

**nachrichtentechnik**

Alexander von Weiss

**Die  
elektromagnetischen  
Felder**

Einführung in die Feldtheorie  
und ihre Anwendung

Vieweg

Alexander von Weiss

# **Die elektromagnetischen Felder**

**Einführung in die Feldtheorie  
und ihre Anwendung**

Mit 77 Beispielen  
und 197 Bildern



Friedr. Vieweg & Sohn      Braunschweig / Wiesbaden

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

**Weiss, Alexander von:**

Die elektromagnetischen Felder: Einf. in d.  
Feldtheorie u. ihre Anwendung/Alexander von  
Weiss. — Braunschweig; Wiesbaden: Vieweg, 1983.

(Nachrichtentechnik; Bd. 1)

ISBN 3-528-04225-7

NE: GT

1983

Alle Rechte vorbehalten

© Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig 1983

Die Vervielfältigung und Übertragung einzelner Textabschnitte, Zeichnungen oder Bilder, auch für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, gestattet das Urheberrecht nur, wenn sie mit dem Verlag vorher vereinbart wurden. Im Einzelfall muß über die Zahlung einer Gebühr für die Nutzung fremden geistigen Eigentums entschieden werden. Das gilt für die Vervielfältigung durch alle Verfahren einschließlich Speicherung und jede Übertragung auf Papier, Transparente, Filme, Bänder, Platten und andere Medien.

Umschlagentwurf: Peter Lenz, Wiesbaden

Satz: Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Druck und buchbinderische Verarbeitung: Lengericher Handelsdruckerei, Lengerich

Printed in Germany

ISBN 3-528-04225-7

Alexander von Weiss

**Die elektromagnetischen Felder**

# nachrichtentechnik

Herausgegeben von

Prof. Dr.-Ing. habil. Peter Jesorsky, Nürnberg

Prof. Dr. techn. Alexander von Weiss, Nürnberg

In der NTE-Reihe sollen die wichtigsten Theorien der Nachrichtentechnik erfaßt, ihre technischen Anwendungen herausgestellt und einschlägige Methoden, Verfahren und Technologien behandelt werden. Die Reihe wendet sich an Studenten mit abgeschlossenem Vorexamen und an Lehrende aus allen Zweigen der Nachrichtentechnik und der Allgemeinen Elektrotechnik an Fachhochschulen und Technischen Universitäten sowie an Ingenieure im Berufsleben.

**Band 1 Die elektromagnetischen Felder**

Einführung in die Feldtheorie und ihre Anwendung  
von A. v. Weiss

## Vorwort

Enormes Anwachsen des Wissensstoffes begleitet von einer bisher nicht gekannten Innovationsdynamik kennzeichnet die technische Entwicklung der letzten zwanzig Jahre in der vielschichtigen Elektrotechnik. Eine Neuauflage der seit 1969 vergriffenen 3. Auflage der „Übersicht über die Theoretische Elektrotechnik“ des Verfassers, von der bereits Teil II gemeinsam mit Prof. Dr. H. Kleinwächter verfaßt wurde, müßte daher zu einer Buchreihe mit mehreren Verfassern erweitert werden, um allen Leserwünschen einigermaßen entgegenzukommen. So befaßt sich das vorliegende Buch nur mit der Lehre von den elektromagnetischen Feldern, dem eigentlichen Kerngebiet der Theoretischen Elektrotechnik. Es bildet das Fundament für viele Zweige der Nachrichtentechnik und der ihr angegliederten Fachgebiete und erschien daher besonders geeignet zu sein, um die NTE-Schriftenreihe zu eröffnen.

Behandelt werden die elektromagnetischen Felder und ihre technische Anwendung, die an 77 Anwendungsbeispielen erläutert wird. Der Stoffumfang reicht von den statischen Feldern bis zu den Mikrowellen und Lichtwellen in Lichtwellenleitern. Den Abschluß bildet ein kurzer Blick in die vierdimensionale Raum-Zeit-Welt; er soll eine Vertiefung des Verständnisses für die physikalischen Zusammenhänge vermitteln. Als Einführung in die Feldtheorie beschränkt sich die Stoffauswahl auf das Wesentliche und vermeidet ein detailliertes Eindringen in die anspruchsvolle mathematische Welt der Theoretischen Elektrotechnik. Im Vordergrund steht die physikalische Deutung der Naturvorgänge, der viel Raum gewidmet wird. Das Buch will zum Erkennen und Verstehen des physikalischen Geschehens aus möglichst übergeordneter Sicht verhelfen, das Verständnis für die Notwendigkeit exakt mathematischer Formulierungen wecken sowie zu den mathematischen Ansätzen bei der technischen Anwendung der Feldtheorie auf spezielle Probleme als Brücke zwischen Theorie und Praxis führen.

