Härtler

# Statistische Methoden für die Zuverlässigkeitsanalyse

Exponentialverteilung

Weibullverteilung

Gammaverteilung

Logarithmische Normalverteilung

Verteilungsklassen

Parameterschätzung

Test · Anpassungstest

Härtler · Statistische Methoden für die Zuverlässigkeitsanalyse

# Statistische Methoden für die Zuverlässigkeitsanalyse

Dr. Gisela Härtler

VEB VERLAG TECHNIK BERLIN

48 Bilder, 17 Tabellen

1. Auflage

Lizenz 207 · 370/13/83
DK 311.214.001.8: 519.2 LSV 1074, VT3/5439-1
Lektorin: Doris Netz
Schutzumschlag: Kurt Beckert
Printed in the German Democratic Republic
Gesamtherstellung: Offizin Andersen Nexö, Graphischer Großbetrieb, Leipzig III/18/38
Bestellnummer: 553 1905
DDR 24,– M

# Vorwort

Gegenwärtig besteht in vielen Industriezweigen, vor allem in der Elektrotechnik und Elektronik, ein großes und wachsendes Interesse an statistischen Methoden für die Zuverlässigkeitsanalyse. Die Theorie bietet eine Fülle von Modellen, Ansätzen und Methoden, aber sie sind vorwiegend im internationalen Schrifttum der mathematischen Statistik zu finden und deshalb dem Praktiker nicht leicht zugänglich. In den allgemein bekannten Lehrbüchern zur mathematischen Statistik sind diese Methoden kaum enthalten; denn zur Zuverlässigkeitsanalyse werden Wahrscheinlichkeitsmodelle benötigt, die in den üblichen Anwendungen keine große Rolle spielen. Auch mit unvollständigen Stichproben wird sonst selten gearbeitet. So entstand der Wunsch nach einer zusammenfassenden Darstellung der wichtigsten Methoden für die statistische Zuverlässigkeitsanalyse und die Auswertung von Lebensdaueruntersuchungen. Diesem Wunsch versuche ich mit dem vorliegenden Buch zu entsprechen.

Zuerst mußte ich aus der Vielzahl der Konzepte und Methoden jene auswählen, die bereits angewandt werden oder sich dafür eignen. Was sich schließlich durchsetzt, hängt ja nicht nur von den theoretischen Eigenschaften eines speziellen Verfahrens ab, sondern von vielen weiteren Gesichtspunkten, wie Einfachheit und Durchsichtigkeit der heuristischen Motivation. Ob die in diesem Sinne getroffene Auswahl gut ist, wird die künftige Anwendung zeigen. Ein diesbezüglicher wichtiger Komplex wurde nicht behandelt: die belastungsabhängigen Modelle. Sie hätten den Rahmen des Buches stark erweitert. Außerdem befindet sich die damit verbundene Methodik gegenwärtig in einer so stürmischen Entwicklung, daß in den nächsten zwei bis drei Jahren mit entscheidenden Beiträgen zu rechnen ist, die erst später in einem Buch aufgenommen werden können.

Eine wichtige Frage ist die nach den beim Leser vorhandenen Vorkenntnissen: Wieweit muß und darf vereinfacht werden? Was ist in einleitenden Abschnitten zu behandeln? Bei ihrer Beantwortung spielte natürlich meine persönliche Erfahrung eine große Rolle. Ich stellte mir den Leser dieses Buches etwa als einen Ingenieur mit Hochschulabschluß vor, der auf dem Gebiet der mathematischen Statistik Autodidakt ist, einige Methoden anwendet und halbwegs kennt, der aber im Laufe der Zeit auch manches vergessen hat. Vermutlich hat er keine Zeit, das Buch von A bis Z durchzuarbeiten. Er wird sich also auf die ihn interessierenden Abschnitte beschränken. Um diesem Leser entgegenzukommen, wählte ich eine möglichst wenig formale und keine mathematisch strenge Darstellungsweise. Beweise sind immer weggelassen; dafür wurden genaue Literaturhinweise eingefügt. Wo möglich, wurden Zahlenbeispiele angegeben und Zusammenhänge in Worten und durch Bilder verdeutlicht. Manche Methode, deren Anwendung ohnehin die Mitarbeit eines Mathematikers erfordert, wurde nur knapp behandelt. Ein solcher Fall ist z.B. die Maximum-Likelihood-Schätzung der Parameter der Weibull-Verteilung. Dort sind auch keine Zahlenbeispiele angegeben, und benötigte Näherungsverfahren werden nur in den Grundzügen angedeutet (die Programmbibliotheken der verschiedenen Interessenten bieten sowieso unterschiedliche Möglichkeiten). Alle Bemühungen um Einfachheit durften aber die beschriebenen Methoden nicht soweit entstellen, daß ihre Einordnung in die verschiedenen Konzepte der mathematischen Statistik unkenntlich wird.

