taschentext

75

Werner Schmidt

Lehrprogramm Vektorrechnung

mit Beispielen aus der Physik

Werner Schmidt

Lehrprogramm Vektorrechnung

mit Beispielen aus der Physik

Physik Verlag · Verlag Chemie

Werner Schmidt
Am Gröbenbach 1
8031 Graßlfing

Dieses Buch enthält 131 Abbildungen

Verlagsredaktion: Dr. Hans F. Ebel

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Schmidt, Werner:
Lehrprogramm Vektorrechnung: mit Beispielen aus d. Physik. —
1. Aufl. — Weinheim: Physik-Verlag;
Weinheim: Verlag Chemie, 1978.
(Taschentext; 75)
ISBN 3-87664-574-3 (Physik-Verl.)
ISBN 3-527-21074-1 (Verl. Chemie)

Druck und Bindung: Druckerei Diesbach, D-6940 Weinheim
Umschlaggestaltung: Weisbrod Werbung, D-6943 Birkenau
Printed in West Germany

Vorwort

Diese programmierte Darstellung der Vektorrechnung richtet sich an Schüler der Kollegstufe und Studienanfänger der Physik. Sie hat eine lange Erprobungsphase und vier Fassungen hinter sich. Darin kommt zum Ausdruck, wie schwierig eine praxisbezogene Brücke zwischen mathematischer Exaktheit und physikalischer Anschaulichkeit zu schlagen ist. Die Nöte von Studienanfängern mit der Vektorrechnung, die der Autor während seiner Tätigkeit am Fachbereich Physik der Universität Regensburg miterleben mußte, waren der entscheidende Antrieb zur Fortführung und Verbesserung des Textes. Aufgrund der Erprobungserfahrungen besteht Grund zu der Annahme, daß nunmehr ein Weg durch die Vektorrechnung vorliegt, der in allen Schritten leicht nachvollziehbar und den mathematischen Vorkenntnissen (Differential- und Integralrechnung) angepaßt ist.

Die Gestaltung als verzweigtes Lehrprogramm erleichtert die Selbsterarbeitung dieses relativ schwierigen Gebietes der Mathematik. Trotzdem handelt es sich um keinen „Häppchen-Text“, der weder zum Wiederholen noch zum Nachschlagen taugt. Die Lernschritte sind vielmehr wie in einem normalen Buch angeordnet, so daß ganz eilige Leser auch ohne Bearbeitung der Fragen und Aufgaben vorangehen können. Damit man nur wenig blättern muß, sind die Lösungen auf der jeweils folgenden geradezahligen Seite zu finden.

Stoffauswahl und -anordnung im ersten Teil (Vektoralgebra) folgen sachimmanenten Kriterien, im zweiten Teil (Vektoranalysis) wurden sie der zeitlichen Abfolge angepaßt, in der Methoden und Begriffe der Vektorrechnung in modernen Physikkursen gebraucht werden. Hinsichtlich Schwierigkeitsgrad und Auswahl physikalischer Beispiele setzt das Buch jedoch nur normale Schulkenntnisse voraus, etwa das Induktions-Gesetz oder den Begriff Drehmoment.

Für zahlreiche wertvolle Hinweise und Verbesserungsvorschläge habe ich den Herren Prof. Dr. W. Gebhardt, Prof. Dr. J. Keller, Prof. Dr. U. Krey und Prof. Dr. U. Rößler (alle Fachbereich Physik, Universität Regensburg) sehr zu danken. Die Reinschrift des Manuskriptes erledigte Frau U. Bodemer mit großer Sorgfalt.