Die Darstellung versucht weitgehend die Maxwell'schen Gedankengänge mit ihrer affin-invarianten Form der Feldgleichungen herauszustellen. Der felderfüllte Raum, materiefrei oder mit Materie angefüllt, wird dabei als ein Kontinuum betrachtet. Doch bereits die Erklärung selbst elementarer Vorgänge bei der Elektrizitätsleitung ebenso wie die Behandlung der polarisierten und magnetisierten Materie stößt an die Grenzen der Feldtheorie als phänomenologische Theorie des Makrokosmos und kann auf eine atomistische Betrachtung nicht verzichten. Zum besseren Verständnis der Naturvorgänge dient ferner bei physikalischen Betrachtungen die sich in der Elektrodynamik immer mehr durchsetzende Darstellung der Feldgrößen als Multivektoren<sup>1)</sup>; sie ermöglicht eine besonders anschauliche, klare und eindeutige Unterscheidung ihres Vektorcharakters. Auch im letzten Kapitel kommt der äußere Kalkül nochmals zur Anwendung, wobei seine große Leistungsfähigkeit erkennbar wird.

<sup>1)</sup> Siehe Schrifttum [2.4], [2.11], [2.12], [2.17], [2.21].

Vom Leser vorausgesetzt wird die Kenntnis der Grundlagen der Gleich- und Wechselstromtechnik und ihre mathematische Behandlung im Umfang der „Allgemeinen Elektrotechnik“ des Verfassers [1.4]. Die verlangten mathematischen Vorkenntnisse gehen hinsichtlich Grundlagen der klassischen Vektoranalysis und Grundkenntnisse zur Lösung gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen nicht über das hinaus, was normalerweise von Studenten der Elektrotechnik nach abgeschlossenem Vorexamen erwartet wird. Intensive Mitarbeit des Lesers bleibt jedoch unverzichtbar, denn wirkliches Wissen muß erarbeitet werden; das Buch kann dabei nur Helfer sein.

Der Welt des Ingenieurs angepaßt, wird durchwegs das Vierersystem mit den kohärenten SI-Einheiten verwendet. Um jedoch zu einem kritischen Nachdenken anzuregen, wird insbesondere bei physikalischen Betrachtungen auf das Fünfersystem hingewiesen, das wegen seiner Systeminvarianz in der Raum-Zeit-Welt angewendet wird. Die Formelzeichen entsprechen den Empfehlungen des AEF, dabei wird im Vorgriff auf eine noch in Vorbereitung befindliche AEF-Empfehlung die elektrische Leitfähigkeit mit  $\kappa$  bezeichnet. Überschneidungen mit der Flächenladungsdichte  $\sigma$  oder bei der Wellenausbreitung mit der Fortpflanzungskonstante  $\gamma$  wären sonst unvermeidbar.

In zahlreichen Diskussionen mit Fachkollegen erhielt ich viele Anregungen und wertvolle Hinweise zur Verbesserung der Darstellung. Mein besonderer Dank richtet sich dabei an die Herren Prof. Dr. *Helmut Dietz*, Nürnberg und Prof. Dr.-Ing. *Anton Vlcek*, Darmstadt. Zu danken habe ich ferner dem Vieweg-Verlag für die angenehme Zusammenarbeit sowie für die schöne Ausstattung des Buches und den sauberen Formelsatz. Herrn *Michael Langfeld* bin ich für das stets gezeigte Verständnis und Entgegenkommen bei der durch Krankheit bedingten Verzögerung der Manuskriptabgabe zu großem Dank verpflichtet.

Nürnberg, Juli 1983

A. von Weiss

Alexander von Weiss

## Allgemeine Elektrotechnik

Grundlagen der Gleich- und Wechselstromlehre. 8., durchges. Aufl. 1983. XII, 328 S. mit 308 Abb. u. 130 durchgerechneten Beisp. 16,2 X 22,9 cm. Br.