Daher mußte beim Leser doch eine gewisse Übung im Umgang mit den statistischen Denk- und Schlußweisen vorausgesetzt werden. Um hier auch dem weniger informierten Leser zu helfen, wurde der Abschn. 3., der eigentlich eine Einführung ist, in das Manuskript aufgenommen. Ein versierter Leser kann die entsprechenden Seiten ignorieren.

Die meisten Methoden, die behandelt werden, sind in den letzten 20 Jahren entstanden. Einige sind sogar sehr jung, und es gibt Probleme, deren Lösung bis heute noch nicht vorliegt. Der aufmerksame Leser wird daher Lücken finden, die in einigen Jahren vielleicht (besser: hoffentlich) geschlossen sind. Es bleibt zu sagen, daß die Fachliteratur etwa bis zum Jahre 1979 ausgewertet wurde und daß die Literaturauswahl sich auf die wesentlichen Publikationen zu den einzelnen Fragen beschränkt. Mit Leichtigkeit hätten noch einige hundert Literaturstellen zitiert werden können; das aber ist nicht die Aufgabe eines solchen Buches.

Die kritische Durchsicht der ersten Fassung durch einige Fachkollegen war mir eine große Hilfe bei der Erarbeitung des endgültigen Manuskripts. Zu Dank verpflichtet fühle ich mich vor allem den Herren Prof. Dr. *H. Bandemer*, Dipl.-Ing. *J. Jöstel* und Dipl.-Ing. *J. Windel*. Ihre gründliche Durchsicht förderte manchen Mangel des Manuskripts zutage. Gleichzeitig möchte ich Frau *G. Rietze* für die sorgfältige Abschrift des Manuskripts danken.

Unzulänglichkeiten und Fehler des Buches gehen natürlich allein zu meinen Lasten, und ich werde für Kritiken und Hinweise stets dankbar sein.

Berlin, im Juli 1981 *Gisela Härtler*

# Inhaltsverzeichnis

# Die wichtigsten Formelzeichen

(Hilfsgrößen und Symbole, die nur in einem Abschnitt vorkommen, sind nicht aufgeführt.)

| | |
|---|---|
| $a$ | Parameter der Beta- und Weibull-Verteilung |
| $\boldsymbol{A}$ | zufälliges Ereignis |
| $b$ | Parameter der Beta- und Gammaverteilung |
| $\boldsymbol{B}$ | zufälliges Ereignis |
| $B(a, b)$ | Symbol der Betaverteilung mit den Parametern $a$, $b$ |
| $B_\gamma(a, b)$ | Symbol eines Quantils der Betaverteilung |
| $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{t}_i, \boldsymbol{t}_j)$ | Kovarianz der Zufallsgrößen $\boldsymbol{t}_i$ und $\boldsymbol{t}_j$ |
| $D_r$ | Prüfgröße beim Test von *Kolmogorov* |
| $E(\boldsymbol{t})$ | Erwartungswert der Zufallsgröße $\boldsymbol{t}$ |
| $f(t)$ | Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsgröße $\boldsymbol{t}$ |
| $F(t)$ | Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße $\boldsymbol{t}$ |
| $F(m_1, m_2)$ | Symbol der $F$-Verteilung mit $m_1$, $m_2$ Freiheitsgraden |
| $F_\gamma(m_1, m_2)$ | Symbol eines Quantils der $F$-Verteilung |
| $h(t)$ | Ausfallrate |
| $\mathbf{H}$ | Hypothese |
| $\mathbf{I}$ | Information |
| $K_{n,\alpha}$ | kritischer Wert beim Test von *Kolmogorov* |
| $L(\Theta)$ | Likelihood-Funktion des Parameters $\Theta$ |
| $L'(\Theta)$ | relative Likelihood-Funktion des Parameters $\Theta$ |
| $m_k$ | auf den Ursprung bezogenes Moment $k$-ter Ordnung |
| $n$ | Stichprobenumfang |
| $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ | Symbol der Normalverteilung mit den Parametern $\mu$, $\sigma^2$ |
| $\mathrm{N}_\gamma(\mu, \sigma^2)$ | Symbol eines Quantils der Normalverteilung |
| $p$ | Wahrscheinlichkeit |
| $p(\Theta \mid t_1, \ldots, t_n)$ | A-posteriori-Wahrscheinlichkeitsdichte |
| $P(\boldsymbol{A})$ | Wahrscheinlichkeit des zufälligen Ereignisses $\boldsymbol{A}$ |
| $P_0(\Theta)$ | Operationscharakteristik |
| $r$ | Anzahl der Ausfälle |
| $r^*$ | als Beendigungsregel vorgegebene Anzahl von Ausfällen |
| $R(t)$ | Überlebenswahrscheinlichkeit, Zuverlässigkeit |
| $\mathbf{R}^n$ | Stichprobenraum |
| $S$ | summierte Lebensdauer |
| $S_3$ | Schiefe |
| $\boldsymbol{S}$ | Zufallsgröße |
| $\boldsymbol{t}$ | Zufallsgröße |
| $\mathrm{t}$ | Realisierung der Zufallsgröße $\boldsymbol{t}$ |
| $\tilde{t}$ | Modalwert |
| $t_\gamma$ | Quantil der Zufallsgröße $\boldsymbol{t}$ |
| $t_{0.5}$ | Median der Zufallsgröße $\boldsymbol{t}$ |

