И.И. Гихман
А.В. Скороход
М.И. Ядренко

Теория вероятностей и математическая статистика

И. И. ГИХМАН
А. В. СКОРОХОД
М. И. ЯДРЕНКО

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования УССР в качестве учебника для студентов математических специальностей университетов и технических вузов

Киев
Головное издательство издательского объединения
«Вища школа»
1979

ББК22.17
517.8
Г51

УДК 519.2(075.8)

Теория вероятностей и математическая статистика. Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. Киев, Издательское объединение «Вища школа», Головное изд-во, 1979, 408 с.

В учебнике изложены основные сведения по теории вероятностей, теории случайных процессов, математической статистике. Приведены определения вероятностного пространства, случайной величины, математического ожидания, условной вероятности и условного математического ожидания, доказаны теоремы о законе больших чисел, центральная предельная теорема. Рассмотрены процессы восстановления, случайные блуждания, цепи Маркова со счетным множеством состояний, стационарные процессы (в том числе обобщенные). Определены основные задачи математической статистики, изложены методы проверки статистических гипотез и теория оценивания параметров вероятностных распределений. Рассматривается большое количество примеров и задач, иллюстрирующих основные понятия, а также поясняющих возможные практические применения доказанных теорем.

Рассчитан на студентов механико-математических факультетов университетов, факультетов прикладной математики и кибернетики технических вузов, физико-математических факультетов педагогических институтов.

Табл. 6. Ил. 18. Список лит.: 12 назв.

Редакция литературы по математике и физике
Зав. редакцией *Е. Л. Корженевич*

Г $\dfrac{20203\text{—}085}{М211(04)\text{—}79}$ 117—79 1702060000

Глава I

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

§ 1. Стохастический эксперимент, случайные события

Стохастический эксперимент, пространство элементарных событий. Исходными понятиями теории вероятностей являются понятия стохастического эксперимента, случайного события и вероятности случайного события. *Стохастическими называются эксперименты, результаты которых нельзя предугадать заранее.*

В основе распространенного в настоящее время теоретико-множественного метода изложения теории вероятностей, который принят и в нашей книге, лежит предположение, что рассматриваемому эксперименту поставлено в соответствие некоторое множество Ω, точки которого изображают наиболее полную информацию о предполагаемых результатах в данном эксперименте. Множество Ω называют пространством элементарных событий, а его точки — элементарными событиями.

ПРИМЕРЫ

1. Производится эксперимент: один раз бросают монету. Пространство элементарных событий этого эксперимента имеет вид $\Omega = \{\text{Г}, \text{Р}\}$, где буква Г означает появление герба, буква Р — появление решки.

2. Монету бросают дважды. Пространством элементарных событий этого эксперимента является множество

$$\Omega = \{\text{ГГ}, \text{ГР}, \text{РГ}, \text{РР}\}.$$

Здесь ГР означает, например, что при первом бросании появился герб, а при втором — решка.

3. Бросают шестигранную игральную кость, на которой выбиты очки от 1 до 6. Нас интересует число выпавших очков. Пространством элементарных событий здесь может быть множество, состоящее из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6.

4. Игральную кость бросают m раз подряд. В качестве пространства элементарных событий можно рассматривать множество всех m-мерных векторов вида $(i_1, i_2, \ldots, i_m)$, где каждая компонента i_k принимает значения 1, 2, 3, 4, 5, 6.

В рассмотренных выше примерах пространство элементарных событий было конечным множеством. Однако во многих задачах теории вероятностей приходится иметь дело с экспериментами, имеющими бесконечное число возможных исходов.

ПРИМЕРЫ

1. Предположим, что монету бросают до первого появления герба. Пространством элементарных событий такого эксперимента является множество

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots; \omega_\infty\},$$

где $\omega_n = \underbrace{\text{Р} \ldots \text{Р}}_{(n-1)\text{ раз}}\text{Г}$ означает, что герб впервые появится при n-м бросании монеты, а ω_∞ соответствует той возможности, что герб никогда не появится (в этом случае наш эксперимент продолжается бесконечно долго).

2. Стрелок стреляет по круглой мишени, и нас интересует точка, в которую попала пуля. В качестве пространства элементарных событий можно принять множество, состоящее из рассматриваемого круга K и одной дополнительной точки θ, обозначающей непопадание стрелка в мишень.