Inhalt: Einführung: Physikalische Größen / Die Elektrizität und ihre Wirkungen – Grundbegriffe und Grundgesetze des Gleichstroms – Elektrische Strömung in Elektrolyten – Das magnetische Feld – Das elektrische Feld – Energie, Kräfte und Feldverketzung – Elektrizitätsleitung in gasförmigen und festen Stoffen – Halbleiterbauelemente – Der einfache Wechselstromkreis – Die komplexe Rechnung in der Wechselstromtechnik – Mehrphasige Wechselströme – Wechselfelder und Verluste im Wechselfeld – Zweipole und Vierpole – Gekoppelte Stromkreise – Mehrwellige Systeme – Die wichtigsten verwendeten Formelzeichen – Schrifttum – Anhang – Sachwortverzeichnis.

Als Lehr- und Arbeitsbuch wendet sich die Allgemeine Elektrotechnik an Studenten der Elektrotechnik aller Studiengänge im Grundstudium an Fachhochschulen und Universitäten sowie an Ingenieure im Beruf, die ihr Grundwissen auffrischen wollen. Behandelt werden die allgemeinen Grundlagen der Gleich- und Wechselstromlehre, die allen Zweigen der Elektrotechnik angehören, die Voraussetzung für den Einstieg in das Fachstudium bilden und ein Verständnis für die Welt der theoretischen Elektrotechnik vermitteln. Als Begleiter zur Vorlesung vermittelt das Buch das notwendige Rüstzeug zum Verstehen des physikalischen Geschehens und seiner technischen Anwendungen und fördert zum ingenieurmäßigen Denken.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abschnitt I Einführende Grundlagen</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>1 Mathematische Hilfsmittel</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Grundlagen der Vektoralgebra und Vektoranalysis . . . . .	1
1.1.1 Skalar und Vektor, Ortsfunktion . . . . .	1
1.1.2 Elementare Differentialoperationen . . . . .	3
1.1.3 Zusammengesetzte Differentialoperationen . . . . .	8
1.1.4 Integralsätze . . . . .	9
1.1.5 Orthogonale krummlinige Koordinaten . . . . .	9
1.2 Begriffe der äußeren Algebra . . . . .	10
1.2.1 Multivektoren . . . . .	10
1.2.2 Äußere Differentiation . . . . .	13
1.3 Funktionen komplexer und reeller Veränderlicher . . . . .	16
1.3.1 Funktionen komplexer Veränderlicher . . . . .	16
1.3.2 Zylinderfunktionen . . . . .	17
1.3.3 Kugelfunktionen . . . . .	20
<b>2 Einführende Betrachtungen</b> . . . . .	<b>22</b>
2.1 Physikalische Größen, Maßsysteme . . . . .	22
2.1.1 Physikalische Größen . . . . .	22
2.1.2 Maßsysteme der Elektrodynamik . . . . .	23
2.1.3 Konventionelle und rationale Schreibweise . . . . .	25
2.2 Theorien zur Beschreibung der Elektrodynamik . . . . .	25
2.2.1 Fernwirkung und Nahewirkung . . . . .	25
2.2.2 Feldtheorie und Elektronentheorie . . . . .	26
2.2.3 Zur Darstellung der Elektrodynamik . . . . .	27
<b>3 Die elektromagnetischen Feldgrößen</b> . . . . .	<b>29</b>
3.1 Die elektrischen Feldgrößen . . . . .	29
3.1.1 Elektrische Ladung, elektrisches Feld . . . . .	29
3.1.2 Elektrische Feldstärke, skalares elektrisches Potential . . . . .	30
3.1.3 Influenz, elektrischer Fluß und Flußdichte . . . . .	33
3.1.4 Elektrische Stromstärke und Stromdichte . . . . .	35
3.1.5 Verknüpfung der elektrischen Größen . . . . .	37
3.1.6 Physikalische Deutung der elektrischen Feldgrößen . . . . .	38
3.2 Die magnetischen Feldgrößen . . . . .	39
3.2.1 Magnetisches Feld, magnetischer Fluß . . . . .	39
3.2.2 Magnetische Feldstärke, magnetische Flußdichte . . . . .	41

