ВМК

Н. С. КУКУШКИН, В. В. МОРОЗОВ

Теория неантагонистических игр

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА

Н. С. КУКУШКИН, В. В. МОРОЗОВ

Теория неантагонистических игр

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
1984

УДК 518.90

Кукушкин Н. С., Морозов В. В. Теория неантагонистических игр. М.: Изд-во МГУ, 1984. — 104 с.

В книге дано тщательно обработанное изложение ряда узловых вопросов теории игр. Изучаются ситуации равновесия в повторяющихся играх и мета-играх, принципы принятия коллективных решений. Основное внимание посвящено вопросам образования коалиции и кооперативной теории. Значительное место уделено принципу гарантированного результата (описание множеств достижимых векторов, исследование иерархических игр).

Для специалистов в области исследования операций.

Библиогр. 83 назв.

Рецензенты:
проф. *П. С. Краснощеков, Ф. И. Ерешко*

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Московского университета

НИКОЛАЙ СЕРАФИМОВИЧ КУКУШКИН,
ВЛАДИМИР ВИКТОРОВИЧ МОРОЗОВ

Теория неантагонистических игр

Заведующий редакцией *С. И. Зеленский.* Редактор *О. В. Семененко.* Мл. редактор *В. Н. Зуева.* Художественный редактор *Б. С. Вехтер.* Обложка художника *Н. Н. Сенько.* Технический редактор *В. И. Овчинникова.* Корректоры *И. А. Мушникова, Т. С. Милякова*

ИБ № 1850.
Тематический план 1984 г. № 88

Сдано в набор 22.06.83. Подписано к печати 04.06.84. Л-78943. Формат 84×108/32. Бумага тип. № 3. Усл. печ. л. 5,46. Уч.-изд. л. 5,45. Изд. № 2591. Зак. 144. Тираж 2620 экз. Цена 80 коп.
Ордена «Знак Почета» издательство Московского университета. 103009, Москва, ул. Герцена, 5/7. Типография ордена «Знак Почета» изд-ва МГУ. Москва, Ленинские горы

$$К\frac{1502000000-267}{077(02)-84}\,88-84$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие написано на основе курса лекций, читавшегося авторами на факультете ВМК МГУ в 1974—1980 гг., и представляет собой результат существенной переработки ротапринтного издания, вышедшего в издательстве МГУ под тем же названием в 1977 году.

Предполагается, что читатель уже знаком с основными понятиями теории игр (нормальная и развернутая формы игры, верхняя и нижняя цены антагонистической игры, седловая точка, ситуация равновесия и т. п.). Основное внимание в курсе уделяется вопросам, недостаточно освещенным в учебной (а подчас, и монографической) литературе.

В первой главе, написанной В. В. Морозовым, изучаются вопросы образования в игре фиксированной коалиции, а также основы кооперативной теории.

Во второй главе, написанной Н. С. Кукушкиным, исследуется влияние взаимной информированности игроков на множество ситуаций равновесия и на иерархические решения. Объединение этих, в сущности разнородных тем связано с единством применяемой в этой главе математической техники.

Приведем список основных обозначений, используемых в книге.

R^n — n-мерное евклидово пространство векторов $a=(a_1, ..., a_n)$; $R_+{}^n=\{a\in R^n \mid a_i\geqslant 0,\ i=\overline{1,\ n}\}$;

$\bar{B}$ — топологическое замыкание множества B;

$\operatorname{int} B$ — внутренность множества B;

$\operatorname{diam} B$ — диаметр множества B;

$\operatorname{co} B$ — выпуклая оболочка множества B;

2^B — множество всех подмножеств множества B; $B^k = B \times B \times \ldots \times B$ (k раз).

Если функция f определена на множестве B, то

$$\operatorname{Argmax}_{x \in B} f(x) = \{x \in B \mid f(x) = \max_{y \in B} f(y)\},$$

$$\operatorname{Argmin}_{x \in B} f(x) = \{x \in B \mid f(x) = \min_{y \in B} f(y)\},$$

$\Gamma = \langle X_i, f_i, i \in I \rangle$ — игра в нормальной форме с множеством игроков $I = \{1, 2, \ldots, n\}$.