3. З а д а ч а о в с т р е ч е. Два лица A и B условились встретиться в интервале времени $[0, T]$. Если через x обозначим время прихода A, а через y время прихода B, то пространством элементарных событий будет множество

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant T,\ 0 \leqslant y \leqslant T\}.$$

4. Установлен автоматически работающий прибор, вычерчивающий график скорости ветра в данной точке атмосферы в течение данного отрезка времени $[T_1, T_2]$. Пространством элементарных событий может быть множество всех неотрицательных функций, заданных на отрезке времени $[T_1, T_2]$ и имеющих, скажем, только конечное число разрывов первого рода.

5. Наблюдается частица, совершающая броуновское движение. Пространство элементарных событий — множество всех возможных траекторий частицы.

Случайные события — подмножества в пространстве элементарных событий. Говоря об эксперименте в теории вероятностей, мы не интересуемся его технической стороной, а только тем, какие события в этом эксперименте могут наблюдаться и что в результате проведенного эксперимента действительно наблюдалось. Таким образом, с каждым экспериментом связывают некоторое множество событий, о которых можно судить, осуществилось ли оно в данном эксперименте или нет. Такие события называют н а б л ю д а е м ы м и в д а н н о м э к с п е р и м е н т е.

Если в эксперименте примера 4 нас интересует, превысила ли скорость ветра 10 м/сек, то это событие наблюдаемо. Если же по графику скорости ветра мы захотим судить, попал ли данный стрелок в мишень в примере 2, то сделать этого мы не сможем. Это событие ненаблюдаемо в эксперименте примера 4.

Пусть A — произвольное наблюдаемое в данном эксперименте событие. Поскольку каждое элементарное событие ω дает полную информацию о результате эксперимента, то зная, что результат эксперимента описывается точкой ω, всегда можно сказать, произошло ли A или нет. Таким образом, по отношению к событию A все пространство элементарных событий Ω можно разбирать на два дополнительных множества A' и A'' ($A' \in \Omega$, $A'' \in \Omega$, $A' \cup A'' = \Omega$) так, что, если результат эксперимента описывается точкой ω из множества A', то событие A в этом эксперименте произошло, если же $\omega \in A''$, то событие A не произошло. *Точки ω из множества A называют элементарными событиями, благоприятствую-*

щими событию A. Говорят, что множество A' является **отражением** или **интерпретацией события** A во множестве Ω.

Следующий этап в построении теоретико-множественной модели теории вероятностей состоит в отождествлении события A и множества A', $A \equiv A'$.

Итак, в дальнейшем событие A — это некоторое подмножество Ω, состоящее из всех тех точек ω — элементарных событий, — которые благоприятствуют событию A. Если результат эксперимента описывается точкой ω и ω входит в A, то в данном эксперименте событие A произошло, если же $\omega \overline{\in} A$, то событие A в этом эксперименте не произошло.

ПРИМЕРЫ

1. Пусть монету бросают дважды и A — событие, состоящее в том, что хотя бы один раз появится герб. Тогда

$$\Omega = \{ГГ, ГР, РГ, РР\},$$
$$A = \{ГГ, ГР, РГ\}.$$

2. Предположим, что один раз бросают игральный кубик и A — событие, состоящее в том, что число появившихся очков делится на 3. Тогда

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$
$$A = \{3, 6\}.$$

3. Предположим, что монету бросают до первого появления герба (пример 1, с. 4). Пусть A — событие, состоящее в том, что будет сделано не больше трех бросаний. Тогда

$$A = \{Г, РГ, РРГ\}.$$

4. Рассмотрим задачу о встрече (пример 3, с. 4). Предположим, что каждое из лиц A и B ожидает другого время, не большее чем τ, $0 < \tau < T$. Пусть C — событие, состоящее в том, что встреча произойдет. Тогда

$$C = \{(x, y) : |x - y| \leqslant \tau,\ 0 \leqslant x \leqslant T,\ 0 \leqslant y \leqslant T\}$$

(рис. 1).

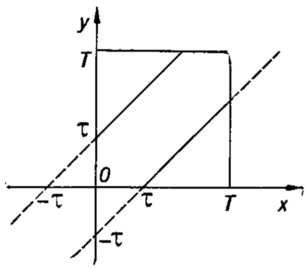

Рис. 1

Как известно, для множеств определено отношение порядка и над ними можно производить определенные алгебраические операции. Проанализируем содержательное значение этих понятий в том случае, когда подмножества некоторого множества Ω интерпретируются как события, наблюдаемые в некотором эксперименте.