3.2.3	Magnetische Spannung, Durchflutung . . . . .	43
3.2.4	Zur Ableitung der magnetischen Feldgrößen . . . . .	45
3.2.5	Physikalische Deutung der magnetischen Feldgrößen . . . . .	46
3.3	Spezielles Verhalten der vektoriellen Feldgrößen . . . . .	46
3.3.1	Die Feldgrößen $H$ und $B$ . . . . .	46
3.3.2	Verhalten an Grenzflächen homogener Materie . . . . .	47
3.4	Verkettung und Einteilung der Felder . . . . .	50
3.4.1	Verkettung beider Felder . . . . .	50
3.4.2	Einteilung der Elektrodynamik . . . . .	51
3.4.3	Quellen- und Wirbelfelder . . . . .	54
<b>Abschnitt II Das elektrische Feld . . . . .</b>		<b>57</b>
<b>4</b>	<b>Das elektrostatische Feld . . . . .</b>	<b>57</b>
4.1	Einige Grundbegriffe . . . . .	57
4.1.1	Punktladungen . . . . .	57
4.1.2	Dipol, Multipole . . . . .	59
4.1.3	Linienladung, Liniendipol . . . . .	61
4.1.4	Homogene Dipolschichten . . . . .	64
4.2	Das elektrostatische Feld in dielektrischer Materie . . . . .	65
4.2.1	Polarisation des Dielektrikums . . . . .	65
4.2.2	Das Feld im Dielektrikum . . . . .	67
4.2.3	Polarisationsformen, dielektrische Stoffe . . . . .	68
4.2.4	Elektrete . . . . .	69
4.2.5	Piezoelektrizität, Elektrostriktion . . . . .	70
4.3	Kondensatoren . . . . .	71
4.3.1	Allgemeines . . . . .	71
4.3.2	Plattenkondensatoren . . . . .	72
4.3.3	Der Kugelkondensator . . . . .	73
4.3.4	Zylinderkondensator, Koaxialkabel . . . . .	73
4.4	Kräfte und Energie im elektrostatischen Feld . . . . .	75
4.4.1	Kraftwirkung auf punktförmige Ladungsträger . . . . .	75
4.4.2	Kraftwirkung auf Dipole und ungeladene Körper . . . . .	76
4.4.3	Kraftwirkung auf Träger von Flächenladungen . . . . .	76
4.4.4	Mechanische Spannungen, Kräfte an Grenzflächen . . . . .	78
4.4.5	Energie im elektrostatischen Feld . . . . .	79
4.4.6	Ablenkung von Ladungsträgern, Elektronenoptik . . . . .	81
<b>5</b>	<b>Elektrostatische Probleme . . . . .</b>	<b>85</b>
5.1	Einfache elektrostatische Probleme . . . . .	85
5.1.1	Allgemeines . . . . .	85
5.1.2	Graphische und experimentelle Feldbildermittlung . . . . .	86
5.1.3	Verfahren der Spiegelung . . . . .	88

5.1.4	Kugel, zwei Kugeln . . . . .	92
5.1.5	Einzelleiter, Doppelleiter . . . . .	94
5.1.6	Mehrleitersysteme . . . . .	98
5.1.7	Ladungsverteilung auf Leitern . . . . .	102
5.2	Raumladungsfelder . . . . .	106
5.2.1	Raumladungswolken . . . . .	106
5.2.2	Feldverlauf bei Raumladungen . . . . .	108
5.3	Die Potentialgleichung . . . . .	110
5.3.1	Einführung . . . . .	110
5.3.2	Einfache Lösungen . . . . .	110
5.3.3	Probleme in der Ebene . . . . .	112
5.3.4	Allgemeine Lösung in Zylinderkoordinaten . . . . .	113
5.3.5	Allgemeine Lösung in Kugelkoordinaten . . . . .	115
5.3.6	Zylinder- und Kugelsymmetrie . . . . .	116
5.4	Konforme Abbildung . . . . .	120
5.4.1	Aufgabe der konformen Abbildung in der Elektrostatik . . . . .	120
5.4.2	Feldermittlung mit Hilfe komplexer Funktionen . . . . .	121
5.4.3	Berechnung des elektrischen Flusses . . . . .	123
<b>6</b>	<b>Das stationäre elektrische Strömungsfeld . . . . .</b>	<b>127</b>
6.1	Kennzeichen und Grundgesetze . . . . .	127
6.1.1	Grunderscheinungen . . . . .	127
6.1.2	Grundgesetze . . . . .	128
6.2	Räumliche Leiteranordnungen . . . . .	131
6.2.1	Allgemeines . . . . .	131
6.2.2	Kugel- und Halbkugelelektrode . . . . .	131
6.2.3	Der Tiefenerder . . . . .	133
6.2.4	Koaxialkabel und Rohrerder . . . . .	134
6.3	Elektronen- und Ionenströme . . . . .	136
6.3.1	Wesen und Mechanismus der Elektrizitätsleitung . . . . .	136
6.3.2	Elektronenemission . . . . .	137
6.3.3	Elektrizitätsleitung im Hochvakuum . . . . .	139
6.3.4	Kennlinie der Gasentladung . . . . .	144
6.3.5	Glimm- und Bogenentladung . . . . .	146
<b>Abschnitt III</b>	<b>Elektromagnetische Felder . . . . .</b>	<b>150</b>
<b>7</b>	<b>Das Magnetfeld stationärer Ströme . . . . .</b>	<b>150</b>
7.1	Grundbegriffe und Grunderscheinungen . . . . .	150
7.1.1	Magnetischer Dipol, magnetisches Moment . . . . .	150
7.1.2	Magnetisches Vektorpotential, Biot-Savartsches Gesetz . . . . .	152
7.1.3	Skalares magnetisches Potential, magnetische Doppelschicht . . . . .	154

