{L}$ удовлетворяет следующим условиям:

$L1)$ найдется компакт $\tilde{D} \subset D$ такой, что $L(t) \in \tilde{D}$, $t = 0, 1, \ldots$, если $(L, q, \mu) \in \tilde{L}$;

$$L2) \quad \rho_{\mu_0} = \inf \{\rho(L'(t)) \,|\, (L, q, \mu_0) \in \tilde{L}, t = 0, 1, \ldots\} > \mu_0,$$

$\mu_0 \in (1, \infty)$, где inf по пустому множеству полагается $+\infty$.

Теорема 2. Пусть $\tilde{L} \subset L$ удовлетворяет ограничениям $L1) - L2)$. Тогда существует определенное на $\tilde{L}$ магистральное отображение.

Зафиксируем величины q, μ, $1 \leqslant q < \mu$. Приведем лемму, проясняющую идею построения магистрального отображения.

Лемма 3. Пусть для всякой модели $\mathfrak{M} \in \tilde{L}$ сопоставлена допустимая траектория $(\overline{x}(\mathfrak{M}, t), \overline{\lambda}(\mathfrak{M}, t))$, удовлетворяющая ограничениям