ВЫСШЕЕ
ОБРАЗОВАНИЕ

А. И. КАРАСЕВ
З. М. АКСЮТИНА Т. И. САВЕЛЬЕВА

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ВУЗОВ

А. И. КАРАСЕВ,
З. М. АКСЮТИНА, Т. И. САВЕЛЬЕВА

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ВУЗОВ

Часть II

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов
экономических специальностей вузов

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1982

ББК 22.11
К21
УДК 519

Рецензенты:

кафедра высшей математики
Ленинградского финансово-экономического института;
д-р физ.-мат. наук, проф. Н. Я. Виленкин

Карасев А. И., Аксютина З. М., Савельева Т. И.

К21 Курс высшей математики для экономических вузов. Ч. II. Теория вероятностей и математическая статистика. Линейное программирование: Учеб. пособие для студентов вузов. — М.: Высш. школа, 1982. — 320 с., ил.

В пер.: 85 к.

Содержание части II охватывает следующие разделы: теорию вероятностей; математическую статистику; элементы линейной алгебры; линейное программирование. Материал изложен доступно, с привлечением для иллюстрации основных теоретических положений большого числа примеров. К каждой главе даны упражнения для самостоятельной работы.

Предназначается для студентов экономических специальностей вузов.

К $\frac{1702060000-408}{001(01)-82}$ 34—82 517

ББК 22.11

ОГЛАВЛЕНИЕ

РАЗДЕЛ I
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ГЛАВА 1
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ

§ 1. Предмет теории вероятностей

В практической деятельности мы часто встречаемся с явлениями, исход которых нельзя предсказать, результат которых, как говорят, зависит от случая. Например, то, что застрахованный объект (дом, домашнее имущество и т. п.) будет уничтожен в результате стихийного бедствия, — дело случая. Чем же тогда страховые органы руководствуются в своей работе и можно ли предсказывать что-либо о случайных явлениях? Оказывается, что если о будущем определенного застрахованного объекта сказать ничего нельзя, то о состоянии большого их числа можно почти наверняка сказать многое.

Случайное явление можно иногда охарактеризовать *частостью*, т. е. отношением числа его наступлений к числу испытаний, в каждом из которых при одинаковых условиях всех испытаний оно могло наступить или не наступить. Примерами частости могут служить доля родившихся за год мальчиков в населенном пункте, удельный вес нестандартных деталей в партии и т. п.

Если частость случайного явления в сериях из большого числа испытаний почти постоянна, т. е. колеблется незначительно около некоторой постоянной величины, то будем говорить, что этому явлению присуща *устойчивость частости*. Например, рождаемость мальчиков обладает этим свойством.

Случайные явления или события с устойчивой частостью широко распространены в физике, биологии, машиностроении (теория допусков), экономике и других отраслях знания.

Случайность события или явления не означает его беспричинности. Предметы, явления в природе органически связаны, зависят и обусловливают друг друга. Ни одно явление в природе не может быть понято, если взять его в изолированном виде, и, наоборот, любое явление может быть понято и обосновано, если оно рассматривается в неразрывной связи с окружающими явлениями.

Место падения снаряда при стрельбе из орудия является случайным, но это не означает, что оно не имеет причинного обоснования. Наоборот, траектория полета снаряда является результатом воздействия на снаряд очень большого числа факторов. Дело лишь в том, что каждый фактор количественно по-разному проявляется в различные моменты времени и точно указать действие каждого из них в определенный момент времени и суммарное действие их на траекторию данного снаряда мы не можем. В результате место падения снаряда становится случайным.

Итак, *теория вероятностей есть раздел математики, в котором изучаются только случайные явления (события) с устойчивой частостью и выявляются закономерности при массовом их повторении.*

Чем в меньших границах колеблются частости исходных событий, тем более точно описывает теория вероятностей соответствующие наблюдаемые явления. И наоборот, к глубоко ошибочным выводам может привести применение схем теории вероятностей к явлениям (безразлично, какого они характера — экономического или естественнонаучного), если у исходных случайных событий устойчивости частости нет.