München, im März 1978

Werner Schmidt

taschentext

Gesamt-Übersicht

Stand 1978

Chemie

Aylward/Findlay T 27
Datensammlung Chemie
in SI-Einheiten

Bell T 19
Säuren und Basen —
und ihr quantitatives Verhalten

Bellamy T 28
Lehrprogramm Orbitalsymmetrie

Borsdorf/Dietz/Leonhardt/Reinhold T 32
Einführung in die Molekülsymmetrie
Ein Lehrprogramm

Braig T 47
Lehrprogramm Atombau und Periodensystem

Budzikiewicz T 5
Massenspektrometrie
Eine Einführung

Christensen/Palmer T 23
Lehrprogramm Enzymkinetik

Cooper T 6
Das Periodensystem der Elemente

Cordes T 70
Allgemeine Chemie, Bd. 2
Struktur und Bindung

Coulson T 53
Geometrie und elektronische Struktur von Molekülen

Eberson T 13 u. 14
Organische Chemie I und II

Experimente Chemie* T 74

Fahr/Richter T 61
Spektren und Struktur organischer Verbindungen*

Friebolin T 15
NMR-Spektroskopie —
Eine Einführung mit Übungen

Günzler/Böck T 43/44
IR-Spektroskopie

Gunstone T 39
Lehrprogramm Stereochemie

Hallpap/Schütz T 31
Anwendung der ^{1}H-NMR-Spektroskopie

Hamann/Vielstich T 41
Elektrochemie I
Leitfähigkeit, Potentiale, Phasengrenzen

Haussühl T 64
Kristallgeometrie

Haussühl T 65
Kristallstrukturbestimmung*

Hawes/Davies T 38
Aufgabensammlung Physikalische Chemie
in SI-Einheiten

Heslop T 9
Praktisches Rechnen in der Allgemeinen Chemie

Kettle T 3
Koordinationsverbindungen

Price T 10
Die räumliche Struktur organischer Moleküle

Schomburg T 48
Gaschromatographie

Swinbourne T 37
Auswertung und Analyse kinetischer Messungen

Sykes T 8
Reaktionsaufklärung
Methoden und Kriterien der organischen Reaktionsmechanistik

Sykes T 20
Reaktionsmechanismen der Organischen Chemie

Tobe ↑ 35
Reaktionsmechanismen der Anorganischen Chemie

Wiegand ↑ 55
Werkstoffkunde
Bd. 1 Eisenwerkstoffe

Biologie und Medizin

Benfey ↑ 11
Mechanismen organisch-chemischer Reaktionen

Beyermann u. a. ↑ 17
Prüfungsfragen Chemie für Mediziner

Beyermann ↑ 63
Molekülmodelle*

Campbell ↑ 78
Ökologie der Mikroorganismen*

Clayton ↑ 33
Photobiologie
Bd. 1: Physikalische Grundlagen

Clayton ↑ 34
Photobiologie
Bd. 2: Die biologischen Funktionen des Lichts

Collee ↑ 79
Angewandte Medizinische Mikrobiologie*

Dawes/Sutherland ↑ 73
Physiologie der Mikroorganismen*

v. Dehn ↑ 30
Vergleichende Anatomie der Wirbeltiere

Experimente Biologie* ↑ 76

Friemel/Brock ↑ 21
Grundlagen der Immunologie

Funk-Kolleg Biologie ↑ 49 u. 50

Hammen ↑ 36
Quantitative Biologie

Hornung ↑ 52
Prüfungsfragen Biomathematik
Zum Gegenstandskatalog der Approbationsordnung für Ärzte

Nachtigall ↑ 4
Zoophysiologischer Grundkurs

Nelson/Robinson/Boolootian ↑ 1 u. 2
Allgemeine Biologie I und II

Primrose ↑ 40
Einführung in die Virologie

Steitz ↑ 16
Die Evolution des Menschen

Wilkinson ↑ 26
Einführung in die Mikrobiologie

Mathematik

Abt ↑ 59
Biostatistik*
Biomathematik für Mediziner

Brickell ↑ 51
Matrizen und Vektorräume

Fuhrmann/Zachmann ↑ 45
Übungsaufgaben zur Mathematik für Chemiker

Kleppner/Ramsey ↑ 7
Lehrprogramm Differential- und Integralrechnung

Schmidt ↑ 46
Lehrprogramm Statistik

Schmidt ↑ 54
Intensivkurs Mathematik
Programmierte Prüfung für das Selbststudium

Schramm ↑ 22
Grundlagen der Mathematik für Naturwissenschaftler
Zahlen — Funktionen — Lineare Algebra