1. Само множество Ω, рассматриваемое как событие, характеризуется тем, что в результате эксперимента оно необходимо происходит. Действительно, никакие другие результаты эксперимента, кроме тех, которые описываются точками $\omega \in \Omega$, по определению невозможны. Множество Ω называют **достоверным событием**.

2. Подмножеством любого множества Ω считается пустое множество $\varnothing$, не содержащее ни одной точки Ω. Если $\varnothing$ отождествлять с событием, то это событие в эксперименте не происходит. Его называют **невозможным** событием.

3. Подмножества данного множества Ω частично упорядочены. Пишут $A \subset B$, если каждый элемент множества A содержится в B. Если A и B — события, то $A \subset B$ означает, что, если событие A происходит, то событие B также происходит. В этом случае говорят, что из события A следует событие B (событие A влечет за собой событие B). Очевидно, для любого A, $A \subset \Omega$. По определению принимают

$$\varnothing \subset A.$$

4. *Суммой двух множеств $A \cup B$ называют множество, содержащее все элементы, входящие или во множество A, или во множество B и не содержащее никаких других элементов.* Для событий это следует интерпретировать так: *суммой (или объединением) двух событий A и B называют событие $A \cup B$, происходящее тогда и только тогда, когда происходит или событие A, или событие B.*

Аналогичный смысл имеет сумма любого числа событий. Если I — произвольное множество значений некоторого индекса i, A_i $(i \in I)$ — некоторое множество событий, то сумма (объединение) $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ есть событие, происходящее тогда и только тогда, когда происходит одно из событий A_i.

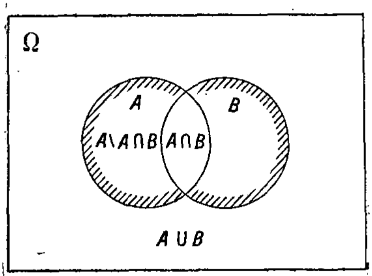

Рис. 2

Заметим, что для любого A

$$A \cup \varnothing = A, \quad A \cup \Omega = \Omega.$$

Событие $A \cup B$ играет роль точной верхней грани событий A и B. Это надо понимать так: во-первых,

$$A \subset A \cup B, \quad B \subset A \cup B,$$

и если событие C таково, что $A \subset C$ и $B \subset C$, то

$$A \cup B \subset C.$$

5. Операция пересечения двух (или любого числа) множеств определяется следующим образом: *пересечение $A \cap B$ (или $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$) есть множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B (всем множествам A_i, $i \in I$)* (рис. 2).

На языке алгебры событий *событие $A \cap B$ $(\bigcap\limits_{i \in I} A_i)$ происходит тогда и только тогда, когда происходит и событие A, и событие B (все события A_i, $i \in I$).*

Пересечение событий называют также их **совмещением**.

Отметим очевидные соотношения:

$$A \cap \varnothing = \varnothing, \quad A \cap \Omega = A,$$
$$A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B,$$

и если $C \subset A \cap B$, то $C \subset A$ и $C \subset B$.

Таким образом, пересечение $A \cap B$ можно рассматривать как точную нижнюю грань множеств A и B.

Отметим еще, что, как известно из теории множеств, в смысле введенного отношения порядка, операции $\cup$ и $\cap$ дистрибутивны:

$$A \cap (\bigcup_i B_i) = \bigcup_i (A \cap B_i),$$
$$A \cup (\bigcap_i B_i) = \bigcap_i (A \cup B_i).$$

Условимся два события A и B называть несовместимыми, или дизъюнктными, если их совмещение есть событие невозможное, т. е.

$$A \cap B = \varnothing.$$

Несовместимые события изображаются множествами, не имеющими общих точек.

Последовательность событий $A_1, A_2, \ldots$ (конечная или бесконечная) называется дизъюнктной, или последовательностью несовместимых событий, если каждая пара из них является несовместимой:

$$A_i \cap A_j = \varnothing \quad \textit{для любых } i, j; \; i \neq j.$$

6. Каждому множеству A можно поставить в соответствие другое множество — его дополнение $\bar{A}$, состоящее из всех точек, которые не входят в A.