7.2	Magnetisches Feld in Materie	156
7.2.1	Die Magnetisierungskurve, Permeabilität	156
7.2.2	Das Feld innerhalb und außerhalb magnetisierter Stoffe	158
7.2.3	Dia- und Paramagnetismus	159
7.2.4	Ferro- und ferrimagnetische Stoffe	159
7.3	Berechnung einfacher magnetischer Felder	161
7.3.1	Gerader, stromdurchflossener Leiter	161
7.3.2	Mehrere parallele Leiter	164
7.3.3	Stromführender Kreisring und Zylinderspule	167
7.3.4	Stromleiter innerhalb und außerhalb von Eisenkörpern	169
7.4	Induktivität und Gegeninduktivität	170
7.4.1	Die Selbstinduktivität	170
7.4.2	Gegeninduktivität und Streuinduktivität	170
7.4.3	Induktivität einiger Anordnungen	172
7.4.4	Die Betriebsinduktivität von Mehrleitersystemen	175
<b>8</b>	<b>Kräfte und Energie</b>	<b>179</b>
8.1	Kräfte und Energie im magnetischen Feld	179
8.1.1	Kraftwirkung auf magnetische Dipole	179
8.1.2	Kräfte auf Ladungsträger und Stromleiter	179
8.1.3	Induktionswirkung im zeitlich konstanten Magnetfeld	182
8.1.4	Kräfte zwischen Stromleitern	184
8.1.5	Kraftwirkung auf Grenzflächen	185
8.1.6	Energie im magnetischen Feld	186
8.1.7	Berechnung der Kraftwirkung aus der Induktivität	188
8.1.8	Räumliche Kraftdichten	189
8.2	Die Maxwellschen Spannungen	190
8.2.1	Der Maxwellsche Spannungsvektor	190
8.2.2	Berechnung des Maxwellschen Spannungstensors	191
8.2.3	Anwendungsbeispiele	196
<b>9</b>	<b>Zeitliche veränderliche Felder</b>	<b>199</b>
9.1	Der Induktionsvorgang und seine Deutung	199
9.1.1	Das Induktionsgesetz	199
9.1.2	Deutung des Induktionsvorgangs	202
9.1.3	Zur Anwendung des Induktionsgesetzes	204
9.2	Energie und Energieströmung	206
9.2.1	Elektromagnetische Feldenergie	206
9.2.2	Energieströmung und Poynting-Vektor	207
9.2.3	Energiebetrachtungen	209
9.2.4	Der komplexe Poynting-Vektor	211
9.3	Verschiedene Formen der Feldgleichungen	212
9.3.1	Die erweiterten Feldgleichungen	212
9.3.2	Die Feldgleichungen in der Elementarstrom- und Mengentheorie	213
9.3.3	Die Feldgleichungen im Frequenzbereich	214