Topping ↑ 29
Fehlerrechnung

Williams ↑ 25
Fourierreihen und Randwertaufgaben

Physik und Astronomie

Fleischmann/Loos ↑ 60
Aufgaben zur Experimentalphysik*

Marks ↑ 24
Relativitätstheorie
Eine Einführung in die klassische, spezielle und allgemeine Theorie

Müller ↑ 12
Grundzüge der Astronomie

Schmidt ↑ 75
Lehrprogramm Vektorrechnung

Wick ↑ 18
Elementarteilchen
An den Grenzen der Hochenergiephysik

---

* In Vorbereitung

Inhalt

1. Vektoralgebra

1.1 Der Begriff des Vektors

---

1 Betrachten Sie bitte die folgende Liste physikalischer Größen

Zeit	Wellenlänge
Geschwindigkeit	Kraft
Temperatur	Beschleunigung

Einige dieser Größen können durch *Maßzahl* und *Maßeinheit* eindeutig festgelegt werden.

Beispiel:
Durch die Angabe t=5 s ist auf physikalisch eindeutige Weise eine Zeitspanne festgelegt. Dabei ist "5" die Maßzahl und "s" (Sekunde) die Maßeinheit.

Stellen Sie nun fest, welche der oben angegebenen physikalischen Größen ebenfalls durch Maßzahl und Maßeinheit eindeutig festgelegt werden können!

Weiter nach 2

---

2 Sie sehen, daß einige Größen eine zusätzliche Angabe benötigen, um eindeutig festgelegt zu sein, nämlich die Richtung.

Beispiel:
Die Geschwindigkeit eines Flugzeuges betrage 230 ms^{-1} in Richtung NW (Nordwest).

Eine *Richtung* ist durch eine Schar paralleler Strahlen im Raum festgelegt; die graphische Veranschaulichung erfolgt durch Pfeile. Die mathematische Festlegung von Richtungen kann nur mit Hilfe eines Bezugssystems erfolgen. Mehr darüber erfahren Sie in Abschnitt 1.3.

Wir haben festgestellt, daß es zwei Arten physikalischer Größen gibt. Man definiert daher:

Skalare sind durch Maßzahl und Maßeinheit, *Vektoren* durch Maßzahl, Maßeinheit und Richtung eindeutig bestimmt. Zur Kennzeichnung von Vektoren setzen wir über das betreffende Formelzeichen einen kleinen Pfeil. So soll z.B. $\vec{v}$ der Geschwindigkeitsvektor sein.

Welche der in 1 genannten Größen sind Vektoren?

Weiter nach 3

---

3 Durch die Einteilung in Skalare und Vektoren sind die meisten physikalischen Größen erfaßt. Daneben gibt es noch andere Gebilde, die sog. *Tensoren*, mit denen wir uns allerdings im Rahmen dieses Lehrprogramms nicht beschäftigen können. Zu den Tensoren zählen z.B. Größen, die Materialeigenschaften inhomogener oder anisotroper Stoffe beschreiben, wie der Elastizitätstensor, der Brechungstensor und der Leitfähigkeitstensor.

Setzen Sie die fehlenden Wörter ein:
Wenn eine Größe durch Maßzahl und Maßeinheit eindeutig angegeben werden kann, handelt es sich um einen ....
Braucht eine Größe zusätzlich noch die Richtungsangabe, gehört sie zur Gruppe der ....