Таким образом,

$$A \cup \bar{A} = \Omega, \quad A \cap \bar{A} = \varnothing.$$

Если A — случайное событие, то $\bar{A}$ — событие, происходящее тогда и только тогда, когда A не происходит. Событие $\bar{A}$ называют событием, противоположным A.

7. Разность $A \setminus B$ двух множеств A и B есть множество, состоящее из элементов, входящих в A, но не входящих в B. Если A и B — события, то $A \setminus B$ есть событие, происходящее тогда и только тогда, когда происходит A, но не происходит B.

Очевидно,

$$\bar{A} = \Omega \setminus A, \quad A \setminus B = A \cap \bar{B}.$$

8. Пусть $\{A_n\}$ — бесконечная последовательность множеств, $A_n \subset \Omega$. Обозначим через A^* множество всех тех и только тех элементов, которые принадлежат бесконечному числу множеств A_n. Заметим, что

$$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m.$$

В самом деле, если $\omega \in A^*$, т. е. ω принадлежит бесконечному числу множеств A_m, то $\omega \in \bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m$ для каждого n, и, следовательно, $\omega \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m$, то есть $A^* \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m$. Наоборот, если $\omega \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m$, то $\omega \in A^*$.

Пусть A_* — множество тех и только тех ω, которые принадлежат **всем** A_n, за исключением конечного числа. Тогда

$$A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m.$$

Множество A^* можно интерпретировать, как событие, состоящее в том, что произойдет бесконечно много событий из последовательности событий $\{A_n\}$. Множество A_* есть событие, состоящее в том, что произойдут все события A_n, начиная с некоторого номера, или, что то же самое, не произойдет только конечное число событий из последовательности A_n. Очевидно, $A_* \subset A^*$. Событие A^* называется **верхним пределом** последовательности событий $\{A_n\}$

$$A^* = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n,$$

а событие A_* называется **нижним пределом** последовательности событий $\{A_n\}$

$$A_* = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n.$$

Если

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n,$$

*то говорят, что последовательность событий $\{A_n\}$ имеет **предел***

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n.$$

Пусть, например, A_n — «монотонно убывающая» последовательность событий, т. е. такая последовательность, что

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \cdots.$$

Тогда

$$A^* = \overline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n,$$

$$A_* = \underline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Следовательно, предел последовательности событий A_n существует и

$$\lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Если A_n — «монотонно возрастающая» последовательность событий

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \cdots,$$

то

$$A^* = \overline{\lim} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

$$A_* = \underline{\lim} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

и последовательность $\{A_n\}$ имеет предел, равный

$$\lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Подытоживая все сказанное выше, приведем таблицу, показывающую, как некоторые понятия теории множеств интерпретируются в теории вероятностей.

Обозначения	Язык теории множеств	Язык теории вероятностей
Ω	Универсальное множество	Пространство элементарных событий (элементарных исходов эксперимента)
ω	Элемент Ω	Элементарное событие
A	Некоторое множество элементов ω	Событие A (если $\omega \in A$, то говорят, что наступило событие A)
Ω	Множество всех ω	Достоверное событие
$\varnothing$	Пустое множество	Невозможное событие
$A \subset B$	A подмножество B	Из наступления события A необходимо следует наступление B
$A \cup B$	Объединение множеств A и B; множество точек, входящих или в A, или в B	Событие, состоящее в том, что произошло A или B
$A \cap B$	Пересечение множеств A и B; множество точек, входящих и в A, и в B	Событие, состоящее в том, что произойдет и A, и B

Обозначения	Язык теории множеств	Язык теории вероятностей
$A \cap B = \varnothing$	A и B — непересекающиеся множества	A и B — несовместные события
$A \setminus B$	Разность множеств A и B	Событие, состоящее в том, что произойдет A, но не произойдет B
$\overline{\lim} A_n$	Множество всех тех ω, которые принадлежат бесконечному числу множеств из последовательности $\{A_n\}$	Событие, состоящее в том, что произойдет бесконечное число событий из последовательности событий $\{A_n\}$
$\underline{\lim} A_n$	Множество всех тех ω, которые принадлежат всем A_n, за исключением конечного числа (множество тех ω, которые не принадлежат только конечному числу множеств A_n)	Событие, состоящее в том, что произойдут все события A_n, за исключением конечного числа (событие, состоящее в том, что не произойдет только конечное число из событий последовательности $\{A_n\}$)
$\lim A_n$	Если $\underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n$, то последовательность множеств $\{A_n\}$ имеет предел $\lim A_n = \overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n$	Если $\underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n$, то последовательность событий $\{A_n\}$ имеет предел $\lim A_n = \overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n$

§ 2. Основные понятия комбинаторики

Комбинаторика — это раздел математики, изучающий расположения объектов в соответствии со специальными правилами и методы подсчета числа всех возможных способов, которыми эти расположения могут быть сделаны.

