А. С. Кованько, И. Т. Соколов

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ОСНОВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЬВОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1961

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ЛЬВОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. ИВАНА ФРАНКО

А. С. КОВАНЬКО, И. Г. СОКОЛОВ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ОСНОВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Допущено
Министерством высшего и среднего специального образования УССР
как учебное пособие для студентов физико-математических факультетов университетов УССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЬВОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1961

517.2
К56

Печатается по решению
Редакционно-издательского совета
Львовского университета

Настоящая книга рассчитана на студентов математической специальности и ее содержание охватывает полностью материал программы МВ и ССО УССР по теории функций действительного переменного и началам функционального анализа.

Она пригодна как для стационара, так и для самостоятельного и заочного обучения, как соответствующее методическое пособие. Книга содержит большое количество примеров, иллюстрирующих теорию, а также большое количество задач и упражнений для самостоятельного решения. К некоторым из них приложены образцы решений.

Лица, глубоко проработавшие материал этой книги, могут свободно слушать любые спецкурсы по теории функций и систематический курс современного функционального анализа.

Ответственный редактор
А. Н. Костовский

Редактор М. Д. Феллер
Технический редактор А. В. Малявко Корректор С. Я. Михайленко

Александр Сергеевич Кованько, Иван Георгиевич Соколов.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ОСНОВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА.

БГ 03551. Сдано в набор 17/X-1960 г. Подписано к печати 28/VII-1961 г. Формат 60×92¹/₁₆. Бум. л. 12,625. Печ. л. 25,25. Уч.-изд. л. 20,64. Тираж 3000. Цена без переплета 62 коп. Переплет 10 коп. Зак. 909.

Львовская книжная типография Главполиграфиздата Министерства культуры УССР. Львов, Пекарская, 11.

ОТ АВТОРОВ

Настоящее пособие рассчитано в основном на студентов механико-математических факультетов университетов и физико-математических факультетов педагогических институтов.

Теория функций действительного переменного оформилась как самостоятельная дисциплина лишь в начале XX столетия, после фундаментальных исследований французской математической школы (Лебег, Борель, Данжуа и ряд других). Русская, а затем советская (в основном московская), а также польская математическая школа значительно способствовали дальнейшему развитию указанной дисциплины. Здесь следует назвать имена советских математиков Д. Ф. Егорова, Н. Н. Лузина, А. Я. Хинчина, Урысона, Суслина и польских — Серпинского, Зигмунда, Мазуркевича, Штейнгауса, Банаха и др.

С именами таких ученых, как Ф. Рисс, Фреше, Банах связывается развитие новой дисциплины — функционального анализа,— который во многом основывается на принципах теории функций действительного переменного.

Советская математическая школа заняла видное место в развитии функционального анализа. Она представлена такими математиками, как Люстерник, Колмогоров, Канторович, Гельфанд, М. Крейн, Боголюбов и другие.

Теория функций действительного переменного представляет собой естественное продолжение и обобщение методов классического математического анализа (дифференциального и интегрального исчислений) с их приложениями к геометрии.

Областями существования функций и областями интегрирования становятся не интервалы, а произвольные измеримые множества.

Дается новый процесс интегрирования (Лебега), охватывающий значительно более общий и широкий класс функций, чем функции, интегрируемые в классическом смысле. Вводятся так называемые суммируемые функции, которые представляют собой подкласс измеримых функций. Обобщается понятие производной.

В нашем изложении мы ограничиваемся лишь тем материалом, который предусмотрен вузовской программой. В книге

помещены краткие замечания о развитии излагаемых дисциплин с момента их возникновения.

Первая часть нашего пособия посвящена основам теории функций действительного переменного и излагает теорию множеств, измеримых функций, интегралов Римана, Лебега и Стильтьеса.

Вторая часть содержит основы функционального анализа. Центральное место в ней занимает теория линейных нормированных пространств. Значительное число примеров заимствовано из конструктивной теории функций.

В целом пособие содержит много примеров и упражнений, которые должны позволить лучше усвоить излагаемый материал и помочь обрести соответствующие навыки.

В настоящее время в нашей отечественной и переводной литературе появилось много учебных пособий по теории функций и функциональному анализу. Это книги Александрова и Колмогорова, Натансона, Люстерника и Соболева, Колмогорова и Фомина, Надя и Рисса, Халмоша и других. Почти все они не соответствуют университетской программе. Некоторые имеют характер обширных монографий, другие — слишком кратки. Авторы настоящего пособия старались придать ему характер учебника, доступного для самостоятельного изучения.