Wir betrachten vorläufig nur Größen, deren Wert nicht vom Ort abhängt. In Kap. 2 werden wir Skalare und Vektoren kennenlernen, die in verschiedenen Raumpunkten verschiedene Werte annehmen können. Diese Größen werden mathematisch durch *Felder* beschrieben.

Zur Wiederholung:
Eine Richtung ist durch eine Schar............................
festgelegt. Graphisch wird eine Richtung durch ....
veranschaulicht.

Weiter nach 4

Antwort 1: Temperatur und Wellenlänge

$\boxed{4}$ Die Definition eines Vektors durch Maßzahl, Maßeinheit und Richtung reicht nicht aus, um mit Vektoren rechnen zu können. Anhand des folgenden Beispiels erklären wir eine Verknüpfung von Vektoren.

Beispiel:
Zwei Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ mögen am gleichen Punkt eines Körpers angreifen (s. Abb. 1). Es zeigt sich nun, daß man die beiden Kräfte durch die resultierende Kraft $\vec{F}$ ersetzen kann. Man erhält $\vec{F}$ durch eine geometrische Konstruktion, die sogenannte *Parallelogrammkonstruktion*: sind $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ durch Pfeile maßstäblich dargestellt, so ergibt sich $\vec{F}$ als eine der beiden Diagonalen des durch $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ aufgespannten Parallelogramms.

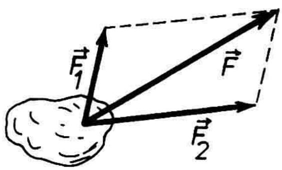


Abb. 1: Die Kraftvektoren $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ können hinsichtlich ihrer physikalischen Wirkung durch die Vektorsumme $\vec{F}$ ersetzt werden.

Es ist eine experimentell gesicherte Erkenntnis, daß sich viele physikalische Größen in gleicher Weise wie die Kräfte zusammenfassen lassen. Man bezeichnet den durch Parallelogrammkonstruktion gewonnenen Vektor als *Vektorsumme* oder *Summenvektor*. Das beschriebene Verfahren, aus zwei Vektoren die Vektorsumme zu bilden, heißt *Vektoraddition*.

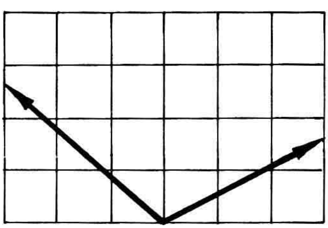


Abb. 2: zu $\boxed{4}$

In Abb. 2 sehen Sie zwei Vektoren maßstäblich gezeichnet. Konstruieren Sie die Vektorsumme! Bestimmen Sie die Richtung des Summenvektors!

Weiter nach 5

---

5 Es muß hervorgehoben werden, daß die Vektoraddition nicht willkürlich definiert, sondern von der Natur vorgegeben ist. Wir präzisieren daher die Definition eines Vektors:

Eine physikalische Größe ist ein Vektor, wenn sie durch Maßzahl, Maßeinheit und Richtung eindeutig bestimmt ist und der Vektoraddition gehorcht.

Wenn sich umgekehrt eine physikalische Größe *nicht* vektoriell addieren läßt, obwohl sie die ersten drei Kriterien erfüllt, ist es *keine* vektorielle Größe.

Beispiel:
Eine Drehung ist durch den Drehwinkel und die Drehachse eindeutig beschreibbar, erfüllt also die ersten drei Kriterien. Es ist aber nicht möglich, Drehungen um zwei sich nicht schneidende Achsen durch eine einzige Drehung zu ersetzen (Abb. 3). Eine Drehung ist daher kein Vektor.

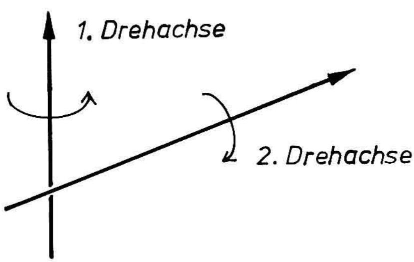


Abb. 3: Drehungen um verschiedene Drehachsen lassen sich nicht vektoriell addieren.