Следует остерегаться возможного неправильного истолкования применения теории вероятностей лишь в случаях, когда мы бессильны знать что-нибудь определенное, точное об условиях происхождения и развития явления. Только из факта незнания нельзя сделать какие-нибудь выводы о закономерностях, о знании.

§ 2. Первоначальные понятия и определения

В любой науке есть основные понятия, на которые она опирается. Каждое последующее понятие определяется через предыдущие. Но где-то этот процесс определений должен заканчиваться. В «истоке» должны быть первоначальные понятия, которые нельзя определить через другие; они лишь разъясняются, а все остальные сводятся к ним. К таким понятиям в теории вероятностей относятся понятия события и равновозможности. Под *событием* будем понимать все то, что может произойти, а может и не произойти. Например: а) первый родившийся в семье ребенок окажется мальчиком; б) наудачу взятое изделие удовлетворяет стандарту; в) наудачу взятое изделие не удовлетворяет стандарту; г) в Москве 1 августа 1990 г. выпадут осадки. Событие — не происшествие, а лишь возможный исход опыта, явления или наблюдения.

В некоторых играх используется сделанная из однородного материала в виде куба игральная кость, грани которой занумерованы точками. По числу их на верхней грани говорят о числе выпавших очков при подбрасывании игральной кости (одно, два, три, четыре, пять, шесть). В этих условиях указанные шесть событий следует считать равновозможными, так как нет оснований считать, что выпадение какого-нибудь одного числа очков предпочтительнее. Таким образом, *равновозможность* означает равноправность (симметрию) отдельных исходов испытания относительно некоторого комплекса условий.

События обозначают первыми заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C и т. д.

Два события называются *несовместимыми*, если наступление одного из них исключает возможность наступления другого. В противном случае события называются *совместимыми*.

Пусть, например, студент приобрел билет денежно-вещевой лотереи. Тогда событие A, состоящее в том, что он выиграет автомобиль

«Москвич», и событие B, состоящее в том, что он выиграет часы, являются несовместимыми. Для лица, имеющего два билета денежно-вещевой лотереи, события A и B, заключающиеся в том, что он выиграет соответственно по первому и второму билетам, являются совместимыми, так как наступление события A (он выиграл по первому билету) не исключает возможности наступления события B (выиграть по второму билету).

Несовместимость более чем двух событий означает их попарную несовместимость.

Событие называется *достоверным*, если оно не может не произойти в условиях данного опыта или явления. Событие называется *невозможным*, если оно не может произойти при выполнении определенного комплекса условий.

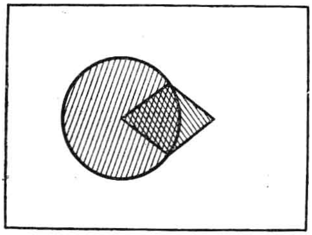

Рис. 1

Событие, заключающееся в том, что из партии стандартных деталей будет взята стандартная деталь, является достоверным, а нестандартная — невозможным.

Два события, одно из которых обязательно должно произойти, причем наступление одного исключает возможность наступления другого, называются *противоположными*.

Например, события «изделие удовлетворяет стандарту» и «изделие не удовлетворяет стандарту» — противоположные.

Событие, противоположное событию A, будем обозначать символом $\bar{A}$.

В некотором испытании (явлении) события A, B, ..., M называются *единственно возможными*, если по крайней мере одно из них обязательно произойдет как исход испытания (явления).

Пусть стрелок производит один выстрел по мишени, изображенной на рис. 1. При этом возможны такие исходы: а) попадание в круг; б) попадание в ромб; в) попадание не в круг и не в ромб. Эти исходы, очевидно, являются единственно возможными. Мы не говорим и не знаем, равновозможны они или нет. Это другой вопрос, который требует специального рассмотрения.

События A, B, ..., M образуют *полную систему*, если они являются единственно возможными и несовместимыми исходами некоторого опыта (явления).