| | |
|---|---|
| $t_0$ | Lageparameter (kleinstmöglicher Wert) |
| $\mathrm{t}_{(i)}$ | $i$-te Ranggröße |
| $t^*$ | Beobachtungsdauer |
| $\check{t}_\gamma$ | empirisches Quantil |
| $t_{\gamma,\alpha}$ | untere Toleranzgrenze |
| $t_{\gamma,1-\alpha}$ | obere Toleranzgrenze |
| $\mathbf{T}$ | Schätzverfahren |
| $\boldsymbol{u}$ | Betavariable |
| $V$ | Variationskoeffizient |
| $\mathrm{Var}\,(\boldsymbol{t})$ | Varianz der Zufallsgröße $\boldsymbol{t}$ |
| $\boldsymbol{x}$ | Zufallsgröße mit standardisierter Verteilungsfunktion |
| $\mathrm{x}$ | Realisierung der Zufallsgröße $\boldsymbol{x}$ |
| $\boldsymbol{y}$ | transformierte Zufallsgröße |
| $\mathrm{y}$ | Realisierung der Zufallsgröße $\boldsymbol{y}$ |
| $\boldsymbol{z}$ | Zufallsgröße mit standardisierter Normalverteilung |
| $z_\gamma$ | Quantil der Zufallsgröße $\boldsymbol{z}$ |
| $\alpha$ | Irrtumswahrscheinlichkeit, Fehler 1. Art, Herstellerrisiko |
| $\beta$ | Fehler 2. Art, Abnehmerrisiko |
| $\gamma$ | Wahrscheinlichkeit |
| $\gamma_3$ | Stichprobenschiefe |
| $\Gamma(b)$ | Gammafunktion von $b$ |
| $\Gamma(x, b)$ | unvollständige Gammafunktion |
| $\eta$ | Maßstabsparameter der Weibull- und Gammaverteilung |
| $\vartheta$ | Parameter der Exponentialverteilung (Erwartungswert) |
| $\Theta$ | Parameter |
| $\hat{\Theta}$ | Maximum-Likelihood-Schätzwert von $\Theta$ |
| $\Theta_\alpha$ | untere Vertrauensgrenze für den Parameter $\Theta$ |
| $\Theta_{1-\alpha}$ | obere Vertrauensgrenze für den Parameter $\Theta$ |
| $\Theta^k$ | Parameterraum |
| $\lambda$ | Parameter der Exponential- und Poisson-Verteilung |
| $\mu$ | Erwartungswert einer Zufallsgröße mit Normalverteilung, Lageparameter |
| $\mu_k$ | zentrales Moment $k$-ter Ordnung |
| $\pi(\Theta)$ | A-priori-Verteilungsdichte |
| $\sigma$ | Maßstabsparameter |
| $\sigma^2$ | Varianz einer Zufallsgröße mit Normalverteilung |
| $\Sigma$ | Kovarianzmatrix |
| $\chi^2(n)$ | Symbol einer $\chi^2$-Verteilung mit $n$ Freiheitsgraden |
| $\chi^2_\gamma(n)$ | Symbol eines Quantils der $\chi^2$-Verteilung |
| $\omega_i$ | Ergebnis eines zufälligen Experiments |
| $\Omega$ | Menge aller möglichen Ergebnisse eines zufälligen Experiments |

