МЕТОДЫ и АЛГОРИТМЫ решения транспортной задачи

ГОССТАТИЗДАТ
ЦСУ СССР
1963

МЕТОДЫ и АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Сборник статей под редакцией

В. С. НЕМЧИНОВА, Л. Е. МИНЦА,
Л. А. СЕРЕБРОВСКОГО

ВЫПУСК 1

ГОССТАТИЗДАТ
ЦСУ СССР

МОСКВА 1963

Совет по изучению производительных сил при Госэкономсовете СССР. Лаборатория математических методов.

Серия «Научная информация по экономике и статистике».

Настоящий сборник содержит переводы статей зарубежных авторов по линейному программированию (транспортной задаче). Сборнику предпослана обзорная статья Е. Г. Гольштейна, в которой дается постановка транспортной задачи и ее обобщений и излагаются с точки зрения единой классификации методы решения этих задач, в частности методы, содержащиеся в переводах. Составитель сборника Я. П. Герчук.

Е. Г. ГОЛЬШТЕЙН

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯ

§ 1. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

До недавнего времени область применения математики ограничивалась так называемыми точными науками — физикой, механикой и рядом технических дисциплин. В последние десятилетия наблюдается неуклонное расширение сферы приложения математических методов. На наших глазах оформляются в самостоятельные разделы науки такие новые направления, как математическая биология, математическая лингвистика. Точные методы прокладывают себе дорогу в таких, казалось бы, далеких от математики областях, какими принято считать медицину и юридическую науку. Экономическая наука не осталась в стороне от этого общего процесса — математические методы все глубже проникают в экономику, создавая основу для более рационального и быстрого решения важных задач управления и планирования в народном хозяйстве.

Экономическая наука изучает чрезвычайно глубокие и тонкие явления. Предметом ее исследований являются не только объекты природы, но и взаимоотношения людей. Вот почему внедрение в экономическую науку математических методов — процесс сложный и длительный.

В большинстве случаев математические модели, описывающие те или иные экономические явления, должны учитывать много самых разнообразных факторов. Это приводит к серьезным вычислительным трудностям, которые до появления цифровых вычислительных машин (ЦВМ) были просто непреодолимы. Однако не следует думать, что решение сложных экономических задач зависит только от наличия ЦВМ. Даже простейшие задачи, возникающие в экономике, сводятся к анализу такого астрономического числа вариантов, который непосилен не только существующим ЦВМ, но и машинам обозримого будущего. Для того чтобы решать такие задачи, необходимо иметь методы, позволяющие, сравнив лишь небольшую часть возможных вариантов, выбрать оптимальный вариант. Следует отметить, что до появления экономических приложений математика не обладала такими методами. Таким образом, экономическая наука не только обогатилась за счет математики, но и способствовала развитию самой математики. Потребности экономики привели к созданию целой серии новых математических дисциплин, таких как линейное программирование, динамическое программирование, нелинейное программирование, теория игр, теория расписаний и др. Методы этих дисциплин позволяют в ряде случаев существенно сократить трудоемкость решения задачи, что делает возможным получение искомого результата в требуемый срок.

Однако численному анализу практической задачи всегда предшествует важный и зачастую сложный процесс перевода ее на формально-математический язык — процесс построения экономико-математической модели задачи. Построение такой модели требует высокой квалификации (как экономической, так и математической). С одной стороны, модель не должна быть слишком упрощенной, иначе она не будет соответствовать изучаемому явлению. С другой стороны, учет всех имеющихся факторов обычно настолько осложняет модель, что последующий численный анализ оказывается практически невозможным. Искусство составителя модели как раз и заключается в разумном согласовании этих противоречивых требований: он должен за счет исключения мало существенных факторов и связей предельно упростить модель, но так, чтобы сохранить в основном ее соответствие изучаемому объекту.

Многие проблемы планирования народного хозяйства и управления производственными процессами сводятся к выбору оптимального (в некотором смысле) варианта из числа имеющихся возможных вариантов. Общая схема составления экономико-математических моделей для подобных проблем состоит в следующем.

Вначале выбирается система неизвестных, определяющая вариант; решение задачи заключается в отыскании оптимальных значений составляющих системы. Иногда эти неизвестные называют параметрами управления. Далее выбирается и выражается через параметры управления так называемая целевая функция задачи, или показатель качества.