При составлении пособия была использована следующая литература:

Александров и Колмогоров. Введение в теорию функций действительного переменного. Гостехиздат, 1938.

Лебег. Теория интегрирования и отыскания первообразных. ГТТИ, 1934.

Сакс. Теория интеграла. ИЛ, 1949.

Банах. Курс функционального анализа (на укр. яз.). Радян. школа, 1948.

Люстерник и Соболев. Элементы функционального анализа. ГТТИ, 1951.

Плесснер и Рохлин. Спектральная теория линейных операторов. Успехи мат. наук, 1946.

Никольский. Теория приближения функций, 4. I. Днепропетровск, 1947.

Часть I настоящего пособия написана А. С. Кованько. Часть 2 — И. Г. Соколовым.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

ВВЕДЕНИЕ

В настоящем введении мы напомним основные понятия, определения и теоремы классического математического анализа, на которые будем опираться при изложении курса.

§ 1. Область изменения аргумента

Простейшими видами областей изменения аргумента являются следующие:

1) **Интервал.** *Это множество значений x, удовлетворяющих неравенству $a < x < b$, где a и b конечные величины, или где $a = -\infty$, а $b = +\infty$. Если a и b конечны, то интервал называется* ***конечным,*** *если же имеет место хотя бы одно из равенств $a = -\infty$ или $b = +\infty$, то интервал называется* ***бесконечным.*** *Иногда интервал принято называть «открытый интервал». Обозначается он так: (a, b) или $(a < x < b)$.*

2) **Отрезок, или сегмент.** *Это множество значений x, удовлетворяющих соотношению $a \leqslant x \leqslant b$, где a и b — конечные величины. Иногда отрезок называют «замкнутым интервалом». Он обозначается так: $[a, b]$ или $[a \leqslant x \leqslant b]$, или $(a \leqslant x \leqslant b)$.*

3) **Полуинтервал, или полусегмент.** *Это множество значений x, удовлетворяющих соотношению $a < x \leqslant b$ или $a \leqslant x < b$. Он записывается соответственно $(a, b]$ или $[a, b)$. Полуинтервал может быть и бесконечным: $[a, +\infty)$ или $(-\infty, b]$.*

4) Если мы сложим полуинтервалы $[x_1, x_2), [x_2, x_3), \ldots\ldots, [x_{n-1}, x_n)$, то получим полуинтервал $[x_1, x_n)$. Если вместо последнего полуинтервала мы возьмем при сложении отрезок $[x_{n-1}, x_n]$, то в результате получим отрезок $[x_1, x_n]$.

5) Если $a < c < d < b$, то мы можем от интервала (a, b) отнять отрезок $[c, d]$ и в остатке получим два интервала: (a, c) и (d, b). Если от отрезка $[a, b]$ отнять интервал (c, d), то в остатке получим два отрезка: $[a, c]$ и $[d, b]$.

§ 2. Систематические дроби

Примером систематических дробей могут быть десятичные дроби. Единица делится на 10 равных частей, каждая из которых в свою очередь дробится на 10 равных частей и так все время.

Ограничимся рассмотрением правильных десятичных дробей.

Дробь 0,14578 может быть записана так:

$$\frac{1}{10}+\frac{4}{10^2}+\frac{5}{10^3}+\frac{7}{10^4}+\frac{8}{10^5}.$$

Десятичная дробь иначе называется систематической дробью с основанием 10. Всякая систематическая дробь с основанием 10 может быть записана так:

$$\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\ldots\ldots\ldots+\frac{a_k}{10^k},$$

где $(0 \leqslant a_i \leqslant 9)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, k)$.

Если вместо числа 10 принять за основание любое натуральное число n, то получается систематическая дробь

$$\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\frac{a_3}{n^3}+\ldots\ldots\ldots+\frac{a_k}{n^k},$$

где $(0 \leqslant a_i \leqslant n-1)$.

Если $n < 10$, то можно для чисел a_i пользоваться известными нам цифрами 0, 1, 2, 3, ..., 9. Если же $n > 10$, то нужно ввести новые цифры (знаки), чтобы обозначить ими числа 10, 11, 12, ..., $(n-1)$.