9.4	Physikalisch-mathematische Betrachtungen	215
9.4.1	Quantitäts- und Intensitätsgrößen	215
9.4.2	Die Feldkonstanten	216
9.4.3	Vektorgrad der Feldgrößen	217
9.4.4	Abschließende Betrachtungen	220
<b>Abschnitt IV Elektromagnetische Wellen</b>		<b>222</b>
<b>10</b>	<b>Wellen im Dielektrikum und in Leitern</b>	<b>222</b>
10.1	Allgemeine Wellengleichung, Wellenformen	222
10.1.1	Allgemeines	222
10.1.2	Die Wellengleichung	222
10.1.3	Elektrodynamische Potentiale	223
10.1.4	Homogene ebene Wellen	226
10.1.5	Wellenformen	228
10.1.6	Phasen- und Gruppengeschwindigkeit	231
10.2	Ebene Wellen	233
10.2.1	Ebene Wellen im Dielektrikum	233
10.2.2	Ebene Felder in Leitern	233
10.2.3	Zur Schirmwirkung von Blechen	236
10.2.4	Wellen an Grenzflächen	237
10.2.5	Wellen in Medien mit freien Elektronen	241
10.3	Strom- und Feldverdrängung	242
10.3.1	Zur Entstehung der Strom- und Feldverdrängung	242
10.3.2	Wirbelströme in längsmagnetisierten Blechen	243
10.3.3	Wirbelströme in zylindrischen Leitern	247
10.3.4	Wirkwiderstand und innere Induktivität	249
<b>11</b>	<b>Ausbreitung freier und geführter Wellen</b>	<b>252</b>
11.1	Lösungen der skalaren Wellengleichung	252
11.1.1	Zur Einführung elektrodynamischer Potentiale	252
11.1.2	Ausbreitung ebener Wellen	254
11.1.3	Zylinderwellen	256
11.1.4	Kugelwellen	260
11.2	Wellen im freien Raum	262
11.2.1	Wellenablösung	262
11.2.2	Retardierte Potentiale	263
11.2.3	Der Hertzsche und Fitzgeraldsche Dipol	264
11.2.4	Das Strahlungsfeld oszillierender Dipole	265
11.2.5	Leistungsfluß und Strahlungswiderstand	268
11.2.6	Ausstrahlung und Empfang von Wellen	269
11.2.7	Richtstrahlung	272

11.3	Hohlleiter und dielektrische Leitungen	274
11.3.1	Übersicht	274
11.3.2	Wellen in Rechteckrohren	276
11.3.3	Wellen in Rundrohren	279
11.3.4	Verluste in Hohlleitern	282
11.3.5	Hohlraumresonatoren	283
11.3.6	Dielektrische Wellenleiter	284
11.4	Wellen auf Doppelleitungen	286
11.4.1	Die Telegraphengleichung	286
11.4.2	Wellen auf verzerrungsfreier Leitung	290
11.4.3	Die Telegraphengleichung im Frequenzbereich	291
11.4.4	Sprung- und Wanderzellen auf Leitungen	293
<b>Abschnitt V Die Raum-Zeit-Welt</b>		298
<b>12</b>	<b>Einführung in die vierdimensionale Elektrodynamik</b>	298
12.1	Vierdimensionale Darstellung	298
12.1.1	Relativitätsprinzip und Lichtgeschwindigkeit	298
12.1.2	Die vierdimensionalen Koordinaten	298
12.1.3	Galilei- und Lorentztransformation	300
12.2	Die vierdimensionalen Feldgrößen	303
12.2.1	Die Feldtensoren	303
12.2.2	Die Feldgleichungen in der Raum-Zeit-Welt	307
12.2.3	Die Feldgleichungen der Elementarstromtheorie	310
12.2.4	Diskussion der Ergebnisse	310
Kennzeichnung und Formelzeichen der wichtigsten Größen		313
Schrifttum		315
<b>Anhang</b>		316
Tafel I Dimensionssysteme		316
Tafel II Schreibweise einiger Gleichungen in den verschiedenen Systemen		317
Tafel III Einheiten im Vierer- und Fünfersystem		318
Wichtige Konstanten, Permittivität und Permeabilität einiger Stoffe		319
Sachverzeichnis		320

# Abschnitt I Einführende Grundlagen

Mathematische Hilfsmittel. Einführende Betrachtungen. Die elektromagnetischen Feldgrößen.

## 1 Mathematische Hilfsmittel

### 1.1 Grundlagen der Vektoralgebra und Vektoranalysis

*1.1.1 Skalar und Vektor, Ortsfunktionen.* Zur Beschreibung der elektromagnetischen Erscheinungen verwendet man richtungsunabhängige Größen, das sind *Skalare* oder skalare Größen, sowie richtungsabhängige Größen insbesondere *Monovektoren*, kurz *Vektoren* genannt, und *Multivektoren* (Kap. 1.2). Von diesen können Monovektoren oder 1-Vektoren einer gerichteten Strecke, Bivektoren oder 2-Vektoren einem orientierten Flächenstück und Trivektoren oder 3-Vektoren einem Volumen umkehrbar eindeutig zugeordnet werden. Im dreidimensionalen Raum  $R^3$  wird ein Bivektor wegen seiner drei wesentlichen Koordinaten meist noch durch einen ihm dual zugeordneten Monovektor ersetzt (Kap. 1.2.1). Bivektoren und Monovektoren werden dann nicht mehr unterschieden, sondern als Vektoren bezeichnet und behandelt. Ebenso werden Trivektor und Skalar wegen ihrer einen wesentlichen Koordinate nicht unterschieden. Auch im folgenden wird im allgemeinen auf eine Kennzeichnung einer Größe als Multivektor verzichtet; Mono- und Bivektoren werden allgemein als vektorielle Größen bezeichnet und nur dort besonders gekennzeichnet, wo der Vektorgrad hervorgehoben werden soll oder bestimmend ist. Siehe Kap. 1.2 sowie Kap. 9.4.3.