Впервые теоретическое исследование проблем комбинаторики было проведено в XVII в. Паскалем, Ферма, Лейбницем и в XVIII в. Я. Бернулли, Эйлером. Тогда же сложилась и принятая в комбинаторике терминология (сочетания, размещения, перестановки и т. п.). К началу XX в. комбинаторика считалась в основном завершенным разделом математики, лежащим вне основного русла развития математики и ее приложений. В XX в. комбинаторику стали рассматривать как раздел теории множеств, изучающий различные проблемы, возникающие при изучении конечных множеств. Такая точка зрения привела к более естественной и последовательной классификации основных понятий и задач комбинаторики. В последнее время роль комбинаторики возросла в связи с развитием теории вычислительных машин, а также теории информации, изучающей методы оптимального кодирования, декодирования и передачи информации. Ныне комбинаторика является одним из наиболее интенсивно развивающихся разделов математики.

Методы комбинаторики играют важную роль при вычислении вероятностей различных событий, связанных с экспериментами, имеющими конечное число исходов.

Изложим основные понятия комбинаторики.

Основной принцип комбинаторики (правило умножения). Рассмотрим следующую задачу:

Из города A в город B ведет m различных путей, а из города B в город C ведет n путей. Каким числом различных путей можно совершить путешествие из города A в город C через город B?

Решение. Выбрав один из m возможных путей из A в B, дальше можно продолжить путешествие n способами. Поэтому общее число путей равно $m \times n$.

Соображения, приведенные при рассмотрении предыдущего примера, доказывают справедливость следующего простого, но очень важного правила, которое называют основным принципом комбинаторики.

Если некоторый выбор A можно осуществить m различными способами, а для каждого из этих способов некоторый другой выбор B можно осуществить n способами, то выбор A и B (в указанном порядке) можно осуществить $m \times n$ способами.

Рассмотрим еще один пример, иллюстрирующий основной принцип комбинаторики.

В розыгрыше первенства страны по футболу принимают участие 16 команд. Сколькими способами могут быть распределены золотая и серебряная медали?

Решение. Золотую медаль может получить одна из 16 команд. После того как определен владелец золотой медали, серебряную медаль может иметь одна из 15 команд. Следовательно, общее число способов, которыми могут быть распределены золотая и серебряная медали, равно $16 \times 15 = 240$

Сформулируем теперь основное правило комбинаторики (правило умножения) в общем виде.

Пусть требуется выполнить одно за другим k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе — n_2 способами, третье — n_3 способами и так до k-го действия, которое можно выполнить n_k способами, то все k действий вместе могут быть выполнены

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \cdots \times n_k$$

способами.

Доказательство этого утверждения может быть легко проведено методом полной математической индукции. Рекомендуем читателю выполнить это самостоятельно.

ЗАДАЧА

Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, *если:*

а) *ни одна из цифр не повторяется более одного раза;*

б) *цифры могут повторяться;*

в) *числа должны быть нечетными (цифры могут повторяться)?*

Решение. а) Первой цифрой числа может быть одна из пяти цифр 1, 2, 3, 4, 5. Если первая цифра выбрана, то вторая может быть выбрана 5 способами, третья — 4 способами, четвертая — 3 способами. Согласно правилу умножения, общее число способов равно $5 \times 5 \times 4 \times 3 = 300$.

б) Первой цифрой может быть одна из цифр 1, 2, 3, 4, 5 (5 случаев), для каждой из следующих цифр имеем 6 случаев (0, 1, 2, 3, 4, 5). Следовательно, число искомых чисел равно $5 \times 6 \times 6 \times 6 = 5 \times 6^3 = 1080$.

в) Первой цифрой может быть одна из цифр 1, 2, 3, 4, 5, а последней — одна из цифр 1, 3, 5 (числа должны быть нечетными). Следовательно, общее количество чисел равно $5 \times 6 \times 6 \times 3 = 540$.