$v : 2^I \setminus \varnothing \to R^1$ — характеристическая функция игры.

Если $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X = \times \prod_{i=1}^{n} X_i$ и $x_i^* \in X_i$, то

$$x \| x_i^* = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i^*, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Если S — непустое подмножество множества игроков I и $a \in R^n$, то $a(S) = \sum_{i \in S} a_i$, $a_S = (a_i, i \in S)$, $|S|$ — число игроков в S.

■ — конец доказательства.

Кроме того, будут использованы следующие соглашения:

$$\max_{x \in \varnothing} f(x) = \sup_{x \in \varnothing} f(x) = -\infty,$$

$$\min_{x \in \varnothing} f(x) = \inf_{x \in \varnothing} f(x) = +\infty.$$

Области изменения переменных $x, x_i, \tilde{x}_i, p$ и т. п. будут указываться явно лишь в том случае, когда они отличаются от, соответственно $X, X_i, \tilde{X}_i, P, \ldots$. Например, $\{x \mid \max f(x, y) = 0\}$ означает $\{x \in X \mid \max_{y \in Y} f(x, y) = 0\}$.

Глава I

ПРИНЦИПЫ ПРИНЯТИЯ КОЛЛЕКТИВНЫХ РЕШЕНИЙ

§ 1. ИГРА МНОГИХ ЛИЦ В НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Пусть имеется n принимающих решения субъектов, называемых игроками, с номерами $i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$. Каждый игрок i выбирает стратегию x_i, принадлежащую множеству стратегий X_i. Набор стратегий всех игроков $x = (x_1, \ldots, x_n)$ называется ситуацией. Интересы игрока i на множестве X всех ситуаций задаются с помощью функции выигрыша $f_i : X \to R^1$. Функция f_i определяет отношение предпочтения игрока i на множестве X: ситуация x лучше ситуации x' для игрока i тогда и только тогда, когда $f_i(x) > f_i(x')$. Игра Γ в нормальной форме задается набором $\Gamma = \langle X_i, f_i, i \in I \rangle$. Множество $f(X)$, где $f = (f_1, \ldots, f_n)$, называется множеством исходов игры.

В теории игр с разными целями рассматриваются расширения игры Γ.

Определение 1.1. Игра $\tilde{\Gamma} = \langle \tilde{X}_i, \tilde{f}_i, i \in I \rangle$ называется расширением игры Γ, если для каждого i существуют подмножество $Y_i \subset \tilde{X}_i$ и взаимно-однозначное отображение $c_i : X_i \to Y_i$ такие, что

$$\tilde{f}_i(c_1(x_1), \ldots, c_n(x_n)) = f_i(x_1, \ldots, x_n)$$

для всех $x_i \in X_i$, $i = \overline{1, n}$.

Известный способ расширения игры состоит в использовании игроками смешанных стратегий. Смешанным расширениям игр посвящена обширная литература (см., например, [1—7]), и здесь они рассматриваться не будут. В качестве другого примера расширения определим понятие сверхигры [8], представляющей собой бесконечную последовательность повторений игры Г.

Пусть t — номер повторения игры Г, $t=1, 2, \ldots$. В момент t игрок i выбирает $x_i^t \in X_i$, зная выборы всех игроков на предыдущих повторениях. Определим стратегии игроков в сверхигре. Положим

$$x^t = (x_1^t, \ldots, x_n^t), \ \overline{x^t} = (x^1, \ldots, x^t).$$

Отображения

$$\tilde{x}_i^1 = x_i^1, \ \tilde{x}_i^t : X^{t-1} \to X_i, \ \tilde{x}_i^t(\overline{x}^{t-1}) \in X_i,$$