# 1. Mathematische Grundbegriffe

Die Zuverlässigkeitstheorie beruht weitgehend auf Modellen und Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie. Die Zuverlässigkeitsanalyse von Erzeugnissen benötigt darüber hinaus noch das Instrumentarium der mathematischen Statistik. Das Hauptanliegen dieses Buches besteht darin, eine Zusammenstellung der wichtigsten Methoden der mathematischen Statistik für die praktische Zuverlässigkeitsanalyse zu geben. Dazu werden beim Leser Kenntnisse auf den Gebieten Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik benötigt, wie sie etwa in den Büchern von *Gnedenko, Beljajew, Solowjew* [1], *Gnedenko* [2] und *Storm* [3] vermittelt werden. Viele Leser, vor allem solche, die in der Praxis Zuverlässigkeitsuntersuchungen durchführen, haben sich Grundkenntnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik bereits vor längerer Zeit angeeignet. Um ihnen den Zugang zu dem hier gebotenen Stoff etwas zu erleichtern, werden im ersten Abschnitt einige Begriffe und Zusammenhänge kurz erläutert. Der fortgeschrittene Leser kann diesen Teil überblättern. Für Leser ohne einschlägige Vorkenntnisse wird er dagegen nicht ausreichen. Ihnen ist das Studium weiterer Literatur, etwa *Storm* [3], zu empfehlen. Der erste Abschnitt soll gleichzeitig der Sprachregelung in diesem Buch dienen. Hier werden später benötigte Grundbegriffe und Bezeichnungen eingeführt. Außerdem werden einige Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Verteilungen von Ranggrößen, asymptotische Extremwertverteilungen) dargestellt, die bei Zuverlässigkeitsanalysen erforderlich sein können, aber in der deutschsprachigen Fachliteratur nur am Rande behandelt werden. So ist der erste Abschnitt nicht als mathematisches Fundament des folgenden gedacht; dazu wäre weit mehr erforderlich. Er ist einfach die Heranführung des Lesers an den Stoff, wobei einige für die Zuverlässigkeitsanalyse wichtige, aber selten behandelte Wahrscheinlichkeitsverteilungen beschrieben werden, die nicht zu den im Abschn. 2. beschriebenen speziellen Wahrscheinlichkeitsmodellen gehören.

## 1.1. Zufällige Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten

Jeder Vorgang, der zu mehreren, einander ausschließenden und nicht vorhersagbaren Ergebnissen $\omega_1, \omega_2, \ldots$ führen kann, wird als ein Experiment mit zufälligem Resultat, kurz als ein *zufälliges Experiment*, bezeichnet. Bekannte Beispiele sind: Werfen einer Münze, Würfeln, Glücksspiele. Auch das Betreiben eines technischen Systems, das störungsanfällig ist, kann in einem festen Zeitraum zum Ausfall oder nicht zum Ausfall führen, ist also mit einem zufälligen Experiment vergleichbar.

Es sei $\Omega$ die Menge aller möglichen Ergebnisse des betrachteten zufälligen Experiments. Beim Würfeln besteht $\Omega$ aus den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6. Bei dem in einem festen Zeitraum arbeitenden und nicht reparierbaren System könnten die beiden Zustände „ausgefallen“ und „nicht ausgefallen“ die beiden einzigen Elemente von $\Omega$ sein. In einem anderen Fall könnte $\Omega$ die Menge aller möglichen Ausfallzeitpunkte eines Elements von der Inbetriebnahme an bedeuten. Allgemein gesehen kann $\Omega$ eine endliche Menge (wie beim Würfeln), eine abzählbare unendliche Menge (etwa alle natürlichen Zahlen) oder eine nicht abzählbare Menge (ein Kontinuum) sein. Diese Eigenschaften von $\Omega$ sind für die zahlenmäßige Behandlung der Resultate von zufälligen Experimenten sehr wichtig. Eine Bedingung aber muß die Menge $\Omega$ stets erfüllen: Sie soll in bezug auf das zufällige Experiment vollständig sein, d.h., jedes mögliche Resultat des zufälligen Experiments muß auch in $\Omega$ enthalten sein.