Пусть, например, электрические лампочки по сроку службы разбиты на следующие группы:

Группа	A	B	C	D	E
Срок службы, ч	До 600	600—1200	1200—1800	1800—2400	2400 и более

Тогда взятая наудачу лампочка окажется принадлежащей той или иной группе, что можно рассматривать как события A, B, C, D, E. Эти события образуют полную систему.

Любые два противоположных события образуют полную систему.

Суммой конечного числа событий называется новое событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них.

Произведением конечного числа событий называется новое событие, состоящее в том, что произойдут все эти события.

Например, если событие A состоит в попадании в круг, а событие B — в ромб (рис. 1), то их сумма заключается в попадании или в круг, или в ромб (на рисунке эта область заштрихована), а произведение — в попадании в общую часть круга и ромба (в дважды заштрихованную область).

Сумму событий A и B будем обозначать символом $A + B$, а их произведение — символом AB. Аналогично обозначаются сумма и произведение конечного числа событий.

Будем говорить, что событие A влечет событие B, если всякий раз, когда наступает событие A, наступает и B.

События A и B называются *эквивалентными*, если наступление A влечет за собой наступление B, а наступление B влечет наступление A.

§ 3. Определение вероятности события

Пусть из 100 одинаковых по внешнему виду деталей, среди которых 97 стандартных, а остальные бракованные, берется наудачу одна деталь. Очевидно, что события A и B, состоящие соответственно в том, что деталь окажется стандартной и бракованной, не равновозможные; событие A более возможно, более вероятно, чем B.

Под вероятностью события понимается число, являющееся характеристикой степени возможности наступления этого события. Вероятность события A будем обозначать символом $P(A)$ (от лат. probabilitas — «вероятность»).

Вероятность события A равна отношению числа случаев m, благоприятствующих ему из общего числа n единственно возможных, равновозможных и несовместимых случаев, к числу n, т. е.

$$P(A) = m/n. \tag{1.1}$$

Это определение вероятности называется к л а с с и ч е с к и м.

Пример 1. В условиях сформулированного в начале параграфа примера найти вероятность того, что взятая наудачу деталь окажется стандартной.

△ Представим мысленно, что все детали занумерованы. Тогда должно быть ясно, что при взятии одной детали возможны 100 различных событий (случаев), которые, как нетрудно видеть, являются единственно возможными, равновозможными и несовместимыми. Появление любой из 97 стандартных деталей будет означать осуществление события A, или, как принято говорить, событию A благоприятствуют 97 из общего числа 100 случаев. Следовательно, вероятность события A такова: $P(A) = 97/100 = 0{,}97$. ▲

Пример 2. Количество людей, доживающих до определенного возраста из 100 000 родившихся (1964—1965 гг. по всей территории СССР), представлено в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Возраст в годах	Число доживающих	Возраст в годах	Число доживающих	Возраст в годах	Число доживающих	Возраст в годах	Число доживающих
0	100 000	25	94 354	55	83 551	75	52 892
5	96 236	30	93 405	60	79 179	80	38 998
10	95 852	35	92 232	65	72 661	85	25 003
15	95 565	40	90 809	70	64 332	90	12 723
20	95 098	45	89 109			95	5 450
		50	86 895			100	1 873

Найти вероятность того, что новорожденный доживет до 30 лет.

△ По таблице находим, что из 100 000 новорожденных до 30 лет доживут 93 405. Поэтому искомая вероятность $P(A) = 93\,405/100\,000 \approx 0{,}934$. ▲

Пример 3. Подбрасывают две игральные кости. Найти вероятность события B, состоящего в том, что на них в сумме окажется 10 очков.