$t=2, 3, \ldots$, определяют поведение игрока i во всех повторениях игры Г. Поэтому стратегией игрока i в сверхигре является последовательность отображений

$$\tilde{x}_i = (\tilde{x}_i^t, \ t = 1, 2, \ldots) \in \tilde{X}_i,$$

где $\tilde{X}_i$ — множество всех стратегий игрока i в сверхигре. Каждая ситуация $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ сверхигры однозначно порождает последовательность $\sigma(\tilde{x}) = \bar{x} = (x^t, t=1, 2, \ldots)$, называемую партией сверхигры, по следующему правилу:

$$x^1 = (\tilde{x}_1^1, \ldots, \tilde{x}_n^1), \ x^2 = (\tilde{x}_1^2(x^1), \ldots, \tilde{x}_n^2(x^1)) \text{ и т. д.}$$

Определим функции выигрыша игроков в сверхигре. Предположим, что функции выигрыша в игре Г ограничены по модулю константой $L: |f_i(x)| \leqslant L$ для всех $x \in X$, $i=\overline{1, n}$. Пусть для каждого игрока i имеется последовательность неотрицательных чисел $d_i = (d_i^t, t=1, 2, \ldots)$, $d_i^1 > 0$, $d_i^t \geqslant 0$, $t=2, 3, \ldots$. Определим функцию выигрыша игрока i в сверхигре следующим образом:

$$F_i(\tilde{x}) = \varliminf_{t \to \infty} \left(\sum_{\tau=1}^{t} d_i^\tau f_i(x^\tau)\right) \left(\sum_{\tau=1}^{t} d_i^\tau\right)^{-1}, \qquad (1.1)$$

где $\sigma(\tilde{x}) = \bar{x} = (x^\tau, \tau=1, 2, \ldots)$. Обозначим сверхигру через $\tilde{\Gamma}(d)$, где $d = (d_1, \ldots, d_n)$. Сверхигра $\tilde{\Gamma}(d)$ в нормальной форме имеет вид

$$\tilde{\Gamma}(d) \doteq \langle \tilde{X}_i, F_i, i \in I \rangle$$

Обсудим подробнее функции выигрыша F_i. Если последовательность d_i невозрастающая и ряд $\sum_{t=1}^{\infty} d_i^t$ сходится, то ряд $\sum_{t=1}^{\infty} d_i^t f_i(x^t)$ также сходится и

$$F_i(\tilde{x}) = \Big(\sum_{t=1}^{\infty} d_i^t f_i(x^t)\Big)\Big(\sum_{t=1}^{\infty} d_i^t\Big)^{-1}.$$

В этом случае коэффициенты d_i^t можно интерпретировать как коэффициенты дисконтирования, отражающие степень уменьшения игроком i будущих выигрышей при принятии решений перед началом сверхигры. Отметим, что с помощью (1.1) можно задать функции выигрыша игроков в игре, представляющей собой T повторений игры Г. Для этого достаточно положить $d_i^t=0$, $t=T+1$ $T+2, \ldots$. Если ряд $\sum_{t=1} d_i^t$ расходится, то $F_i(\tilde{x})$ в (1.1) можно рассматривать как нижний предел средних выигрышей игрока i за t повторений игры Г. Сверхигра $\tilde{\Gamma}(d)$ с $d_i^t = 1$, $t=1, 2, \ldots, i=\overline{1, n}$ впервые исследовалась Р. Ауманом в [8]. Систематическое изучение сверхигр с функциями выигрыша игроков (1.1) проведено А. А. Васиным в [9]. Нетрудно проверить, что сверхигра $\tilde{\Gamma}(d)$ является расширением игры Г. Действительно, в качестве множества $Y_i \subset \tilde{X}_i$ из определения 1.1 следует взять совокупность всех стратегий игрока i вида $\tilde{x}_i = (\tilde{x}_i^t,\ t=1, 2, \ldots)$, где $\tilde{x}_i^t = x_i \in X_i$, $t=1, 2, \ldots$.

Во второй главе изучаются информационные расширения игры Г, описывающие обмен информацией между игроками.