Целевая функция служит для сравнения различных значений параметров управления. Чем больше (иногда чем меньше) значение целевой функции при заданном наборе параметров, тем более приемлем этот набор, тем лучший вариант он определяет. Обычно параметры управления не могут принимать произвольные значения; их выбор ограничен целым рядом дополнительных условий, определяемых сущностью задачи. Выбором главнейших из этих условий и составлением системы существенных ограничений завершается процесс формирования экономико-математической модели задачи. Каждый из трех описанных этапов требует глубокого проникновения в экономическую сущность задачи и, вместе с тем, хорошей осведомленности относительно имеющихся математических методов.

Итак, описанный процесс формализации задачи сводит ее к отысканию набора параметров, который, удовлетворяя всем имеющимся ограничениям, придает возможно большее (иногда возможно меньшее) значение выбранной целевой функции.

Наиболее широкое распространение имеют линейные модели, в которых функция цели линейно зависит от параметров управления, а ограничения — линейные уравнения и неравенства. Это связано с тем, что:

1) линейная гипотеза вполне приемлема для многих экономических постановок,

2) методы анализа линейных моделей, составляющие содержание линейного программирования, в настоящее время достаточно хорошо разработаны.

Сложность анализа линейной модели, или, как принято говорить, задачи линейного программирования, определяется, во-первых, видом системы ограничений, а во-вторых, числом неизвестных задачи. В соответствии с этим задачи линейного программирования делятся на общие и специальные. К общим относятся задачи с произвольной системой линейных ограничений. Если же система ограничений задачи обладает некоторыми свойствами, упрощающими численный анализ, то ее включают в тот или иной специальный класс.

Естественно, что общие методы линейного программирования, разработанные для решения произвольных линейных задач, могут использоваться, в частности, и для анализа специальных задач. Однако, если не учитывать специфику задачи, это приводит к необоснованному увеличению трудоемкости ее решения. Часто число переменных специальной задачи бывает настолько большим, что применение к ней общего метода оказывается практически невозможным из-за огромного объема вычислений. Поэтому исследования, направленные на выявление специальных свойств задачи и разработку методов, наиболее полно учитывающих эти свойства, имеют огромное практическое значение. Сборник переводов, предлагаемый вниманию советского читателя, посвящен одной из наиболее часто используемых моделей линейного программирования — транспортной задаче. Большинство авторов сборника — видные специалисты по линейному и нелинейному программированию, работы которых оказали существенное влияние на развитие этих новых дисциплин. Все статьи сборника, кроме одной (Дуаера и Галлера), относятся к транспортной задаче в ее классической постановке. Между тем за последнее время эта задача была обобщена в различных направлениях, так что сейчас уже можно говорить о целом классе задач транспортного типа. В данной статье дается краткий обзор задач транспортного типа и существующих методов анализа этих задач. При этом основное внимание уделяется формулировкам математических моделей, а также классификации и идейным основам соответствующих численных методов. В частности, методы, излагаемые в различных статьях сборника, рассматриваются с точки зрения единой классификации. Все это, на наш взгляд, должно облегчить изучение отдельных статей сборника и способствовать созданию у читателя цельного представления о задачах транспортного типа.

РАЗДЕЛ 1

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

§ 2. ОСОБЕННОСТИ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Транспортная задача является одной из важнейших специальных моделей линейного программирования. Еще до появления первых работ по линейному программированию некоторые частные постановки этой задачи изучались рядом специалистов по транспорту. В этой связи следует упомянуть работу А. Н. Толстого [1]. Первая строгая постановка транспортной задачи принадлежит Хичкоку [2], в честь которого задача эта иногда именуется в статьях западных авторов по линейному программированию проблемой Хичкока.

Сущность транспортной задачи состоит в следующем.