Betrachten wir nun eine Teilmenge von $\Omega$. Sie möge $A$ heißen. Das Resultat des zufälligen Experiments muß entweder zu $A$ gehören oder nicht zu $A$ gehören. Die Teilmenge $A$ von $\Omega$ nennt man *zufälliges Ereignis*. In den genannten Beispielen für $\Omega$ könnten folgende Teilmengen $A$ als Beispiel betrachtet werden: beim Würfeln die Menge aller geraden Zahlen unter den Zahlen 1 bis 6; für das in einem festen Zeitintervall arbeitende System könnte $A$ aus nur einem Element, dem Zustand „ausgefallen“, bestehen; im letztgenannten Fall, in dem $\Omega$ alle Ausfallzeitpunkte des Intervalls $(0, \infty)$ enthält, könnte die Teilmenge $A$ aus allen Ausfallzeitpunkten des Intervalls von 500 bis 1000 h bestehen.

Der heute übliche axiomatische Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung ordnet jedem zufälligen Ereignis eine *Wahrscheinlichkeit* $P(A)$ zu, für die $0 \leqq P(A) \leqq 1$ gilt (siehe z.B. *Gnedenko* [2]). Der naturwissenschaftlich vorgebildete Leser bevorzugt manchmal die Häufigkeitsinterpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffs: In einer Folge von $n$ unabhängigen zufälligen Experimenten möge das Resultat $A$ in $m$ Fällen eingetreten sein und in $(n - m)$ Fällen nicht. Dann heißt $\lim\limits_{n \to \infty} m/n = P(A)$ Wahrscheinlichkeit von $A$.

Aus der Definition des zufälligen Ereignisses $A$ als Menge lassen sich folgende wichtige *Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten* herleiten:

1. Für jedes zufällige Ereignis $A$ gilt $0 \leqq P(A) \leqq 1$.
2. Ist $A$ das unmögliche Ereignis, so gilt $P(A) = 0$.
3. Ist $A$ das sichere Ereignis, so gilt $P(A) = 1$. Insbesondere ist natürlich $P(\Omega) = 1$.
4. Sind $A$ und $\boldsymbol{B}$ zwei zufällige Ereignisse, die einander ausschließen, so gilt

$$P(A \text{ oder } \boldsymbol{B}) = P(A) + P(\boldsymbol{B}). \tag{1.1}$$

5. Sind $A$ und $\boldsymbol{B}$ zwei zufällige Ereignisse, die einander nicht auszuschließen brauchen, so gilt

$$P(A \text{ oder } \boldsymbol{B}) = P(A) + P(\boldsymbol{B}) - P(A \text{ und } \boldsymbol{B}). \tag{1.2}$$

6. Die *bedingte Wahrscheinlichkeit* $P(A|\boldsymbol{B})$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das zufällige Ereignis $A$ eintritt, wenn auch $\boldsymbol{B}$ eintritt. Es gilt

$$P(A|\boldsymbol{B}) = \frac{P(A \text{ und } \boldsymbol{B})}{P(\boldsymbol{B})}, \qquad P(\boldsymbol{B}) \neq 0. \tag{1.3}$$

7. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten der zufälligen Ereignisse $A$ und $\boldsymbol{B}$ ist

$$P(A \text{ und } \boldsymbol{B}) = P(A|\boldsymbol{B})\, P(\boldsymbol{B}). \tag{1.4}$$

8. Die zufälligen Ereignisse $A$ und $\boldsymbol{B}$ heißen unabhängig, wenn gilt

$$P(A \text{ und } \boldsymbol{B}) = P(A)\, P(\boldsymbol{B}) \tag{1.5}$$

   und damit $P(A|\boldsymbol{B}) = P(A)$.
9. Ein wichtiges Hilfsmittel für Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist der *Satz über die totale Wahrscheinlichkeit*. Die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sollen ein vollständiges Ereignissystem bilden: Die Vereinigung von $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ergibt $\Omega$, und damit ist $P(A_1 \text{ oder } A_2 \text{ oder } \ldots \text{ oder } A_n) = 1$. Außerdem müssen die zufälligen Er-

eignisse $A_i$, $i = 1, \ldots, n$, einander paarweise ausschließen, d.h. $P(A_i$ und $A_j) = 0$ für $i \neq j$. Für irgendein zufälliges Ereignis $\boldsymbol{B}$, $P(\boldsymbol{B}) > 0$, gilt

$$P(\boldsymbol{B}) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P(\boldsymbol{B}|A_i). \tag{1.6}$$