§ 2. *СИТУАЦИИ РАВНОВЕСИЯ*

Определение 2.1. Ситуация x^0 называется ситуацией равновесия [10], если

$$\max_{x_i} f_i(x^0 \| x_i) = f_i(x^0),\ i = \overline{1, n}.$$

Множество всех ситуаций равновесия игры Г обозначим через $E(\Gamma)$. В антагонистической игре ($n=2$, $f_1=-f_2$) понятие ситуации равновесия совпадает с понятием седловой точки функции f_1 на произведении $X_1 \times X_2$, компоненты седловой точки являются оптимальными стратегиями, реализующими максимин и минимакс функции f_1, а выигрыши игрока в разных седловых точках одинаковы. В неантагонистических играх, как правило, встречается более сложная картина. В качестве примера рассмотрим следующую биматричную игру:

$$\begin{matrix} (7,\ 4) & (3.\ 3) \\ (0,\ 0) & (4,\ 7) \end{matrix}$$

(считаем, что строку выбирает игрок 1, столбец — игрок 2, первое число в скобках — выигрыш игрока 1, второе — игрока 2). В этой игре существуют две ситуации равновесия: (первая строка, первый столбец) и (вторая строка, второй столбец). Для каждого игрока выигрыши в этих ситуациях различны, а оптимальные стратегии игроков не составляют ситуации равновесия. Поэтому здесь, в отличие от антагонистических игр, игрокам трудно независимыми выборами стратегий реализовать в игре ситуацию равновесия. С целью устранения подобных затруднений рассмотрим следующий способ проведения игры Г. Вначале все игроки договариваются о некоторой ситуации $x^0 \in E(\Gamma)$, затем дальнейшие переговоры запрещаются, и игроки выбирают стратегии независимо друг от друга. В силу определения 2.1 одному игроку i отклоняться от стратегии x_i^0 не имеет смысла. Игра Г, проводимая таким образом, называется бескоалиционной [10]. В дальнейшем всюду предполагается, что функции f_i, $i=\overline{1, n}$, непрерывны на метрическом компакте X.

Нетрудно видеть, что ситуации равновесия являются решениями следующей оптимизационной задачи [11]:

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} [f_i(x) - \max_{y_i} f_i(x \| y_i)] \to \max_{x \in X}.$$

Здесь максимальное значение функции Φ на множестве X равно нулю тогда и только тогда, когда в игре существует ситуация равновесия. Однако решение этой задачи в большинстве случаев связано с трудностями.

Для ряда классов бескоалиционных игр доказано существование ситуации равновесия. Приведем типичный результат для класса игр, выделяемого топологическими свойствами множеств X_i и функций f_i.

Теорема 2.1. Пусть в игре Γ множества X_i, $i=\overline{1,n}$, — выпуклые компакты евклидовых пространств, а функции f_i, $i=\overline{1,n}$, непрерывны на X и вогнуты по x_i на X_i при любых фиксированных значениях остальных переменных. Тогда в игре Γ существует ситуация равновесия.

Доказательство теоремы 2.1 (см., например, [2]) использует теорему Брауэра о неподвижной точке и не дает способа нахождения ситуации равновесия. Интерес представляют такие классы бескоалиционных игр, в которых ситуации равновесия можно выписать в явном виде. В качестве примера рассмотрим ситуации равновесия в сверхиграх, определенных в § 1.

Будем говорить, что партия $\bar{x}^0$ уравновешивается в сверхигре $\tilde{\Gamma}(d)$, если найдется ситуация $\tilde{x}^0 \in E(\tilde{\Gamma}(d))$ такая, что $\sigma(\tilde{x}^0)=\bar{x}^0$. Пусть $\bar{v}(i) = \min\limits_{\substack{x_j \\ j\neq i}} \max\limits_{x_i} f_i(x)$. Докажем следующее утверждение [12, 13].