Пусть в некоторых пунктах $A_1, A_2, \ldots, A_m$ производится какой-то однородный продукт, причем объем производства в пункте A_i составляет a_i единиц продукта. Этот продукт предназначен для потребления в пунктах $B_1, B_2 \ldots, B_n$; объем потребления в пункте B_j равен b_j единиц продукта. Пункты $A_1, A_2, \ldots, A_m$ и $B_1, B_2, \ldots, B_n$ будем называть соответственно пунктами-производителями и пунктами-потребителями. Положим, что из каждого пункта-производителя возможна транспортировка продукта в любой пункт-потребитель, причем транспортные издержки, приходящиеся на единицу продукта при перевозке его из A_i в B_j, заданы и составляют c_{ij} денежных единиц. Задача заключается в построении такого плана перевозок, при котором запросы всех пунктов-потребителей были бы удовлетворены, весь продукт из пунктов-производителей был бы вывезен и при этом суммарные транспортные расходы достигли бы возможно меньшего значения.

Примем в качестве параметров управления систему величин $\{x_{ij}\}$, где x_{ij} означает количество продукта, перевозимое из A_i в B_j. В таком случае система ограничений задачи примет вид

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \tag{2}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Первая группа условий обеспечивает полный вывоз продукта из всех пунктов-производителей, вторая — является следствием полного удовлетворения спроса пунктов-потребителей, наконец, третья группа условий указывает на отсутствие перевозок от потребителей к производителям. В качестве целевой функции задачи в данном случае принимается суммарная стоимость всех перевозок, равная

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}. \tag{4}$$

Итак, решение транспортной задачи сводится к минимизации линейной формы (4), неизвестные которой связаны условиями (1)—(3). Как легко заметить, для совместности системы уравнений (1), (2) необходимо, чтобы соблюдался баланс производства и потребления, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{5}$$

Равенство (5) оказывается не только необходимым, но и достаточным условием для совместности системы ограничений (1)—(3). Отметим также, что любые $m + n—1$ уравнений системы (1), (2) линейно независимы, а оставшееся уравнение является их следствием.

Введем несколько определений, используемых обычно в работах по транспортной задаче.

Набор чисел $x_{ij}(i=1, 2, ..., m; j=1,2, ...,n)$, удовлетворяющий условиям (1) — (3), принято называть планом задачи и обозначать

$$X = \{x_{ij}\}.$$

План, обеспечивающий минимум линейной форме (4), называется оптимальным планом или решением задачи.

Путь между двумя пунктами задачи назовем коммуникацией, связывающей эти пункты.

С каждым планом задачи можно связать систему его основных коммуникаций, т. е. таких коммуникаций, вдоль которых запланированы перевозки (положительные). Если из основных коммуникаций плана невозможно составить замкнутый маршрут (коммуникации могут проходиться в обоих направлениях), то план называется опорным. Из теории линейного программирования вытекает существование опорного оптимального плана. Поэтому при решении транспортной задачи можно ограничиться анализом одних только опорных планов.

Иногда условия (1) и (2) транспортной задачи удобно записывать в векторной форме. Пусть P_{ij} — $(n + m)$ - мерный вектор, i-ая и $(m + j)$-ая компоненты которого — единицы, а остальные составляющие — нули; P — вектор той же размерности с компонентами $a_1, a_2..., a_m; b_1, b_2..., b_n$. С учетом введенных обозначений условия (1)и (2) переходят в

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} P_{ij} = P. \tag{6}$$

В терминологии общей задачи линейного программирования
P_{ij} — векторы условий,
P — вектор ограничений задачи.

Как видим, векторы условий транспортной задачи имеют чрезвычайно простую структуру. Этим, собственно, и объясняется существенное упрощение методов линейного программирования применительно к задаче (1) — (4). Нетрудно проверить, что введенное ранее понятие опорного плана транспортной задачи может быть сформулировано еще и так: план $X = \{x_{ij}\}$ называется опорным, если векторы условий P_{ij}, для которых $x_{ij} > 0$, линейно независимы. Аналогичное определение опорного плана используется для общей задачи линейного программирования.

Важным для транспортной задачи, как и для любой линейной задачи, является понятие невырожденности. План транспортной задачи называется нераспадающимся, если любые два пункта задачи могут быть соединены путем, составленным из основных коммуникаций плана. Если все опорные планы задачи — нераспадающиеся, то задачу называют невырожденной.

Необходимое и достаточное условие невырожденности задачи (1) — (4) заключается в требовании, чтобы суммарное производство любой неполной группы пунктов-производителей не совпадало с суммарными запросами ни одной из групп пунктов-потребителей.