Dieser Satz läßt sich am Beispiel des Würfelns gut veranschaulichen: Als zufälliges Ereignis $\boldsymbol{B}$ soll das Würfeln einer geraden Zahl betrachtet werden, für $A_i = i$, $i = 1, \ldots, 6$, gilt $P(A_i) = \frac{1}{6}$. Für alle geraden $i$ erhalten wir $P(\boldsymbol{B}|A_i) = 1$; für alle ungeraden $i$ gilt $P(\boldsymbol{B}|A_i) = 0$. Mit Hilfe von (1.6) folgt $P(\boldsymbol{B}) = \frac{1}{2}$.

10. Die *Bayessche Formel*

$$P(A_i|\boldsymbol{B}) = \frac{P(A_i)\, P(\boldsymbol{B}|A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(A_j)\, P(\boldsymbol{B}|A_j)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.7}$$

ist eine sehr nützliche Beziehung. Sie ist die Grundlage für die auf Zuverlässigkeitsprobleme in zunehmendem Umfang angewandten Bayesschen Methoden der Statistik. Dabei wird wie in Gl. (1.6) vorausgesetzt, daß die $A_i$ ein vollständiges Ereignissystem bilden, d.h. einander paarweise ausschließen, und $\boldsymbol{B} \in \Omega$ irgendein zufälliges Ereignis mit $P(\boldsymbol{B}) > 0$ ist. [Wegen (1.6) kann man im Nenner von (1.7) auch $P(\boldsymbol{B})$ schreiben.]

Betrachten wir dazu ein Beispiel: Ein Bauelement arbeite in einem festen Zeitintervall, in dem es ausfallen oder nicht ausfallen wird. $A_1$ sei das zufällige Ereignis „Ausfall"; $A_2$ sei das zufällige Ereignis „kein Ausfall". Außerdem soll das Bauelement einen bestimmten fertigungsbedingten Fehler haben können, der sich aber nur in einer zerstörenden Prüfung nachweisen läßt. Das zufällige Ereignis „Fehler" sei mit $\boldsymbol{B}$ bezeichnet. Es ist bekannt, daß 1 % aller Bauelemente ausfällt, 2 % der Bauelemente den fertigungsbedingten Fehler haben, der sich bei 90 % aller ausgefallenen Bauelemente nachträglich nachweisen läßt. Es gilt also $P(A_1) = 0{,}01$, $P(\boldsymbol{B}) = 0{,}02$ und $P(\boldsymbol{B}|A_1) = 0{,}9$. Mit Hilfe der Bayesschen Formel läßt sich die Ausfallwahrscheinlichkeit der fehlerhaften Bauelemente berechnen

$$P(A_1|\boldsymbol{B}) \frac{0{,}01 \cdot 0{,}9}{0{,}02} = 0{,}45,$$

d.h., 45 % der fehlerhaften Bauelemente fallen aus.

Soll außerdem berechnet werden, auf welchen Wert man $P(\boldsymbol{B})$ durch geeignete Maßnahmen in der Fertigung senken muß, um $P(A_1) = 0{,}001$ zu erreichen, wenn die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(\boldsymbol{B}|A_1) = 0{,}9$ und $P(A_1|\boldsymbol{B})$ unverändert bleiben (die Ausfallursachen bleiben also unverändert), braucht Gl. (1.7) nur umgestellt zu werden:

$$P(\boldsymbol{B}) = \frac{P(A_1)\, P(\boldsymbol{B}|A_1)}{P(A_1|\boldsymbol{B})} = \frac{0{,}001 \cdot 0{,}9}{0{,}45} = 0{,}002.$$

## 1.2. Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Der Umgang mit zufälligen Ereignissen und Wahrscheinlichkeiten wird durch den Übergang zu Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen sehr viel einfacher. Dieser Übergang wird vollzogen, indem man die Menge aller möglichen Resultate des zufälligen Experiments $\Omega$ durch eine entsprechende Menge reeller Zahlen ersetzt. Im Beispiel des Würfelns liegt dieser Fall bereits vor; denn $\Omega$ besteht aus den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6. Im Beispiel des in einem festen Zeitintervall arbeitenden Systems könnte man den Zustand „ausgefallen" durch das Symbol 0 und „nicht ausgefallen" durch das Symbol 1 ausdrücken; $\Omega$ bestünde also aus den beiden Zahlen 0 und 1. Im dritten Beispiel bedeutet $\Omega$ die Menge aller möglichen Ausfallzeitpunkte von der Inbetriebnahme an; hier läßt sich $\Omega$ praktisch durch die Zeitachse (positive Zahlengerade) ausdrücken.