Теорема 2.2. Для того чтобы партия $\bar{x}^0$ была уравновешена в сверхигре $\tilde{\Gamma}(d)$, необходимо и достаточно, чтобы при всех $k=1, 2, \ldots, i=\overline{1,n}$ выполнялись неравенства

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sum\limits_{\tau=1}^{k-1} d_i^\tau f_i(x^{0\tau}) + d_i^k \max\limits_{x_i} f_i(x^{0k} \| x_i) + \bar{v}(i) \sum\limits_{\tau=k+1}^{t} d_i^\tau}{\sum\limits_{\tau=1}^{t} d_i^\tau} \leqslant F_i(\bar{x}^0). \tag{2.1}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть для некоторой ситуации равновесия $\tilde{x}^0$ сверхигры $\tilde{\Gamma}(d)$ $\sigma(\tilde{x}^0)=\bar{x}^0$ и неравенство (2.1) нарушено при $i=i_1$, $k=k_1$. Определим стратегию $\widetilde{x}_{i_1} = (\widetilde{x}_{i_1}^t,\ t = 1, 2, \ldots)$ игрока i_1 в сверхигре следующим образом:

$$\widetilde{x}_{i_1}^t(\overline{x}^{t-1}) = \begin{cases} \widetilde{x}_{i_1}^{0t}(\overline{x}^{t-1}), & t \leqslant k_1 - 1\ (k_1 > 1), \\ x'_{i_1} \in \operatorname*{Argmax}_{x_{i_1}} f_{i_1}(\widetilde{x}^{0t}(\overline{x}^{t-1}) \| x_{i_1}), & t \geqslant k_1. \end{cases}$$

Выигрыш $F_{i_1}(\widetilde{x}^0 \| \widetilde{x}_{i_1})$ игрока i_1 в ситуации $\widetilde{x}^0 \| \widetilde{x}_{i_1}$ сверхигры не меньше, чем левая часть неравенства (2.1) при $i = i_1$, $k = k_1$, и, следовательно, строго больше, чем $F_{i_1}(\overline{x}^0) = F_{i_1}(\widetilde{x}^0)$, что противоречит определению ситуации равновесия.

Достаточность. Пусть для партии $\overline{x}^0$ выполнены неравенства (2.1). Возьмем

$$z(i) = (z_j(i),\ j \neq i) \in \operatorname*{Argmin}_{\substack{x_j \\ j \neq i}} \max_{x_i} f_i(x).$$

Определим ситуацию $\widetilde{x}^0 = (\widetilde{x}_j^0,\ j = \overline{1, n}) : \widetilde{x}_j^{01} = x_j^{01}$,

$$\widetilde{x}_j^{0t}(\overline{x}^{t-1}) = \begin{cases} x_j^{0t}, & \overline{x}^{t-1} = \overline{x}^{0t-1}, \\ z_j(i), & \overline{x}^{t-1} \neq \overline{x}^{0t-1}, \quad t = 2, 3, \ldots, \end{cases}$$

где i — номер игрока, для которого неравенство $x_i^k \neq x_i^{0k}$ выполнено с наименьшим k. Ясно, что $\sigma(\tilde{x}^0) = \bar{x}^0$. Покажем, что $\tilde{x}^0$ — ситуация равновесия игры $\widetilde{\Gamma}(d)$. Пусть игрок i использует стратегию $\tilde{x}_i \neq \tilde{x}_i^0$, а остальные игроки придерживаются стратегий $\tilde{x}_j^0$, $j \neq i$. Тогда при некотором k $\overline{x}^{k-1} = \overline{x}^{0k-1}$ (если $k \geqslant 2$),

$$\widetilde{x}_i^k(\overline{x}^{0k-1}) \neq x_i^{0k},\quad \widetilde{x}_j^{0k}(\overline{x}^{0k-1}) = x_j^{0k},\quad j \neq i.$$

Из определения ситуации $\tilde{x}^0$ следует, что, начиная с момента $k+1$, выигрыши игрока i при каждом повторении игры Г не превзойдут $\bar{v}(i)$. Отсюда и из (2.1) вытекает, что выигрыш игрока i в сверхигре $\Gamma(d)$ не превзойдет $F_i(\tilde{x}^0)$. ∎

Если ряд $\sum\limits_{t=1}^{\infty} d_i^t$ расходится, то условие (2.1) перепишется в виде

$$\bar{v}(i) \leqslant F_i(\bar{x}^0).$$

Если для некоторой константы c $(0<c<1)$ $d_i^t = c^{t-1}$ и $\bar{x}^0 = (x^0, x^0, \ldots)$, то нетрудно проверить, что неравенства (1.4) равносильны неравенствам

$$c\bar{v}(i) - f_i(x^0) \leqslant -(1-c)\max_{x_i} f_i(x^0 \| x_i), \quad i = \overline{1, n}.$$

Ситуации равновесия в информационных расширениях изучаются во второй главе.