△ При подбрасывании двух игральных костей возможны следующие 36 различных исходов (первая цифра означает число очков на первой кости, а вторая — на другой):

11 12 13 14 15 16

21 22 23 24 25 26

31 32 33 34 35 36

41 42 43 44 45 ***46***

51 52 53 54 ***55*** *56*

61 62 63 ***64*** *65 66*

Они являются единственно возможными, равновозможными и несовместимыми исходами испытания. Искомому событию B из этих 36 случаев благоприятствуют три (выделены жирным шрифтом), а поэтому его вероятность $P(B) = 3/36 \approx$ $\approx 0{,}083$. ▲

Пример 4. Среди 50 деталей три нестандартные. Взяты наудачу две детали. Найти вероятность того, что они нестандартные.

△ Вероятность рассматриваемого события зависит от того, как производится выбор деталей.

I случай. Установив качество наудачу взятой детали, ее возвращают обратно, а после тщательного перемешивания берут следующую. При таком способе выбора общее число различных исходов испытания равно $50 \cdot 50 = 2500$ (первой может оказаться любая из 50 деталей, и она может сочетаться с любой из тех же 50 деталей при выборе второй детали), которые и являются единственно возможными, равновозможными и несовместимыми. Из них событию A, состоящему в том, что обе детали окажутся нестандартными, благоприятствуют $3 \cdot 3 = 9$ исходов (при выборе первой детали нестандартная может появиться в трех случаях и каждый из них может сочетаться с тремя такими же случаями при выборе второй детали). Следовательно, $P(A) = 9/2500 = 0{,}0036$.

II случай. Взятая наудачу деталь обратно не возвращается. При таком способе выбора число различных исходов испытания равно $50 \cdot 49 = 2450$ (любая из 50 деталей, взятая первой, может сочетаться с любой из остальных 49 деталей при выборе второй), которые и являются единственно возможными, равновозможными и несовместимыми. Из них событию B, заключающемуся в том, что обе детали окажутся нестандартными, благоприятствуют только $3 \cdot 2 = 6$ случаев. Поэтому $P(B) = 6/2450 \approx 0{,}0024$. ▲

Этот пример наглядно показывает, что вероятность события становится определенной лишь после того, как установлены условия испытания.

Установим свойства вероятности события, вытекающие из ее определения.

Теорема 1. *Вероятность любого события есть неотрицательное число, не превосходящее единицы.*

□ Число m случаев, благоприятствующих любому событию, не может быть отрицательным и большим, чем их общее число n, т. е. $0 \leqslant m \leqslant n$. Разделив это неравенство почленно на n, получим $0 \leqslant m/n \leqslant 1$, или, учитывая равенство (1.1), $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$. ■

Теорема 2. *Вероятность достоверного события равна единице.*

□ Это очевидно, так как достоверному событию должны благоприятствовать все n единственно возможных, равновозможных и несовместимых случаев, т. е. $m = n$. ■

Теорема 3. *Вероятность невозможного события равна нулю.*

□ Невозможному событию не может благоприятствовать ни один из n единственно возможных, равновозможных и несовместимых случаев, т. е. $m = 0$. ■

Необходимо четко различать понятия вероятности и частости события. Вероятность события вычисляется до опытов и численно выражает меру объективной возможности наступления события, а частость его определяется лишь после того, как результаты опыта становятся известными.

Пример 5. Монета подброшена пять раз. «Герб» выпал два раза. Каковы вероятность и частость выпадения «герба»?

△ Вероятность выпадения «герба» есть $1/2 = 0,5$ (из двух возможных исходов при подбрасывании монеты выпадению «герба» благоприятствует один), а частость выпадения «герба» есть $2/5 = 0,4$ (событие наступило два раза в пяти испытаниях). ▲

Существует ли связь между вероятностью и частостью события? Многие исследователи проделали различные эксперименты с целью выяснения этой связи. Практически во всех опытах частость события в серии из достаточно большого числа испытаний лишь незначительно отличалась от вероятности наступления его в каждом испытании. Опытный факт сближения частости события с вероятностью его находит глубокое обоснование в теореме Я. Бернулли, которая будет рассмотрена ниже (см. § 3 гл. 5).

§ 4. Теорема сложения вероятностей

Некоторые задачи, в том числе и из числа рассмотренных выше, можно решить значительно проще с помощью простейших теорем теории вероятностей — теорем сложения и умножения.