Es sei $\boldsymbol{t}$ eine *Zufallsgröße*. Sie kann als Resultat des zufälligen Experiments jeden beliebigen Zahlenwert in ihrem Definitionsbereich annehmen. Ein solcher Wert ist eine *Realisierung der Zufallsgröße* $\boldsymbol{t}$. Im Unterschied zur Zufallsgröße $\boldsymbol{t}$ wird ihre Realisierung durch ein Experiment mit dem Symbol t bezeichnet. Die Zufallsgröße $\boldsymbol{t}$ kann diskret (nimmt nur endlich oder abzählbar unendlich viele Werte an) oder stetig (kann beliebige Werte innerhalb eines Intervalls der Zahlengeraden annehmen) sein. Außerdem kann die Zufallsgröße eindimensional oder mehrdimensional sein. Im mehrdimensionalen Fall ist sie ein Vektor $\boldsymbol{t} = (\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_r)$, dessen Komponenten $\boldsymbol{t}_i$, $i = 1, \ldots, r$, diskret oder stetig sein können. In der Praxis hat man es meistens mit eindimensionalen diskreten und stetigen oder mehrdimensionalen stetigen Zufallsgrößen zu tun. Auf diese Fälle werden wir uns hier beschränken.

Einer Zufallsgröße $\boldsymbol{t}$ wird ihre *Wahrscheinlichkeitsverteilung* (oder Verteilungsfunktion) durch die Beziehung

$$F(t) = P(\boldsymbol{t} < t) \tag{1.8}$$

zugeordnet.

Für eindimensionale Zufallsgrößen gilt

$$\begin{aligned} F(t_1) &\leqq F(t_2) \quad \text{für} \quad t_1 < t_2 \\ F(-\infty) &= 0 \\ F(+\infty) &= 1 . \end{aligned} \tag{1.9}$$

Ist $\boldsymbol{t}$ eine diskrete Zufallsgröße, so ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung eine Treppenfunktion. Ist $\boldsymbol{t}$ stetig, so ist $F(t)$ eine monoton wachsende Funktion und im allgemeinen auch stetig. [Es gibt Ausnahmen, die auch im Zusammenhang mit Zuverlässigkeitsanalysen auftreten können. Dann weist $F(t)$ an bestimmten Stellen Sprünge auf. Solche Fälle werden hier nicht betrachtet.]

Ist $t$ mehrdimensional, so wird die Verteilungsfunktion analog zu (1.8) definiert. Dann ist $\boldsymbol{t}$ ein $r$-dimensionaler Vektor, und (1.8) hat folgende Bedeutung

$$F(t_1, \ldots, t_r) = P(\boldsymbol{t}_1 < t_1, \boldsymbol{t}_2 < t_2, \ldots, \boldsymbol{t}_r < t_r). \tag{1.10}$$

$F(t_1, t_2, \ldots, t_r)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Zufallsgröße $\boldsymbol{t}_1$ kleiner als ein Wert $t_1$ ist, während gleichzeitig $\boldsymbol{t}_2 < t_2, \ldots, \boldsymbol{t}_r < t_r$ ist. Insbesondere gilt

$$\lim_{t_i \to -\infty} F(t_1, t_2, \ldots, t_r) = 0, \qquad i = 1, \ldots, r, \tag{1.11}$$

und

$$F(\infty, \infty, \ldots, \infty) = 1 .$$

Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden durch Parameter näher gekennzeichnet. Es sind meistens ein oder zwei, seltener drei oder gar vier Parameter. Um eine Zufallsgröße quantitativ zu erfassen, müssen diese Parameter bekannt sein. Eine Zufallsgröße mit ihrer Wahrscheinlichkeitsverteilung, deren Parameter nicht quantifiziert sind, heißt