Antworten 2: Geschwindigkeit $\vec{v}$, Kraft ($\vec{F}$ oder $\vec{K}$), Beschleunigung ($\vec{a}$ oder $\vec{b}$)

3: Einzusetzen waren der Reihe nach: Skalar, Vektoren, paralleler Strahlen (im Raum), Pfeile

Drücken Sie nun bitte in möglichst wenigen Worten aus, wie man zwei Vektoren addiert!

Weiter nach 6

---

6 Neben der graphischen Methode der Vektoraddition werden wir im nächsten Abschnitt auch eine einfache algebraische kennenlernen. Es ist aber trotzdem sinnvoll, die Parallelogrammkonstruktion an einigen Beispielen zu üben, nicht zuletzt wegen der Anschaulichkeit.

In Abb. 4 sehen Sie, wie sich die Vektoreigenschaft der Geschwindigkeit bei einer Flußdurchquerung äußert. Wenn ein Schwimmer stets senkrecht auf das gegenüberliegende Ufer zuschwimmt, bewegt er sich in Wirklichkeit schräg auf das Ufer zu. Die tatsächliche Bewegungsrichtung ergibt sich aus dem Verhältnis von Schwimm- zu Flußgeschwindigkeit.

Sind mehrere Vektoren zu addieren, wie z.B. die vier in Abb. 5 gezeichneten Kräfte, geht man schrittweise vor. Man bildet zunächst den Summenvektor aus zwei Kräften, dann damit die Summe mit der dritten Kraft usw.

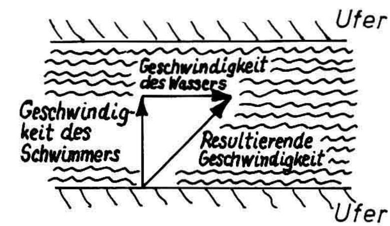


Abb. 4: Vektoraddition zweier Geschwindigkeiten.

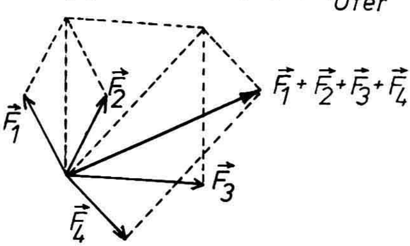
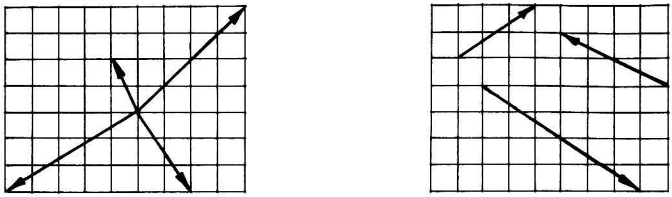


Abb. 5: Die Vektorsumme der Kräfte $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ kann schrittweise durch Parallelogrammkonstruktion ermittelt werden.



a b

Abb. 6: Addieren Sie diese Vektoren zur Übung!

Addieren Sie nun bitte jeweils die in Abb. 6a und 6b gezeichneten Vektoren. Sie brauchen übrigens hierzu die Parallelogramme nicht vollständig zeichnen. Es genügt, den zu addierenden Vektor parallel zu sich selbst an die Spitze des vorhergehenden Vektors zu verschieben.

Weiter nach 7

---

7 Neben den vier Eigenschaften Maßzahl, Maßeinheit, Richtung und Vektoraddition, die eine vektorielle physikalische Größe zeigen muß, gibt es noch eine weitere. Die soll an einem einfachen Beispiel erläutert werden.