Отсюда следует, что незначительное изменение параметров a_i и b_j транспортной задачи вида

$$a_i' = a_i + \varepsilon,\ i = 1, 2, \ldots, m;$$
$$b_j' = \begin{cases} b_i &, j = 1, 2, \ldots, n-1, \\ b_n + m\varepsilon, & j = n. \end{cases} \tag{7}$$

делает ее невырожденной, если ε — достаточно малое положительное число.

Характерное свойство задачи (1)—(4), часто используемое в приложениях транспортной модели, состоит в следующем: если объемы производства и потребления — целые числа, то среди решений задачи обязательно найдется план с целочисленными перевозками. Это свойство является следствием специфики условий (1), (2), благодаря которой каждая перевозка в любом опорном плане равна либо нулю, либо алгебраической сумме некоторых из чисел a_i, b_j.

Многие важные результаты линейного программирования связаны с теорией двойственности. Согласно этой теории каждой задаче линейного программирования может быть сопоставлена двойственная ей линейная задача. Совместное рассмотрение обеих задач оказывается весьма полезным как при качественных исследованиях в линейном программировании, так и при разработке численных методов этой дисциплины[1].

В соответствии с общими правилами задача, двойственная по отношению к транспортной задаче (1)—(4), состоит в максимизации линейной формы

$$\sum_{j=1}^{n} v_j b_j - \sum_{i=1}^{m} u_i a_i. \tag{8}$$

при условиях

$$v_j - u_i \leqslant c_{ij},\ i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

[1] Подробное изложение теории двойственности и связанных с ней методов линейного программирования читатель может найти в книге [3] гл. 4.

Для краткости будем называть задачу (8)—(9) двойственной транспортной задачей.

План задачи (8)—(9) определяется числами $u_1, u_2..., u_m$ — характеристиками пунктов-производителей и величинами $v_1, v_2...,v_n$ — характеристиками пунктов-потребителей. Согласно неравенствам (9) разность характеристик любой пары пунктов производитель-потребитель не превышает стоимости единичной перевозки между этими пунктами.

Связь между задачами (1)—(4) и (8), (9) устанавливается так называемой теоремой двойственности, согласно которой значение условного минимума в первой задаче равно величине условного максимума второй задачи. Из теоремы двойственности легко выводится критерий оптимальности плана, являющийся основой ряда методов решения транспортной задачи. Содержание этого критерия — необходимого и достаточного условия оптимальности плана транспортной задачи — состоит в следующем.

Для того чтобы план $X^* = \{x^*_{ij}\}$ задачи (1) — (4) был ее решением, необходимо и достаточно существование таких чисел u^*_i и v^*_j, что

а) $v^*_j - u^*_i \leqslant c_{ij}$ $(i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, 2, ..., n)$,

б) $v^*_j - u^*_i = c_{ij}$, если $x^*_{ij} > 0$.

Числа u^*_i и v^*_j — составляющие решения двойственной транспортной задачи (8), (9) — получили название потенциалов соответствующих пунктов задачи (1) — (4) (см. работы [4], [5]).

Смысл этого названия можно иллюстрировать следующей аналогией. Представим себе, что некую единичную массу необходимо перенести из точки A_i в точку B_j. Величины работ, которые надо затратить при переносе массы из A_k в B_l $(k = 1, 2, ..., m;$ $l = 1, 2, ..., n)$, заданы и равны c_{kl} (работа, совершаемая при движении от B_l к A_k, предполагается равной $- c_{kl}$). Условимся, что непосредственное движение между A_k и B_l допустимо лишь в том случае, если коммуникация $\overrightarrow{A_k B_l}$ является основной для некоторого оптимального плана задачи (1) — (4). Тогда разность $v^*_j - u^*_i$ в точности равна работе, необходимой для переноса единичной массы из A_i в B_j (задача (1) — (4) предполагается невырожденной). При этом выполняется основное свойство движения в потенциальном поле: величина работы, производимой при перемещении, не зависит от формы допустимого пути, связывающего две точки, а определяется только самими точками. Отметим, что непосредственное движение от A_k к B_l всегда связано с не меньшей работой по сравнению с движением между этими точками по любому из допустимых маршрутов.

Естественно, что значения потенциалов определяются с точностью до произвольной постоянной.