В дальнейшем нам придется пользоваться систематическими дробями с основаниями 2 и 3 (см. гл. III и IV). Систематические дроби могут быть конечными или бесконечными. Последние могут, в частности, оказаться периодическими. Заметим, что любую конечную дробь с основанием n можно рассматривать как смешанную периодическую с 0 в периоде. Эту же дробь можно изобразить в виде периодической иначе: последнюю цифру конечной дроби следует уменьшить на 1 и дальше поставить $(n-1)$ в периоде. Например, при $n = 8$.

$$\frac{2}{8}+\frac{3}{8^2}+\frac{5}{8^3}+\frac{6}{8^4}+\frac{0}{8^5}+\frac{4}{8^6}=[0{,}235604]_8$$

можно записать так:

$$\frac{2}{8}+\frac{3}{8^2}+\frac{5}{8^3}+\frac{6}{8^4}+\frac{0}{8^5}+\frac{3}{8^6}+\frac{7}{8^7}+\frac{7}{8^8}+\cdots=[0{,}235603777\ldots]_8.$$

Здесь в периоде будет $n-1=8-1=7$.

Систематическую дробь $\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\ldots\ldots+\frac{a_k}{n^k}$ можно записать так: $[0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_k]_n$.

§ 3. Точные границы

Пусть имеется бесконечное множество действительных чисел $\{x\}$. Оно называется ограниченным, если существуют два конечные действительные числа a и b $(a<b)$, такие, что всякое число x из нашего множества удовлетворяет неравенству $a<x<b$. В этом случае a и b называются границами множества (a — нижняя, b — верхняя).

Наименьшая из всех верхних границ называется точной верхней границей, а наибольшая из всех нижних границ — точной нижней границей множества.

Точные границы множества $\{x\}$ это соответственно такие числа a' и b', что для всех x выполняется неравенство $a'<x<b'$ и, как бы мало ни было $\varepsilon>0$, существуют такие числа x_1 и x_2 нашего множества, что $x_1<a'+\varepsilon$ и $x_2>b'-\varepsilon$. В частности, может оказаться, что $x_1=a'$ и $x_2=b'$. Тогда a оказывается наименьшим, а b наибольшим числом нашего множества.

Точные границы множества $\{x\}$ записываются так: нижняя — $\inf x$, верхняя — $\sup x$. Если есть наибольшее и наименьшее значения x, то они обозначаются: $\min x$ (абсолютный минимум) и $\max x$ (абсолютный максимум). Если мы рассмотрим величину $c-x$, где c постоянное число, то $\sup x+\inf(c-x)=c$ и $\inf x+\sup(c-x)=c$.

Если идет речь о значениях некоторой ограниченной функции $f(t)$, то $\sup f(t)$ есть такое число, что для всех t существует неравенство $f(t)\leqslant\sup f(t)$, и как бы мало ни было $\varepsilon>0$, найдется такое $t=t'$, что $f(t')>\sup f(t)-\varepsilon$. Аналогично определяется $\inf f(t)$.

Для большей ясности точные границы функции на данной области E записываются так $\sup\limits_{t\in E} f(t)$ и $\inf\limits_{t\in E} f(t)$. «$t\in E$» — означает, что аргумент t меняется в некоторой области E. Можно аналогично записать точные границы бесконечной последовательности чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots$ следующим образом $\inf\limits_{N\leqslant n<+\infty} x_n$, $\sup\limits_{N\leqslant n<+\infty} x_n$.

§ 4. Пределы

Пусть имеется бесконечная последовательность (варианта) $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n, \ldots\ldots$.

Считая, что читателю известно понятие обыкновенного предела последовательности, мы рассмотрим тот случай, когда последовательность, будучи ограниченной, не имеет предела.

Тогда существуют обобщенные пределы: верхний предел — $\lim\limits_{N\to\infty}[\sup\limits_{(N\leqslant n<\infty)} x_n]$ и нижний предел — $\lim\limits_{N\to\infty(N\leqslant n<\infty)}[\operatorname{suf} x_n]$. Записываются они так: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$. Очевидно, что $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$. В частности, если $\underline{\lim}$ равен $\overline{\lim}$, то существует обычный предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, совпадающий с общим значением верхнего и нижнего пределов.

Если последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху, т. е. не имеет верхней границы, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = +\infty$, если нет нижней границы, то $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = -\infty$.