Beispiel:

Jeder Körper besitzt im Gravitationsfeld der Erde ein Gewicht, d.h. er übt auf seine Unterlage eine Gewichtskraft aus. In einem Koordinatensystem, dessen z-Achse senkrecht von der Erdoberfläche nach oben zeige, ist der Vektor der

---

Antworten 4: Der Summenvektor liegt genau parallel zur Blattkante.

5: Die Lösung lautet sinngemäß: Die Summe zweier Vektoren ergibt sich als eine Diagonale in dem durch die beiden Vektoren aufgespannten Parallelogramm. Alle drei Vektoren müssen vom gleichen Punkt ausgehen.

Gewichtskraft antiparallel zu $\hat{z}$ (s. Abb. 7).
In einem anderen Koordinatensystem, das gegenüber dem ursprünglichen gedreht ist, liegt der gleiche Vektor i.a. nicht mehr antiparallel zur z'-Achse. Die Gewichtskraft $\vec{F}_g$ hat also im gestrichelten Koordinatensystem von Null verschiedene x'- und y'-Komponenten und daher eine andere mathematische Darstellung.

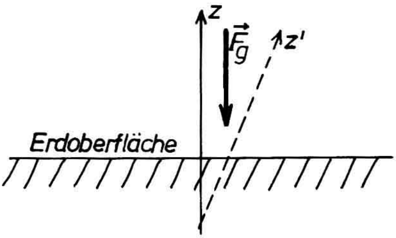


Abb. 7

Obwohl nun ein Vektor in zwei verschiedenen Koordinatensystemen verschiedene Darstellungen besitzen kann, muß es sich um die gleiche physikalische Größe handeln. Das heißt: Ein Vektor darf nicht von der mathematischen Beschreibung abhängen. Diese Bedingung führt auf bestimmte *Transformationseigenschaften* von Vektoren.
Wir lassen es an dieser Stelle mit dieser anschaulichen Erklärung des Transformationsverhaltens von Vektoren bewenden. In Abschnitt 1.10. werden Sie die mathematische Formulierung kennenlernen.
Zeigt eine physikalische Größe das geforderte Transformationsverhalten nicht, handelt es sich um keinen Vektor.

Wir fassen zusammen:
Eine physikalische Größe ist ein Vektor, wenn sie
a) durch Maßzahl, Maßeinheit und Richtung vollständig beschrieben werden kann,
b) der Vektoraddition genügt und
c) aufgrund bestimmter Transformationseigenschaften unabhängig von verwendeten Koordinatensystemen ist.

Weiter nach $\boxed{8}$

1.2 Addition und Subtraktion von Vektoren

$\boxed{8}$ Nach der begrifflichen Klärung vektorieller Größen gehen wir nun dazu über, mathematische Eigenschaften und Rechengesetze abzuleiten.

Wir haben festgestellt, daß die Vektoraddition nach der Parallelogrammkonstruktion Bestandteil der Definition eines Vektors ist. Wir schreiben für die Vektorsumme aus zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ analog zur Arithmetik $\vec{a} + \vec{b}$. Man kann für die Vektoraddition geometrisch eine Reihenfolge erklären, wenn man jeweils den zweiten Vektor an die Spitze des ersten hängt (Abb. 8). Die Summe $\vec{a} + \vec{b}$ ist dann offensichtlich gleich $\vec{b} + \vec{a}$, was das *Kommutativgesetz*

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

ausdrückt.

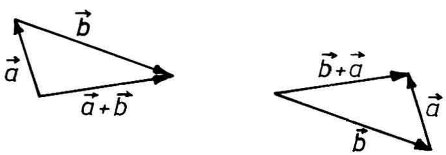


Abb. 8: Geometrische Erklärung einer Reihenfolge der Vektoraddition.