Im dreidimensionalen Raum  $R^3$  mit den Einheitsvektoren  $e_x, e_y, e_z$  in Richtung der drei Achsen  $x, y, z$  nach Bild 1.1 (kartesisches Koordinatensystem) erhält man für den Vektor  $A$

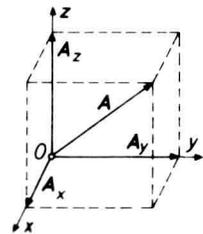
$$A = A_x + A_y + A_z = A_x e_x + A_y e_y + A_z e_z \quad (1.1)$$

mit dem Betrag

$$|A| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \quad (1.2)$$

Hierbei sind die Beträge der Komponenten des Vektors  $A$

$$\left. \begin{aligned} A_x &= A e_x = A \cos \alpha, \\ A_y &= A e_y = A \cos \beta, \\ A_z &= A e_z = A \cos \gamma, \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$



**Bild 1.1** Räumlicher Vektor im kartesischen Koordinatensystem

wo  $\alpha, \beta, \gamma$  die Winkel sind, die der Vektor  $A$  mit den drei Achsen  $x, y, z$  bildet.

Das *Skalarprodukt* zweier Vektoren  $A$  und  $B$ , die den Winkel  $\alpha$  einschließen, ergibt mit Gl. (1.1) einen Skalar

$$AB = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = AB \cos \alpha = c. \quad (1.4)$$

Für die orthogonalen Einheitsvektoren in  $R^3$  erhält man

$$e_i e_i = 1; \quad e_i e_j = 0. \quad (1.5)$$

Dagegen ergibt das dreidimensionale vektorielle Produkt oder *Vektorprodukt* zweier Vektoren  $A$  und  $B$  nach Bild 1.2

$$A \times B = C = - (B \times A) \quad (1.6)$$

einen Vektor senkrecht auf der durch  $A$  und  $B$  gebildeten Fläche mit dem Betrag

$$|A \times B| = C = AB \sin \alpha. \quad (1.7)$$

Das ist der Flächeninhalt des durch die beiden Vektoren  $A$  und  $B$  gebildeten Parallelogramms. Die drei Vektoren  $A$ ,  $B$  und  $C$  bilden ein Rechtssystem. Unter Beachtung der Reihenfolge  $x$ ,  $y$ ,  $z$  und des nichtkommutativen Charakters der vektoriellen Multiplikation erhält man dabei wegen

$$e_i \times e_j = e_k = - (e_j \times e_i); \quad e_i \times e_i = 0 \quad (1.8)$$

für die beiden Vektoren  $A$  und  $B$  mit Gl. (1.1)

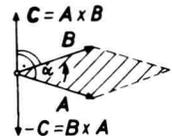
$$A \times B = (A_y B_z - A_z B_y) e_x + (A_z B_x - A_x B_z) e_y + (A_x B_y - A_y B_x) e_z$$

oder, als Determinante angeschrieben,

$$A \times B = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = C. \quad (1.9)$$

**Bild 1.2**

Zum Vektorprodukt zweier Vektoren im dreidimensionalen Raum



Aus der Definition des Vektorprodukts Bild 1.2 folgt, daß einem ebenen Flächenstück ein Vektor zugeordnet werden kann, den man in der dreidimensionalen Vektorrechnung als Flächenvektor  $A$  bezeichnet. Mit dieser Zuordnung ist der Flächenvektor  $A$  ein Vektor senkrecht zur ebenen Fläche  $A$  in Richtung der Normalen  $n$ ; sein Betrag ist gleich der Fläche, während seine Richtung mit dem Umlaufsinn der Flächenrandkurve eine Rechtsschraube bildet. Diese Zuordnung ist jedoch nicht umkehrbar eindeutig, da die Flächenform (Randkurve) bei gleichem Flächeninhalt verschieden sein kann.