Теорема 1 (теорема сложения вероятностей). *Вероятность суммы конечного числа несовместимых событий равна сумме их вероятностей.*

□ Докажем теорему сначала для двух событий. Пусть из общего числа n единственно возможных, равновозможных и несовместимых случаев событию A благоприятствуют k случаев, а событию B — l случаев. Тогда вероятности этих событий

$$P(A) = k/n; \quad P(B) = l/n. \tag{1.2}$$

По условию, события A и B несовместимы. Следовательно, ни один из k случаев, благоприятствующих событию A, не благоприятствует событию B, последнему благоприятствуют другие l случаев. Отсюда следует, что сумме событий $A+B$ благоприятствуют $k+l$ случаев из n, поэтому вероятность события $A+B$ есть $P(A+B)=(k+l)/n$. Последнее выражение можно представить в виде $P(A+B)=k/n+l/n$. Принимая во внимание равенства (1.2), получим

$$P(A+B)=P(A)+P(B), \tag{1.3}$$

т. е. для двух событий теорема доказана.

Методом математической индукции докажем справедливость теоремы для любого конечного числа событий. Предположим, что теорема верна для n несовместимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, т. е.

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n). \tag{1.4}$$

Сумму событий $A_1+A_2+\ldots+A_n+A_{n+1}$ рассмотрим как сумму двух событий: $A_1+A_2+\ldots+A_n$ и A_{n+1}. Тогда, учитывая, что для двух событий теорема доказана, получим

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n+A_{n+1})=P[(A_1+A_2+\ldots+A_n)+A_{n+1}]=$$
$$=P(A_1+A_2+\ldots+A_n)+P(A_{n+1}).$$

Так как для n событий мы считаем теорему справедливой, то в соответствии с (1.4) имеем

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n+A_{n+1})=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)+P(A_{n+1}),$$

т. е. теорема справедлива и для $n+1$ событий. ■

Пример 1. Пусть вероятность того, что в магазине сначала будет продана пара мужской обуви 44-го размера, равна 0,12, 45-го — 0,04, 46-го или большего — 0,01. Найти вероятность того, что сначала будет продана пара мужской обуви не менее 44-го размера.

△ Искомое событие D произойдет, если будет продана пара обуви 44-го размера (событие A), или 45-го (событие B), или не менее 46-го (событие C), т. е. событие D есть сумма событий A, B, C. События A, B и C несовместимы. Поэтому, применяя теорему сложения вероятностей, получим

$P(D)=P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)=0{,}12+0{,}04+0{,}01=0{,}17$. ▲

Следствие 1. *Сумма вероятностей событий, образующих полную систему, равна единице.*

□ Если события $A, B, \ldots, M$ образуют полную систему, то, с одной стороны, они являются единственно возможными, а поэтому их сумма, т. е. наступление хотя бы одного из них, является достоверным событием, а вероятность его равна единице: $P(A+B+\ldots+M)=1$. С другой стороны, события $A, B, \ldots, M$ — несовместимые. Тогда по теореме сложения вероятностей $P(A+B+\ldots+M)=P(A)+P(B)+\ldots+P(M)$. Из этих двух равенств получаем

$$P(A)+P(B)+\ldots+P(M)=1. \; ■ \tag{1.5}$$

Следствие 2. *Вероятность события, противоположного событию A, равна разности между единицей и вероятностью события A.*

□ Событие A и противоположное ему событие $\bar{A}$ образуют полную систему. Поэтому на основании следствия 1 имеем $P(A)+P(\bar{A})=1$, откуда

$$P(\bar{A})=1-P(A). \; ■ \tag{1.6}$$

Пример 2. В условиях примера 1 найти вероятность того, что сначала продана пара обуви меньше 44-го размера.