§ 3. КОАЛИЦИИ В ИГРЕ МНОГИХ ЛИЦ

Рассмотрим пример [14].

Пример 3.1. Пусть

$$f_i(x) = x_i + \sum_{j \neq i} (1 - x_j), \quad x_i \in X_i = [0, 1], \quad i = \overline{1, n}.$$

Здесь $x^0 = (1, \ldots, 1)$ является единственной ситуацией равновесия и $f_i(x^0) = 1$, $i = \overline{1, n}$. Но в ситуации $x^* = (0, \ldots, 0)$ $f_i(x^*) = n - 1$, $i = \overline{1, n}$, и при $n \geqslant 3$ для всех игроков ситуация x^* выгоднее, чем x^0. Ситуацию x^* можно осуществить, если все игроки договорятся о ней и во время игры не будут нарушать этой договоренности. Из примера 3.1 видна целесообразность рассмотрения коалиционных действий без нарушений игроками достигнутых договоренностей, которым посвящены § 3 и 4. В данном параграфе обсуждается вопрос об образовании в игре фиксированной коалиции. В следующем параграфе излагаются основы кооперативной теории.

Предположим, что в игре $\Gamma = \langle X_i, f_i, i \in I \rangle$ игроки имеют возможность заключать соглашения о своем поведении. Пусть $S \subset I$ — некоторое множество игроков, участвующих в игре. Под коалицией S мы будем понимать множество игроков S, которые договорились действовать совместно. При этом множество игроков и коалицию будем обозначать одной и той же буквой, что не должно привести к недоразумениям. В данном параграфе изучаются возможности (в смысле выигрышей) и поведение игроков в фиксированной коалиции S. После образования коалиции S множество ее стратегий, вообще говоря, меняется по сравнению с $\times \prod_{i \in S} X_i$. Это изменение может быть связано с увеличением возможностей коалиции. Например, в коалиции игроки могут перераспределять свои ресурсы и осуществлять побочные платежи. Пусть P — множество стратегий p коалиции S. Игроки, не входящие в коалицию S, могут действовать разнообразно и, в частности, образовывать другие коалиции. Пусть Q — множество стратегий q игроков, не входящих в коалицию S. Функции выигрыша игроков коалиции должны быть определены на произведении $P\times Q$, $f_i: P\times Q\to R^1$, $i\in S$. Аналогичные функции выигрыша можно было бы выписать для остальных игроков. Но здесь мы будем рассматривать упрощенную постановку задачи, считая, что функции выигрыша остальных игроков для коалиции S неизвестны. Таким образом, игра коалиции S против остальных игроков задается набором $\Gamma_S=\langle P, Q, f_i, i\in S\rangle$. Рассмотрим несколько примеров игр Γ_S. Для произвольных $u=(u_1, \ldots, u_n)$ и $S\subset I$ обозначим $u_S=(u_i, i\in S)$, $u(S)=\sum\limits_{i\in S} u_i$, $|S|$ — число игроков в S.

Пример 3.2. $p=x_S\in P=\times\prod\limits_{i\in S} X_i$,

$$q=x_{I\setminus S}\in Q=\times\prod_{i\in I\setminus S} X_i,\ f_i(p, q)=f_i(x),\ i\in S.$$

Пример 3.3. Пусть в игре Γ каждый игрок i имеет в своем распоряжении бесконечно-делимый ресурс в количестве r_i. Стратегией игрока i является использование ресурса в количестве $x_i\in X_i=[0, r_i]$. Пусть функция выигрыша f_i игрока i зависит только от количества x_i используемого им ресурса. Предположим, что в коалиции игроки могут перераспределять ресурс между собой. Тогда $P=\{p=x_S \mid x(S)\leqslant r(S),\ x_i\geqslant 0, i\in S\}$ представляет собой множество стратегий коалиции S. Нетрудно видеть, что это множество строго содержит $\times\prod\limits_{i\in S} X_i$. Каково будет множество стратегий Q, для коалиции в данном случае безразлично, так как функции f_i, $i\in S$ не зависят от стратегий игроков, не входящих в коалицию.