Пусть $f(x)$ есть ограниченная функция на некотором интервале, включающем точку a. Рассмотрим интервал $\Delta = (a-\delta, a)$. Пусть существует такое число A, что как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ для всех $x \in \Delta$, если δ достаточно мало. Тогда мы говорим, что $f(x)$ имеет предел в точке a слева и обозначим его так: $f(a-0)$.

Совершенно так же рассматривая значение $f(x)$ в интервале $(a, a+\delta)$, мы приходим к понятию *предела справа*, который мы обозначим через $f(a+0)$. Если $f(a) = f(a-0)$, то $f(x)$ называется *непрерывной слева*, если же $f(a) = f(a+0)$, то $f(x)$ *называется непрерывной справа*. Если $f(x)$ непрерывна справа и слева, то $f(x)$ называется просто *непрерывной в точке* $x = a$.

Величина $[f(a) - f(a-0)]$ называется *левым скачком* $f(x)$ в точке a, $[f(a+0) - f(a)]$ называется *правым скачком* $f(x)$ в точке a, $[f(a+0) - f(a-0)]$ называется *полным скачком* $f(x)$ в точке a.

Рассматриваемый случай представляет собой так называемый скачок первого рода.

Пусть теперь $f(x)$ не имеет предела ни справа ни слева в точке a и пусть

$$M_\delta = \sup_{x \in (a-\delta,\, a+\delta)} f(x) \quad \text{и} \quad m_\delta = \inf_{x \in (a-\delta,\, a+\delta)} f(x).$$

Величина $M_\delta - m_\delta$ называется *колебанием* $f(x)$ в интервале $(a-\delta,\ a+\delta)$, а $\lim\limits_{\delta\to 0}(M_\delta - m_\delta)$ называется колебанием $f(x)$ в точке a. Если колебание $f(x)$ в точке a равно нулю, то функция $f(x)$ непрерывна в точке a.

Если, в частности, a есть точка разрыва первого рода, то легко видеть, что колебание $f(x)$ в точке a есть наибольшая из величин $|f(a+0) - f(a)|$, $|f(a) - f(a-0)|$ и $|f(a+0) - f(a-0)|$. Если $f(x)$ монотонная, то она может иметь только точки разрыва первого рода, т. е. только скачки. Колебание функции $f(x)$ в точке x мы будем обозначать так $\operatorname{osc} f(x)$.

Отметим еще такие определения:

I. Колебание $f(x)$ на интервале (α, β) это величина

$$[\sup_{x \in (\alpha, \beta)} f(x) - \inf_{x \in (\alpha, \beta)} f(x)].$$

Обозначается она через $\operatorname{osc}_{x \in (\alpha, \beta)} f(x)$.

II. Изменение (приращение) $f(x)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ это $[f(\beta) - f(\alpha)]$.

§ 5. Непрерывность

В § 4 уже было дано определение непрерывной функции. Теперь мы его сформулируем несколько иначе.

Определение I. *$f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ называется непрерывной в данной точке x, если как бы мало ни было $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое (достаточно малое) число $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$, что $|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$, если $|h| < \delta$.*

Определение II. *$f(x)$ называется непрерывной на данном интервале (отрезке), если она непрерывна в каждой его точке.*

Определение III. *$f(x)$ называется равномерно непрерывной на данном интервале (отрезке), если как бы мало ни было $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое (достаточно малое) число $\delta > 0$, что $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ для любой пары значений x_1 и x_2, лежащих на данном интервале (отрезке) и удовлетворяющих условию $|x_1 - x_2| < \delta$.*

Отметим следующие основные свойства непрерывных функций.

I. Функция, непрерывная на данном отрезке, есть функция, равномерно непрерывная на этом отрезке.

II. Функция, непрерывная на данном отрезке (следовательно, равномерно непрерывная), ограничена на этом отрезке и имеет абсолютный максимум и абсолютный минимум.

III. Сумма конечного числа функций, непрерывных на данном отрезке (интервале), есть функция, непрерывная на этом отрезке (интервале).

IV. Произведение конечного числа функций, непрерывных на данном отрезке (интервале), есть функция, непрерывная на этом отрезке (интервале).

V. Если $f(x)$ есть функция, непрерывная на данном отрезке $[a \leqslant x \leqslant b]$, и если $F(y)$ есть непрерывная функция на отрезке $[m \leqslant y \leqslant M]$, где m и M точные границы $f(x)$ на $[a, b]$, то $F(f(x))$ есть функция, непрерывная на $[a \leqslant x \leqslant b]$.