Bem.: Man beachte, daß beide Produkte  $AB$  und  $A \times B$  nicht umkehrbar eindeutig sind. Nach Gl. (1.4) kann der Skalar  $c$  durch skalare Multiplikation des Vektors  $A$  mit jeweils beliebig vielen Vektoren  $B$  gewonnen werden, sofern nur

$$B \cos \alpha = c/A.$$

Entsprechendes gilt wegen Gl. (1.7) auch für das Vektorprodukt.

Ist eine skalare oder vektorielle Größe eine Funktion des Ortes wie z.B. die potentielle Energie eines Körpers oder die Schwerkraft der Erde, so bezeichnet man diese Größe als skalare bzw. vektorielle *Ortsfunktion*. Eine skalare Ortsfunktion  $\varphi(x, y, z)$  ordnet als Funktion von drei unabhängigen Veränderlichen in ihrem Bereich jedem Punkt des Raumes einen Skalar zu, der ein Skalarfeld, z.B. ein Temperaturfeld beschreibt. Ist diese Zuordnung eindeutig und verbindet man Punkte gleichen Wertes  $\varphi$ , so erhält man eine Niveaufläche; ist insbesondere  $\varphi$  ein skalares Potential, so heißen diese Flächen *Äquipotentialflächen*. Auf einer Äquipotentialfläche ist  $\varphi = \text{const}$ .

Eine vektorielle Ortsfunktion

$$u(x, y, z) = u_x(x, y, z) e_x + u_y(x, y, z) e_y + u_z(x, y, z) e_z$$

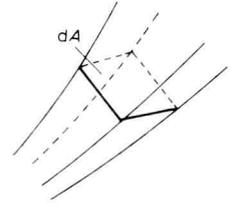
bedeutet, drei Funktionen von jeweils drei unabhängigen Veränderlichen. Eine solche Funktion ordnet in ihrem Bereich jedem Punkt des Raumes einen Vektor zu, der als Feldvek-

tor ein Vektorfeld beschreibt. Dieses kann z.B. ein Kraftfeld oder ein Geschwindigkeitsfeld sein.

Die Richtung des Feldvektors, auch als Feldrichtung bezeichnet, kann man durch *Feldlinien* (Vektorlinien) angeben. Die Tangente in jedem Punkt auf einer Feldlinie gibt die Richtung des in diesem Punkt vorhandenen Feldvektors an. Verfolgt man nach Bild 1.3 die Feldlinien, die den Rand einer kleinen Fläche  $dA$  senkrecht zur Feldrichtung begrenzen, so erhält man eine *Vektorröhre* als röhrenartiges Gebilde. Durch den Querschnitt einer Vektorröhre ist der Fluß des Vektors  $\mathbf{u}$

$$\Psi = \int \mathbf{u} \, dA.$$

Bild 1.3 Vektorröhre



Je dichter die den Röhrenquerschnitt begrenzenden Feldlinien verlaufen, um so größer wird der Betrag des dort vorhandenen Feldvektors. Auf diese Weise kommt man zu einer anschaulichen Darstellung von Vektorfeldern mit quantitativ auswertbaren Feldbildern.

*1.1.2 Elementare Differentialoperationen.* Durch eine räumliche Differentiation erhält man

im Skalarfeld  $\varphi(x, y, z)$  den Vektor  $\text{grad } \varphi$   
 im Vektorfeld  $\mathbf{u}(x, y, z)$  den Skalar  $\text{div } \mathbf{u}$  oder  
 den Vektor  $\text{rot } \mathbf{u}$ .

Ist im betrachteten Bereich eines Skalarfeldes  $\varphi(x, y, z)$  eine stetige, differenzierbare Ortsfunktion, so wird der Zuwachs von  $\varphi$  beim Fortschreiten um  $d\mathbf{n}$  mit den Koordinaten  $dx, dy, dz$  in Richtung des größten Anstiegs der Werte  $\varphi$  (Richtung normal zu einer Niveaufläche  $\varphi = \text{const.}$ )

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz.$$

Wie man aus Bild 1.1 entnimmt, kann man setzen

$$\frac{dx}{dn} = \cos \alpha, \quad \frac{dy}{dn} = \cos \beta, \quad \frac{dz}{dn} = \cos \gamma$$

und diese Ausdrücke jeweils als Kosinus der Richtungswinkel eines Vektors betrachten. Nach Gl. (1.3) lautet dann der so erhaltene Vektor (Monovektor)

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (1.10)$$

er heißt *Gradient* der skalaren Ortsfunktion  $\varphi$ . Sein Betrag ist

$$|\text{grad } \varphi| = \frac{d\varphi}{dn} = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}. \quad (1.11)$$