△ События «сначала будет продана пара обуви меньше 44-го размера» и «будет продана пара обуви размера не меньше 44-го» — противоположные. Так как в примере 1 было найдено, что $P(D) = 0{,}17$, то вероятность искомого события $P(\overline{D}) = 1 - 0{,}17 = 0{,}83$. ▲

Теорема сложения вероятностей справедлива только для несовместимых событий. Игнорирование этого может привести к неправильным, а иногда и к абсурдным выводам, что хорошо видно из следующего примера. Пусть всхожесть семян оценивается вероятностью 0,7. Какова вероятность того, что из трех посеянных семян взойдет какое-либо одно (безразлично какое)? Обозначим через A, B, C события, состоящие в том, что взойдут соответственно первое, второе, третье семена. Если для отыскания искомой вероятности мы применим теорему сложения вероятностей, то получим $P(A + B + C) = 0{,}7 + 0{,}7 + 0{,}7 = 2{,}1$. Вероятность события оказалась больше единицы. Абсурдность ответа объясняется тем, что события A, B, C, к которым применена теорема сложения вероятностей, являются совместимыми. Действительно, если произошло, например, событие A (взошло первое семя), то это не исключает того, что произойдет событие B (взойдет второе семя).

Теорема 2. *Если событие A влечет событие B, то вероятность события A не превосходит вероятности события B.*

□ Событие B или эквивалентно A, или же его можно представить в виде $B_1 + B_2$, где B_1 эквивалентно A, а B_2 несовместимо с B_1. В первом случае $P(A) = P(B)$ и теорема справедлива, во втором по теореме сложения вероятностей имеем $P(B_1) + P(B_2) = P(B)$, или $P(A) + P(B_2) = P(B)$, поскольку $P(B_1) = P(A)$. Так как $P(B_2) \geqslant 0$, то отсюда получаем, что $P(A) \leqslant P(B)$. ■

§ 5. Теорема умножения вероятностей

Для дальнейшего изложения необходимо ввести некоторые новые понятия.

Вероятность события A, найденная в предположении, что событие B наступило, называется *условной вероятностью* события A относительно события B.

Условную вероятность события A относительно события B будем обозначать символом $P_B(A)$. В таком случае $P_{\overline{B}}(A)$ означает вероятность события A, вычисленную в предположении, что событие B не наступило.

Пример 1. С первого станка на сборку поступило 200 деталей, из которых 180 годных, со второго — 300, из которых 260 годных. Найти вероятность события A, состоящего в том, что взятая наудачу деталь является годной, и условные вероятности его относительно событий B и $\overline{B}$, если событие B состоит в том, что эта деталь изготовлена на первом станке.

△ Вероятность события A равна отношению числа всех годных деталей к общему числу их, изготовленных на обоих станках: $P(A) = (180 + 260)/(200 + 300) = 0{,}88$. Условная вероятность события A относительно события B (вероятность того, что взятая наудачу деталь годная, если известно, что она изготовлена на первом станке) $P_B(A) = 180/200 = 0,9$. Условная вероятность события A относительно события $\overline{B}$, т. е. вероятность того, что взятая деталь — годная, если известно, что она изготовлена не на первом (на втором) станке, $P_{\overline{B}}(A) = 260/300 \approx 0,87$. ▲

Теорема 1 (теорема умножения вероятностей). *Вероятность произведения событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого относительно взятого первым, т. е.*

$$P(AB) = P(A)\,P_A(B), \quad \text{или} \quad P(AB) = P(B)\,P_B(A). \tag{1.7}$$

□ Пусть из общего числа n единственно возможных, равновозможных и несовместимых случаев событию A благоприятствуют m случаев, из которых k благоприятствуют событию B. Тогда вероятность события A есть $P(A) = m/n$, а условная вероятность события B относительно события A есть $P_A(B) = k/m$.