Пример 3.4. Рассмотрим коалицию с побочными платежами. Пусть в игре Γ функции выигрыша f_i игроков коалиции S положительны и выплата выигрышей осуществляется в количествах бесконечно-делимого и свободно-передаваемого между игроками товара (примером такого товара может служить золото). Игроки после получения выигрышей $f_i(x)$ могут осуществлять побочные платежи, т. е. передавать части товара между собой. Опишем множество стратегий P коалиции с побочными платежами. Положим $D=\{w_S=f_S(x)\,|\,x\in X\}$, $Z=\{z_S\,|\,z(S)=0\}$, где $f_S(x)=(f_i(x),\ i\in S)$. Обозначим через $\tilde{Z}$ множество отображений $\tilde{z}_S: D\to Z$, удовлетворяющих условию

$$-f_i(x)\leqslant \tilde{z}_i(f_S(x)),\ i\in S,\ x\in X. \qquad (3.1)$$

По смыслу отображение $\tilde{z}_S\in\tilde{Z}$ является стратегией, осуществляющей побочные платежи между членами коалиции S. Условие (3.1) означает, что игрок не может отдать больше того, что он получил в игре. Стратегией коалиции с побочными платежами является $p=(x_S, \tilde{z}_S)\in P=\times\prod\limits_{i\in S} X_i\times\tilde{Z}$. В качестве стратегии других игроков можно взять $q=x_{I\setminus S}\in Q=\times\prod\limits_{i\in I\setminus S} X_i$. Функция выигрыша игрока i коалиции имеет вид

$$f_i(p, q)=f_i(x)+\tilde{z}_i(f_S(x)).$$

Теперь поставим следующий вопрос: на какие выигрыши могут рассчитывать игроки, вступая в коалицию S? Введем понятие вектора, достижимого для коалиции [15, 16].

Определение 3.1. Вектор w_S называется достижимым (α-достижимым) для коалиции S, если найдется стратегия $p\in P$ такая, что для любой стратегии $q\in Q$ $f_i(p, q)\geqslant w_i$, $i\in S$.

При этом стратегию p, обеспечивающую каждому игроку i коалиции выигрыш, не меньший w_i, будем называть стратегией, гарантирующей вектор w_S. Множество V_S всех достижимых для коалиции векторов является аналогом нижнего значения антагонистической игры.

Часто используется также понятие β-достижимого вектора.

Определение 3.2. Вектор w_S называется β-достижимым для коалиции S, если для всякой стратегии $q\in Q$

найдется стратегия $p\in P$ коалиции такая, что $f_i(p, q)\geqslant w_i$, $i\in S$. Если коалиция S будет иметь информацию о стратегиях других игроков, то она в состоянии реализовать любой β-достижимый вектор. Множество U_S всех β-достижимых для коалиции S векторов является аналогом верхнего значения антагонистической игры. Условия совпадения множеств V_S и U_S рассматривались в [16, 17].

Чтобы проверить достижимость заданного вектора w_S, в общем случае необходимо найти величину

$$\gamma = \max_p \min_q \min_{i\in S} (f_i(p, q) - w_i).$$

Вектор w_S достижим для коалиции S тогда и только тогда, когда $\gamma\geqslant 0$. Однако в частных случаях существуют более удобные способы проверки достижимости заданного вектора. Приведем примеры. Пусть в примере 2.3 f_i, $i\in S$ — неотрицательные, возрастающие и непрерывные функции на отрезке $[0, r(S)]$. Нетрудно доказать, что $V_S=\{w_S|\ \exists\, w'_S$:

$$\sum_{i\in S} f_i^{-1}(w'_i) \leqslant r(S),\ w'_i \geqslant \max[0; w_i],\ i\in S\}.$$