§ 6. Равномерная сходимость

Определение. *Последовательность функций $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, определенных на отрезке $[a \leqslant x \leqslant b]$, сходится равномерно на $[a \leqslant x \leqslant b]$ к предельной функции $f(x)$, если*

для всякого числа $\varepsilon > 0$ *существует такой индекс* $N > 0$, *что при любом* x *из отрезка* $[a, b]$ *выполняется неравенство* $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, *если* $n > N$.

Отметим следующие свойства равномерно сходящихся последовательностей.

I. Если последовательность непрерывных функций $\{f_n(x)\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *сходится равномерно к* $f(x)$ *на отрезке* $[a \leqslant x \leqslant b]$, *то* $f(x)$ *также непрерывна на* $[a \leqslant x \leqslant b]$.

II. (Теорема Вейерштрасса-Коши). Необходимое и достаточное условие, чтобы последовательность $\{f_n(x)\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *сходилась равномерно на данном отрезке* $[a \leqslant x \leqslant b]$, *состоит в том, что как бы мало ни было* $\varepsilon > 0$ *существует такой индекс* $N > 0$, *что для всех значений* x *из отрезка* $[a, b]$ *выполняется неравенство* $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ *при всяком* $n > N$ *и при любом* p.

Теорема Вейерштрасса. Какова бы ни была непрерывная функция $f(x)$ *на отрезке* $[a, b]$, *существует последовательность полиномов* $\{P_n(x)\}$, *которая сходится равномерно к* $f(x)$ *всюду на отрезке* $[a \leqslant x \leqslant b]$.

§ 7. Обобщенные производные

Пусть $f(x)$ есть непрерывная функция на интервале (a, b) и x некоторая точка этого интервала. Рассмотрим величину

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

и пусть $(0 < \alpha < h < \beta)$, где $\beta < \min(x - a, b - x)$.

Пусть

$$\lambda(\alpha, \beta) = \sup_{\alpha < h < \beta} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

$$\mu(\alpha, \beta) = \inf_{\alpha < h < \beta} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Величина $D^+f = \lim\limits_{\beta \to 0} [\lim\limits_{\alpha \to 0} \lambda(\alpha, \beta)]$ называется *верхней производной* $f(x)$ *справа*. Величина $D_+f = \lim\limits_{\beta \to 0} [\lim\limits_{\alpha \to 0} \mu(\alpha, \beta)]$ называется *нижней производной* $f(x)$ *справа*. Аналогично определяются *производные* $f(x)$ *слева*. В этом случае мы выбираем h отрицательным и пусть $\delta < h < \gamma < 0$. Тогда строим величины:

$$D^-f = \lim_{\delta \to 0} \left[\limsup_{\gamma \to 0 \; [\gamma < h < \delta]} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right],$$

$$D^-f = \lim_{\delta \to 0} \left[\liminf_{\gamma \to 0 \; [\gamma < h < \delta]} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right].$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

Если все четыре производные совпадают, то их общее значение есть, очевидно, обыкновенная производная $f'(x)$.

Рассмотрим теперь величину

$$\frac{f(x+h)-f(x-k)}{h+k},$$

где $h>0$ $k>0$.

Пусть $\alpha<h<\beta$ и $\alpha'<k<\beta'$. Возьмем величины

$$\lambda(\alpha,\beta,\alpha',\beta')=\sup_{\substack{\alpha<h<\beta\\ \alpha'<k<\beta'}}\frac{f(x+h)-f(x-k)}{h+k};$$

и

$$\mu(\alpha,\beta,\alpha',\beta')=\inf_{\substack{\alpha<h<\beta\\ \alpha'<k<\beta'}}\frac{f(x+h)-f(x-k)}{h+k};$$

тогда величины

$$\overline{D}f(x)=\lim_{\substack{\beta\to 0\\ \beta'\to 0}}\left[\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha'\to 0}}\lambda(\alpha,\beta,\alpha',\beta')\right],$$

$$\underline{D}f(x)=\lim_{\substack{\beta\to 0\\ \beta'\to 0}}\left[\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha'\to 0}}\mu(\alpha,\beta,\alpha',\beta')\right]$$

называются соответственно *верхней и нижней обобщенными производными* $f(x)$ в данной точке x.

Примечание. Можно было бы предположить непрерывность $f(x)$ только в той точке, в которой мы вычисляем обобщенные производные.