Произведению событий A и B благоприятствуют только те случаи из m, благоприятствующих A, которые благоприятствуют и событию B, т. е. k случаев из n. Таким образом, вероятность события AB есть $P(AB) = k/n$. Умножив числитель и знаменатель дроби на m, получим

$$P(AB) = \frac{m \cdot k}{n \cdot m} = \frac{m}{n} \cdot \frac{k}{m} = P(A)\,P_A(B),$$

что и требовалось доказать. Вторая из формул (1.7) доказывается аналогично. ■

Пример 2. Среди 25 электрических лампочек четыре нестандартные. Найти вероятность того, что две взятые одновременно лампочки окажутся нестандартными.

△ Искомое событие состоит в том, что нестандартными окажутся и первая (событие A), и вторая (событие B) лампочки. Его вероятность найдем по формуле (1.7). Но $P(A) = 4/25$, а $P_A(B) = 3/24$, так как при наступлении события A общее число лампочек и число нестандартных среди них по сравнению с первоначальным уменьшится на одну. Таким образом, $P(AB) = (4/25)\cdot(3/24) = 0,02$. ▲

В примере 1 мы получили, что вероятность события A не совпадает с обеими условными вероятностями $P_B(A)$ и $P_{\overline{B}}(A)$. Этот результат — иллюстрация следующего предложения.

Теорема 2. *Если вероятности событий A и B отличны от нуля и единицы, то вероятность события A или совпадает с обеими условными вероятностями* $P_B(A)$ и $P_{\overline{B}}(A)$, *или не совпадает ни с одной из них.*

□ Пусть $P(A) = P_B(A)$. Нужно доказать, что тогда и $P_{\overline{B}}(A) = P(A)$. Нетрудно убедиться в том, что событие A и событие $AB + A\overline{B}$ — эквивалентные, а поэтому вероятности их совпадают: $P(A) = P(AB + A\overline{B})$. На основании теоремы сложения вероятностей далее получим $P(A) = P(AB) + P(A\overline{B})$. Применяя затем теорему умножения вероятностей, имеем

$$P(A) = P(B)\,P_B(A) + P(\overline{B})\,P_{\overline{B}}(A),$$

т. е.

$$P(\overline{B})\,P_{\overline{B}}(A) = P(A) - P(B)\,P_B(A).$$

Так как, по предположению, $P_B(A) = P(A)$, то $P(\overline{B}) P_{\overline{B}}(A) = P(A) - P(B) P(A) = P(A)[1 - P(B)] = P(A) P(\overline{B})$. Сокращая последнее равенство на $P(\overline{B}) \neq 0$, получим $P(A) = P_{\overline{B}}(A)$. Первая часть теоремы доказана. Справедливость второй части теоремы следует из первой. Действительно, если $P(A) \neq P_B(A)$, то $P_{\overline{B}}(A)$ не может совпадать с $P(A)$, поскольку тогда согласно первой части теоремы с $P(A)$ совпадала бы и $P_B(A)$. ■

Событие A будем называть *зависимым* от события B, если вероятность события A меняется при наступлении события B. Совершенно естественно называть событие A *не зависимым* от события B, если вероятность события A не изменяется при наступлении события B. Следовательно, если событие A не зависимо от события B, то $P(A) = P_B(A) = P_{\overline{B}}(A)$ (второе равенство имеет место в соответствии с только что доказанной теоремой). Однако независимость и зависимость событий обладают свойством взаимности, а именно справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Если событие A не зависимо от события B, то и B не зависимо от A. Если же событие A зависимо от события B, то и B зависимо от A.*

□ Из формул (1.7) следует, что $P(A) P_A(B) = P(B) P_B(A)$. Если событие A не зависимо от события B, то это равенство примет вид $P(A) P_A(B) = P(B) P(A)$, откуда, предполагая, что $P(A) \neq 0$, после сокращения на $P(A)$ получаем, что $P_A(B) = P(B)$, т. е. B не зависимо от A. Первая часть теоремы доказана. Если же событие A зависимо от события B, то B не может быть не зависимым от A, так как в силу первой части теоремы событие A было бы не зависимо от события B. ■

Поэтому вместо того, чтобы говорить о независимости события B от A или события A от B, можно просто говорить о независимости событий A и B. Аналогично можно говорить и о зависимости событий A и B.