Сочетания из n по k. Пусть Ω — множество из n элементов. *Произвольное k-элементное подмножество множества из n элементов называется сочетанием из n элементов по k.* Порядок элементов в подмножестве не существен. Число k-элементных подмножеств множества из n элементов обозначают C_n^k.

Например, пусть $\Omega = \{a, b, c\}$. Тогда $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ — все возможные сочетания из 3 по 1 (следовательно, $C_3^1 = 3$), $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ — все возможные сочетания из 3 по 2 (таким образом, $C_3^2 = 3$).

Пусть $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$; удобно считать по определению, что $0! = 1$.

Теорема 1. *Число всех k-элементных подмножеств множества из n элементов равно*

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \tag{1}$$

Доказательство. Чтобы построить k-элементное подмножество множества Ω, нужно к $(k-1)$-элементному подмножеству присоединить один из $n-k+1$ элементов, который не входит в это подмножество. Поскольку $(k-1)$-элементных подмножеств имеется C_n^{k-1} и каждое из них можно сделать k-элементным $n-k+1$ способами, то таким образом мы получим $(n-k+1)\,C_n^{k-1}$ подмножеств. Но не все они будут разными, так как каждое k-элементное множество можно построить k способами: присоединением любого из k его элементов. Поэтому найденное нами число в k раз больше, чем число C_n^k k-элементных подмножеств. Следовательно,

$$kC_n^k = (n-k+1)\,C_n^{k-1}.$$

Отсюда

$$C_n^k = \frac{n-k+1}{k}\,C_n^{k-1} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)}{k(k-1)}\,C_n^{k-2} = \cdots$$

$$\cdots = \frac{(n-k+1)\cdots(n-1)}{k(k-1)\cdots 2}\,C_n^1.$$

Поскольку число одноэлементных подмножеств множества A равно количеству элементов n, то, подставив вместо C_n^1 число n, получим равенство (1).

ЗАДАЧИ

1. *Сколькими способами читатель может выбрать 3 книги из 7?*

Решение. Искомое число равно числу трехэлементных подмножеств во множестве из 7 элементов:

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!4!} = 35.$$

2. *В скольких точках пересекаются диагонали выпуклого n-угольника, если никакие три из них не пересекаются в одной точке?*

Решение. Каждая точка пересечения двух диагоналей определяется четырьмя вершинами n-угольника (концами соответствующих диагоналей); каждым четырем вершинам n-угольника соответствует одна точка пересечения (точка пересечения диагоналей четырехугольника с вершинами в данных четырех точках). Поэтому число всех точек пересечения равно числу способов, которыми среди n вершин можно выбрать 4 вершины:

$$C_n^4 = \frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

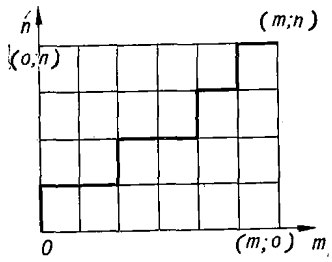

Рис. 3

3. *Сколькими способами можно составить комиссию в составе трех человек, выбирая их из четырех супружеских пар, если:*

1) *в комиссию могут входить любые три из восьми человек;*

2) *в комиссию не могут входить члены одной семьи?*

Решение. 1) Если в комиссию войдут любые 3 из 8 человек, то число всех возможных комиссий равно $C_8^3 = 56$.

2) Если в комиссию не входят члены одной семьи, то в ней будут представлены 3 из 4 семей. Эти семьи можно выбрать $C_4^3 = 4$ способами. После этого в каждой из них можно двумя способами выбрать представителя — мужа или жену. По правилу умножения число всех возможных комиссий равно:

$$C_4^3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32.$$

В следующей задаче дана интересная и важная геометрическая интерпретация для чисел C_n^k.

4. *Рассмотрим «шахматный город» (прямоугольную сетку квадратов размерами $m \times n$), состоящий из $m \times n$ прямоугольных кварталов, разделенных $n-1$ «горизонтальными» и $m-1$ «вертикальными» улицами* (рис. 3). *Каково число различных кратчайших путей на этой сетке, ведущих из левого нижнего угла (точки* (0; 0)) *в правый верхний угол (точку* (m; n))*?*

Решение. Каждый кратчайший путь из точки (0; 0) в точку (m; n) состоит из $m+n$ отрезков, причем среди них есть m горизонтальных и n вертикальных отрезков. Разные пути отличаются лишь порядком чередования горизонтальных и вертикальных отрезков. Поэтому общее число путей равно числу способов, которыми из $m+n$ отрезков можно выбрать n вертикальных отрезков, т. е. C_{m+n}^n.