Если $\underline{D}f(x)=\overline{D}f(x)$, то мы имеем, очевидно, обыкновенную производную, которая равна общему значению $\underline{D}f$ и $\overline{D}f$.

§ 8. Интегралы

Пусть $f(x)$ есть ограниченная функция на отрезке $[a\leqslant x\leqslant b]$. Отрезок $[a,\ b]$ разбивается точками $x_0=a<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ на n отрезков $[x_0,\ x_1]$, $[x_1,\ x_2]$, $\ldots\ldots$, $[x_{n-1},\ x_n]$.

Пусть $\delta=\max(x_k-x_{k-1})$. Пусть $\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\ldots,\tilde{x}_n$ соответственно любые точки этих отрезков, т. е. $(x_{k-1}\leqslant\tilde{x}_k\leqslant x_k)$.

Составим сумму:

$$\sum_{k=1}^{k=n}f(\tilde{x}_k)\cdot(x_k-x_{k-1}).$$

Если $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \delta\to 0}}\sum\limits_{1}^{n}f(\tilde{x}_k)\cdot(x_k-x_{k-1})$ существует и независим от того, каким образом величины (x_k-x_{k-1}) стремятся к ну-

лю, а также от выбора точек $\tilde{x}_k$, то такой предел называется *интегралом от* $f(x)$ и записывается так:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Сама функция называется интегрируемой. Интегрируемой будет непрерывная функция и функция, имеющая конечное число точек разрыва (любой категории), а также монотонная функция с любым множеством точек разрыва (в данном случае — скачков).

Напомним следующие свойства интеграла (формулы):

1) $\int_a^b [f(x)+\varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx.$

2) $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$

3) $\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx \quad (C=\text{const}).$

4) (Формула интегрирования по частям)

$$\int_a^b f(x)\cdot\varphi'(x)\,dx = f(b)\cdot\varphi(b) - f(a)\cdot\varphi(a) - \int_a^b \varphi(x)f'(x)\,dx.$$

5) (Формула замены переменного)

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt,$$

где

$$\begin{cases}\alpha \leqslant t \leqslant \beta\\ \varphi(\alpha) \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi(\beta),\end{cases}$$

$f(x)$, $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ непрерывны.

6) (Формула дифференцирования по параметру)

$$\frac{d}{d\alpha}\left\{\int_{\varphi_1(\alpha)}^{\varphi_2(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx\right\} = f(\varphi_2(\alpha),\alpha)\cdot\varphi_2'(\alpha) - f(\varphi_1(\alpha),\alpha)\cdot\varphi_1'(\alpha) +$$

$$+\int_{\varphi_1(\alpha)}^{\varphi_2(\alpha)} f_\alpha'(x,\alpha)\,dx.$$

Здесь $f'_\alpha(x, \alpha)$ равномерно непрерывная
ременных x и α.

7) $\frac{d}{dx}\left\{\int_a^x f(t)\,dt\right\} = f(x)$ — в точках непрерывности $f(x)$.

§ 9. Некоторые неравенства

Отметим следующие два неравенства:

1. Неравенство Гельдера:

$$\sum_1^n a_k \cdot b_k \leqslant \left\{\sum_1^n a_k^p\right\}^{\frac{1}{p}} \cdot \left\{\sum_1^n b_k^{\frac{p}{p-1}}\right\}^{\frac{p-1}{p}},$$

где $a_k > 0$, $b_k > 0$, $p > 1$.

2. Неравенство Минковского:

$$\cdot \left\{\sum_1^n (a_k + b_k)^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \left\{\sum_1^n a_k^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_1^n b_k^p\right\}^{\frac{1}{p}},$$

где $p \geqslant 1$, $a_k > 0$, $b_k > 0$.

Вывод этих неравенств основан на методе математической индукции.

Сначала мы докажем неравенство Гельдера для $n = 2$.

Для сокращения записи положим:

$$\frac{p}{p-1} = r > 1,$$

тогда

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1.$$

Рассмотрим следующую функцию:

$$\varphi(x) = a_1 b_1 + a_2 x - (a_1^r + a_2^r)^{\frac{1}{r}} \cdot (b_1^p + x^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Дифференцируя ее, находим:

$$\varphi'(x) = a_2 - (a_1^r + a_2^r)^{\frac{1}{r}} \cdot (b_1^p + x^p)^{\frac{1}{p}-1} \cdot x^{p-1}.$$

$\varphi'(x)$ имеет очевидный и единственный корень:

$$x = x_1 = b_1 \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

и меняет свой знак при переходе через него с $+$ на $-$. Значит

$\varphi(x)$ имеет в точке x_1 максимум; кроме того, как это легко проверить $\varphi(x_1) = 0$, значит, вообще $\varphi(x) < 0$.