События A и B называются *независимыми*, если вероятность одного из них не изменяется при наступлении другого. В противном случае события A и B называются *зависимыми*.

Независимость более чем двух событий может иметь различный характер.

События A, B, C,..., K называются *попарно независимыми*, если любые два из них независимы между собой.

События A, B, C,..., K называются *независимыми в совокупности*, если вероятность каждого из них не меняется при наступлении других событий (одного или нескольких в любой комбинации и в любом числе).

Независимость событий в совокупности является более сильным требованием, чем их попарная независимость.

На примере С. Н. Бернштейна* покажем, что три попарно независимых события могут не быть независимыми в совокупности.

В ящике имеются четыре билета с номерами 110, 101, 011, 000. Пусть события A, B, C состоят в том, что соответственно первая, вторая, третья цифра номе-

* С. Н. Бернштейн (1880—1968) — советский математик, академик.

ра наудачу вынутого билета есть 1. Каждому из них благоприятствуют по два случая из четырех. Следовательно, $P(A) = P(B) = P(C) = 0{,}5$. Если событие A произошло (вынут билет либо с номером 110, либо с номером 101), то вероятность события B по-прежнему равна 0,5 (ему благоприятствует один случай из двух): $P_A(B) = 0{,}5$, т. е. события A и B — независимые. Аналогично можно показать, что события A и C, а также B и C — попарно независимые. Если имели место события A и B, т. е. вынут билет с номером 110, то событие C становится невозможным, так как на третьем месте стоит нуль, а поэтому условная вероятность его $P_{AB}(C) = 0$. Следовательно, события A, B и C зависимы в совокупности, хотя они попарно независимы.

Теорема умножения вероятностей для двух независимых событий имеет более простой вид.

Теорема 4. *Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей.*

□ Если события A и B независимы, то $P_A(B) = P(B)$, а $P_B(A) = P(A)$ и формулы (1.7) принимают вид

$$P(AB) = P(A)P(B). \blacksquare \tag{1.8}$$

Пример 3. Считая вероятность безотказной работы станка в течение смены равной 0,9, найти вероятность безотказной работы двух станков в течение смены.

△ Считая события A и B, состоящие в безотказной работе в течение смены соответственно первого и второго станков, независимыми и применяя к ним теорему умножения вероятностей, получим $P(AB) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}81$. ▲

Выполнение равенства (1.8) является необходимым и достаточным условием независимости событий A и B, если вероятность хотя бы одного из них отлична от нуля и единицы. Рекомендуем доказать это самостоятельно.

Теорему умножения вероятностей легко обобщить на любое конечное число событий.

Теорема 5. *Вероятность произведения конечного числа событий равна произведению их условных вероятностей относительно произведения предшествующих каждому из них событий, т. е.*

$$P(ABC \ldots KL) = P(A)P_A(B)P_{AB}(C) \ldots P_{ABC \ldots K}(L), \tag{1.9}$$

где $P_{AB}(C)$ означает условную вероятность события C относительно произведения событий A и B; $P_{ABC \ldots K}(L)$ — условную вероятность события L относительно произведения событий $AB \ldots K$. Порядок событий в формуле (1.9) произволен.

Доказательство теоремы умножения вероятностей для любого конечного числа событий можно провести, применив метод математической индукции.

Если события $A, B, C, \ldots, K, L$ независимы в совокупности, то формула (1.9) упрощается и принимает вид

$$P(ABC \ldots KL) = P(A)P(B)P(C) \ldots P(L), \tag{1.10}$$

т. е. *вероятность произведения конечного числа независимых в совокупности событий равна произведению их вероятностей.*

Пример 4. На десяти карточках напечатаны цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Найти вероятность того, что три наудачу взятые и поставленные в ряд карточки составят число 125.

△ Искомое событие D произойдет, если первой будет взята карточка с цифрой 1 (событие A), вторая — с цифрой 2 (событие B), третья — с цифрой 5