Можно было бы рассматривать число способов выбора не n вертикальных, а m горизонтальных отрезков, и мы получили бы тогда ответ C_{m+n}^m. Итак, мы установили геометрически равенство $C_{m+n}^m = C_{m+n}^n$, в справедливости которого нетрудно убедиться, непосредственно используя соотношение (1).

Таким образом, число кратчайших путей из точки (0; 0) в точку (m; n) равно $C_{m+n}^{m} = C_{m+n}^{n}$.

Числа C_n^k называются **биномиальными коэффициентами**. Следующая теорема выражает важное свойство биномиальных коэффициентов.

Теорема 2. *Имеет место равенство*

$$C_n^k = C_{n-1}^{k} + C_{n-1}^{k-1}. \qquad (2)$$

Легко убедиться в справедливости равенства (2), используя соотношение (1).

Приведем геометрическое доказательство равенства (2).

Число кратчайших путей из точки O (0; 0) в точку A (n; $n-k$) равно $C_{k+(n-k)}^{k} = C_n^k$ (рис. 4). Все такие пути можно разделить на две группы: пути, проходящие через точку A_1 ($k-1$, $n-k$) (число их равно $C_{(k-1)+(n-k)}^{k-1} = C_{n-1}^{k-1}$), и пути, проходящие через точку A_2 (k; $n-k-1$) (число их равно $C_{k+(n-k-1)}^{k} = C_{n-1}^{k}$). Следовательно, имеет место равенство (2).

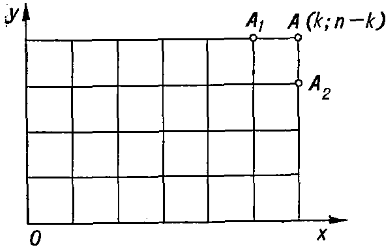

Рис. 4

Упорядоченные множества, перестановки. *Множество называется* ***упорядоченным****, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие некоторое число (номер элемента) от 1 до n, где n — число элементов множества, так, что различным элементам соответствуют различные числа.* Всякое конечное множество можно сделать упорядоченным, если, например, записать все элементы множества в некоторый список (a, b, c, ...), а затем поставить в соответствие каждому элементу номер места, на котором он стоит в списке. Очевидно, каждое множество, содержащее более одного элемента, можно упорядочить не единственным способом. Упорядоченные множества считаются различными, если они отличаются либо своими элементами, либо их порядком. *Различные упорядоченные множества, которые отличаются лишь порядком элементов (т. е. могут быть получены из того же самого множества), называются* ***перестановками*** *этого множества.*

ПРИМЕР

Перестановки множества $\Omega = (a, b, c)$ из трех элементов имеют вид

$$(a, b, c),\ (a, c, b),\ (b, a, c),$$
$$(b, c, a),\ (c, a, b),\ (c, b, a).$$

Теорема 3. *Пусть P_n — число перестановок множества, содержащего n элементов. Имеет место равенство*

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

Доказательство. Будем последовательно выбирать элементы множества Ω и размещать их в определенном порядке на n местах. На первое место можно поставить любой из n элементов. После того как заполнено первое место, на второе место можно поставить любой из оставшихся $n-1$ элементов и т. д. По правилу умножения все n мест можно заполнить

$$n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n!$$

способами. Следовательно, множество Ω из n элементов можно упорядочить $n!$ способами.

ЗАДАЧА

Сколькими способами можно упорядочить множество $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ *так, чтобы каждое четное число имело четный номер?*

Решение. Четные числа можно расставить на местах с четными номерами (таких мест n) $n!$ способами; каждому способу размещения четных чисел на местах с четными номерами соответствует $n!$ способов размещения нечетных чисел на местах с нечетными номерами. Поэтому общее число перестановок указанного типа по правилу умножения равно $n!\cdot n! = (n!)^2$.