Ebenfalls aus der geometrischen Definition der Vektoraddition folgt, daß man drei oder mehrere Vektoren auf beliebige Weise zusammenfassen kann. Diese Eigenschaft drückt das *Assoziativgesetz*

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

Antwort $\boxed{6}$: Wenn Sie richtig und genau gezeichnet haben, erhalten Sie in Abb. 6a den Nullvektor und in Abb. 6b einen parallel zur Papierkante nach rechts gerichteten Vektorpfeil.

aus. Kommutativität und Assoziativität der Vektoraddition erlauben es, auf die Klammern zu verzichten und jede Summe in der Form

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \ldots$$

zu schreiben.

Frage:
Kann man zwei beliebige Vektoren immer addieren?

Weiter nach 9

---

9 Um die Subtraktion von Vektoren erklären zu können, definieren wir zunächst, was unter dem Vektor $-\vec{a}$ zu verstehen ist. In Analogie zu den Skalaren sei $-\vec{a}$ ein Vektor, der die physikalische Wirkung des Vektors $\vec{a}$ aufhebt. Nach unseren Erfahrungen ist dies der Fall, wenn $-\vec{a}$ gleiche Maßzahl und Maßeinheit, aber die entgegengesetzte Richtung wie $\vec{a}$ besitzt.

Welche Länge hat der Summenpfeil, wenn man geometrisch die Vektorsumme aus $\vec{a}$ und $-\vec{a}$ bildet?

Weiter nach 10

---

10 Die Addition $\vec{a} + (-\vec{a})$ führt zu einem Vektor mit der Maßzahl Null, den wir als *Nullvektor* $\vec{0}$ definieren. Es gilt also

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.$$

Die *Subtraktion* zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ führen wir nun auf die Addition zurück durch die Erklärung

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Die Subtraktion ist also nichts weiter als ein Spezialfall der Addition, was man auch bei der geometrischen Konstruktion sieht (Abb. 9). Man braucht nämlich nur die Richtung des zweiten Vektors um 180° umzudrehen und dann das gewohnte Parallelogramm zu bilden.

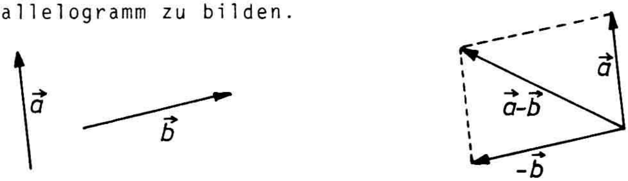


Abb. 9: Die Differenz $\vec{a} - \vec{b}$ ist erklärt als Summe $\vec{a} + (-\vec{b})$

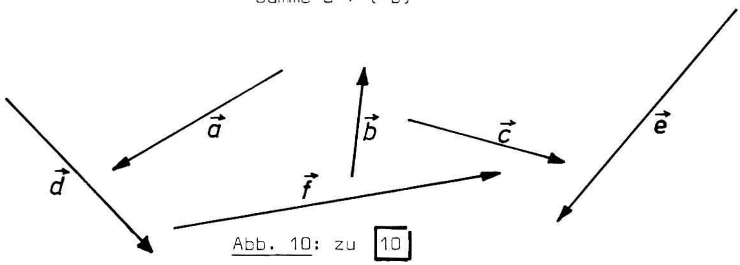


Abb. 10: zu $\boxed{10}$

In Abb. 10 sehen Sie drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Konstruieren Sie die Differenz $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{c} - \vec{b}$ und $\vec{c} - \vec{a}$!

Weiter nach $\boxed{11}$

$\boxed{11}$ Anhand von Kongruenzbetrachtungen stellt man fest, daß Vektorsumme und Vektordifferenz im gleichen Parallelogramm zu finden sind, nämlich als die beiden Diagonalen (Abb. 11).
Ebenso kann man geometrisch leicht beweisen, daß die Gleichung

---

Antworten $\boxed{8}$: Nein. Man kann nur Vektoren gleicher Größenart nach der Parallelogramm-Methode addieren (also z.B. Kraft und Kraft, Geschwindigkeit und Geschwindigkeit usw.).

$\boxed{9}$: Der Summenpfeil hat die Länge 0.