Поэтому $\varphi(b_2) < 0$, откуда:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \leqslant (a_1^r + a_1^r)^{\frac{1}{r}} \cdot (b_1^p + b_2^p)^{\frac{1}{p}} \quad \ldots\ldots (1)$$

Итак, неравенство доказано для $n = 2$.

Предположим, что оно верно для n.

Итак, имеем:

$$\sum_1^n a_k \cdot b_k \leqslant \left(\sum_1^n a_k^r\right)^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\sum_1^n b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Прибавляя к обеим частям $a_{n+1} \cdot b_{n+1}$, получим:

$$\sum_1^{n+1} a_k \cdot b_k \leqslant \left(\sum_1^n a_k^r\right)^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\sum_1^n b_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + a_{n+1} b_{n+1}. \quad \ldots\ldots (2)$$

Применяем теперь неравенство (1) к правой части (2), где a_1 заменено через $\left(\sum_1^n a_k^r\right)^{\frac{1}{r}}$, а b_1 через $\left(\sum_1^n b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$, а a_2 через a_{n+1} и b_2 через b_{n+1}.

Тогда правая часть примет вид:

$$\left[\sum_1^n a_k^r + a_{n+1}^r\right]^{\frac{1}{r}} \cdot \left[\sum_1^n b_k^p + b_{n+1}^p\right]^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_1^{n+1} a_k^r\right)^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\sum_1^{n+1} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Значит из (2) получим:

$$\sum_1^{n+1} a_k \cdot b_k \leqslant \left(\sum_1^{n+1} a_k^r\right)^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\sum_1^{n+1} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Таким образом, наше неравенство верно для $n + 1$ и тем самым доказательство методом математической индукции завершено.

Переходим теперь к неравенству Минковского, которое тривиально для $p = 1$. Поэтому будем считать $p > 1$ и используем неравенство Гельдера. Пусть $n = 2$.

Имеем:

$$(a_1 + b_1)^p + (a_2 + b_2)^p = [(a_1 + b_1)^{p-1} \cdot a_1 + (a_2 + b_2)^{p-1} \cdot a_2] + [(a_1 + b_1)^{p-1} \cdot b_1 + (a_2 + b_2)^{p-1} \cdot b_2] \leqslant$$

$$\leqslant [(a_1 + b_1)^p + (a_2 + b_2)^p]^{\frac{p-1}{p}} \cdot (b_1^p + b_2^p)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= [(a_1 + b_1)^p + (a_2 + b_2)^p]^{\frac{p-1}{p}} \cdot \{(a_1^p + a_2^p)^{\frac{1}{p}} + (b_1^p + b_2^p)^{\frac{1}{p}}\}.$$

Беря начало и конец (подчеркнуты) и сокращая на

$$[(a_1+b_1)^p+(a_2+b_2)^p]^{\frac{p-1}{p}},$$

приходим к неравенству Минковского для $n=2$.

Пусть теперь оно верно для n, т. е.

$$\left\{\sum_1^n (a_k+b_k)^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \left\{\sum_1^n a_k^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_1^n b_k^p\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Используя теперь случай $(n=2)$, находим:

$$\underline{\left[\sum_1^{n+1}(a_k+b_k)^p\right]^{\frac{1}{p}}} = \left[\sum_1^n (a_k+b_k)^p+(a_{n+1}+b_{n+1})^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left\{\left[\left(\sum_1^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} +\right.\right.$$

$$\left.+\left(\sum_1^n b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p+(a_{n+1}+b_{n+1})^p\Big\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \left\{\left[\sum_1^n a_k^p+a_{n+1}^p\right]^{\frac{1}{p}} +\right.$$

$$\left.+\left[\sum_1^n b_k^p+b_{n+1}^p\right]^{\frac{1}{p}}\right\} \leqslant \underline{\left(\sum_1^{n+1} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_1^{n+1} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}}.$$

Беря начало и конец (подчеркнуты), получаем неравенство Минковского для $n+1$. Доказательство методом индукции завершено.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com