Здесь для проверки достижимости вектора w_S достаточно для вектора $w'_S : w'_i=\max[0; w_i]$, $i\in S$, проверить неравенство $\sum\limits_{i\in S} f_i^{-1}(w'_i) \leqslant r(S)$. Пусть теперь S — коалиция с побочными платежами из примера 2.4. Положим $v(S) = \max\limits_{x_S} \min\limits_{x_{I\setminus S}} \sum\limits_{i\in S} f_i(x)$.

Теорема 3.1. Для коалиции S с побочными платежами множество достижимых векторов представимо в виде

$$V_S=\{w_S|\, w(T)\leqslant v(S),\quad \forall\, T\subset S\}.$$

Доказательство. Пусть вектор w_S достижим. Тогда существует стратегия $p=(x_S, \tilde{z}_S)$ коалиции такая, что для любой стратегии $q=x_{I\setminus S}$ выполнены неравенства

$$w_i \leqslant f_i(p, q) = f_i(x) + \tilde{z}_i(f_S(x)),\ i\in S.$$

Отсюда,

$$w(T) \leqslant \sum_{i \in T} (f_i(x) + \tilde{z}_i(f_S(x))) =$$

$$= \sum_{i \in T} f_i(x) - \sum_{i \in S \setminus T} \tilde{z}_i(f_S(x)) \leqslant \sum_{i \in S} f_i(x).$$

Следовательно, $w(T) \leqslant v(S)$.

Обратно, пусть вектор w_S таков, что $w(T) \leqslant v(S)$ для всех $T \subset S$. Без ограничения общности можно считать, что $w_i \geqslant 0$; $i \in S$. В самом деле, неотрицательный вектор w'_S: $w'_i = \max[0; w_i]$, $i \in S$, удовлетворяет тем же ограничениям ($w'(T) \leqslant v(S)$ при всех $T \subset S$), и если вектор w'_S достижим, то вектор w_S также достижим для коалиции S. Поскольку $w(S) \leqslant v(S)$,

$$\text{для } x_S^0 \in \operatorname{Argmax}_{x_S} \min_{x_{I \setminus S}} \sum_{i \in S} f_i(x)$$

$$\sum_{i \in S} f_i(x_S^0, x_{I \setminus S}) \geqslant w(S)$$

при всех $x_{I \setminus S}$. Определим $\tilde{z}_S^0$ следующим образом:

$$\tilde{z}_i^0(f_S(x)) = w_i - f_i(x) + \Big(\sum_{i \in S} f_i(x) - w(S)\Big) |S|^{-1}, \quad i \in S,$$

$$\text{если} \sum_{i \in S} f_i(x) \geqslant w(S) \text{ и } \tilde{z}_i^0(f_S(x)) = 0, \quad i \in S,$$

в противном случае. Нетрудно видеть, что

$$\sum_{i \in S} \tilde{z}_i^0(f_S(x)) = 0 \text{ и } \tilde{z}_i^0(f_S(x)) \geqslant -f_i(x), \quad i \in S,$$

при всех $x \in X$. Из определения x_S^0 и $\tilde{z}_S^0$ вытекает, что

$$f_i(x_S^0, x_{I \setminus S}) + \tilde{z}_i^0(f_S(x_S^0, x_{I \setminus S})) \geqslant w_i, \quad i \in S.$$

Следовательно, стратегия $p^0 = (x^0{}_S, \tilde{z}^0_S)$ гарантирует коалиции S вектор w_S. ■

После того как найдена величина $v(S)$, проверка достижимости вектора w_S для коалиции S сводится к проверке выполнения для w_S линейных неравенств.

Определим понятие стратегической эквивалентности игр вида Γ_S. Рассмотрим игру $\Gamma'_S = \langle P, Q, f_i'(p, q), i \in S \rangle$, отличающуюся от игры Γ_S лишь функциями выигрыша игроков.