Размещения из n по k. Рассмотрим теперь упорядоченные подмножества данного множества Ω. Само множество Ω считаем неупорядоченным, поэтому каждое его подмножество может быть упорядочено каким-либо возможным способом. Число всех k-элементных подмножеств множества Ω равно C_n^k. Каждое такое подмножество можно упорядочить $k!$ способами. Таким образом, получим все упорядоченные k-элементные подмножества множества Ω. Следовательно, их число будет $k!C_n^k$.

Теорема 4. *Число упорядоченных k-элементных подмножеств множества, состоящего из n элементов, равно*

$$A_n^k = k!C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1). \qquad (3)$$

Упорядоченные k-элементные подмножества множества из n элементов называются размещениями из n элементов по k. Различные размещения из n по k отличаются количеством элементов либо их порядком.

ЗАДАЧИ

1. *Студенту необходимо сдать 4 экзамена на протяжении 8 дней. Сколькими способами это можно сделать?*

Решение. Искомое число способов равно числу 4-элементных упорядоченных подмножеств (дни сдачи экзаменов) множества из 8 элементов, т. е. $A_8^4 = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 1680$ способов. Если известно, что последний экзамен будет сдаваться на восьмой день, то число способов равно:

$$4\cdot A_7^3 = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 840.$$

2. *Сколько существует телефонных номеров, состоящих из шести различных цифр?*

Решение. Число таких номеров равно $A_{10}^6 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$ (число размещений на 6 местах шести из 10 цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

Разбиения на группы; перестановки с повторениями. Пусть Ω — множество из n элементов. Поставим следующий вопрос: каким числом способов множество Ω можно представить в виде объединения m попарно непересекающихся множеств $B_1, \ldots, B_m$, содержащих соответственно $k_1, \ldots, k_m$ элементов ($k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$)?

Все разбиения множества Ω на m групп $B_1, \ldots, B_m$ можно получить так: возьмем произвольное k_1-элементное подмножество B_1 множества Ω (это можно сделать $C_n^{k_1}$ способами), среди $n - k_1$ оставшихся элементов возьмем k_2-элементное подмножество B_2 (это можно сделать $C_{n-k_1}^{k_2}$ способами) и т. д. Общее число способов выбора различных множеств $B_1, \ldots, B_m$ по правилу умножения равно:

$$C_n^{k_1} \cdot C_{n-k_1}^{k_2} \cdot C_{n-k_1-k_2}^{k_3} \cdots C_{n-k_1-\cdots-k_{m-1}}^{k_m} =$$
$$= \frac{n!}{k_1!\,(n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2!\,(n-k_1-k_2)!} \cdot \frac{(n-k_1-k_2)!}{k_3!\,(n-k_1-k_2-k_3)!} \cdots$$
$$\cdots \frac{(n-k_1-\cdots-k_{m-1})!}{k_m!\,(n-k_1-\cdots-k_m)!} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_m!}$$

(напомним, что $0! = 1$).

Итак, мы доказали следующую теорему:

Теорема 5. *Пусть $k_1, \ldots, k_m$ — целые неотрицательные числа, причем $k_1 + \cdots + k_m = n$. Число способов, которыми можно представить множество A из n элементов в виде суммы m множеств $B_1, \ldots, B_m$, число элементов которых составляет соответственно $k_1, k_2, \ldots, k_m$, равно:*

$$C_n(k_1, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \ldots k_m!}. \tag{4}$$

Числа $C_n(k_1, \ldots, k_m)$ называются полиномиальными коэффициентами. Они имеют еще одну очень важную комбинаторную интерпретацию.

Пусть имеется n букв: k_1 — букв a_1, k_2 — букв a_2, $\ldots$, k_m — букв a_m, $k_1 + \cdots + k_m = n$. Определим, сколько различных слов можно составить из этих букв. Перенумеруем места, на которых стоят буквы, числами $1, 2, \ldots, n$. Каждое слово определяется множествами B_1 (номера мест, где стоит буква a_1), B_2 (номера мест, где стоит буква a_2) $\ldots$, B_m (номера мест, где стоит буква a_m). Следовательно, число различных слов равно числу способов, которыми можно представить множество $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ в виде объединения множеств $B_1, \ldots, B_m$, т. е. это число определяется соотношением (4).

Слова длины n, которые можно получить из k_1 букв a_1, k_2 букв a_2, $\ldots$, k_m букв a_m, называются еще перестановками