Система потенциалов позволяет оценивать изменения минимума суммарных транспортных расходов в результате малых флюктуаций объемов производства и потребления.

Именно, если

$$\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

— значение минимальных транспортных издержек в задаче (1) — (4), то в предположении о ее невырожденности

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\Big[\varphi(a_1,\ldots, a_i-\varepsilon,\ldots, a_m, b_1,\ldots, b_j-\varepsilon,\ldots, b_n) - \varphi(a_1,\ldots, a_i,\ldots, a_m, b_1,\ldots, b_j,\ldots,b_n)\Big] = v_j^* - u_i^*.$$

§ 3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

В настоящее время разработано довольно много алгоритмов решения транспортной задачи. Подавляющее большинство из них связано с конечными методами линейного программирования. Предельная простота условий транспортной задачи позволяет на основе любого общего метода линейного программирования получить менее трудоемкий специальный алгоритм для анализа этой задачи. Эффективность алгоритма зависит, в основном, от того, насколько полно учтена специфика задачи.

Существующие конечные алгоритмы транспортной задачи можно разделить на две группы.

Первая группа алгоритмов основана на наиболее популярном методе линейного программирования — методе последовательного улучшения плана (симплексном методе).

Вторая группа алгоритмов базируется на идеях метода последовательного сокращения невязок (метода одновременного решения прямой и двойственной задач). Основы обоих упомянутых методов линейного программирования были впервые сформулированы Л. В. Канторовичем ([6], [5], [7]). Независимое описание методов было дано Данцигом [8] (симплексный метод) и Данцигом, Фордом и Фулкерсоном [9] (метод одновременного решения прямой и двойственной задач). Заслуга американских математиков состоит в том, что, наряду с описанием методов, они предложили компактные вычислительные схемы, реализующие эти методы.

Типичным представителем первой группы алгоритмов является метод потенциалов — наиболее ранний точный метод решения транспортной задачи. Метод потенциалов был предложен в работе Л. В. Канторовича и М. К. Гавурина [5] в 1949 г. Несколько позднее аналогичный алгоритм на основе общего симплексного метода был разработан Данцигом [10]. В американской литературе этот алгоритм принято называть модифицированным распределительным методом.

Метод потенциалов позволяет, отправляясь от некоторого опорного плана перевозок, построить решение задачи за конечное число однотипных шагов (итераций). В невырожденных задачах каждый шаг метода сопровождается снижением суммарных транспортных затрат. Отдельный шаг метода потенциалов состоит в следующем.

По данному опорному плану каждому пункту задачи сопоставляется число, называемое его предварительным потенциалом. Предварительные потенциалы выбираются так, чтобы их разность для любой пары пунктов, связанных основной коммуникацией, была равна стоимости единичной перевозки между этими пунктами. В невырожденном случае указанное условие позволяет, задавшись предварительным потенциалом одного из пунктов, легко определить предварительные потенциалы остальных пунктов задачи. Если вычисленные значения v_j и u_i предварительных потенциалов удовлетворяют требованию (а) критерия оптимальности, то данный план представляет собой решение задачи.

Допустим, что это требование не выполняется для некоторых пар пунктов, например для пунктов A_i и B_j. В таком случае метод указывает способ улучшения имеющегося плана.

Соединим пункты A_i и B_j обходным маршрутом, составленным из основных коммуникаций данного плана. Перенумеровав коммуникации обходного маршрута в порядке движения по ним при переходе из A_i в B_j, найдем минимальную перевозку среди перевозок, запланированных по нечетным коммуникациям маршрута. Новый план перевозок строится следующим образом.

Между пунктами A_i и B_j планируется перевозка x; перевозки по нечетным коммуникациям обходного маршрута уменьшаются на величину x; объемы перевозок по четным коммуникациям возрастают на x. В результате образуется опорный план, реализация которого связана с меньшими транспортными расходами по сравнению с имевшимися ранее. Переходя последовательно от одного опорного плана задачи к другому и уменьшая при этом суммарные транспортные издержки, мы в конце концов получаем искомый оптимальный план перевозок. В вырожденном случае суммарные транспортные расходы могут сохранить свое значение в течение нескольких итераций (x может оказаться равным нулю, так как в систему основных коммуникаций плана приходится включать некоторые коммуникации с нулевыми перевозками). Если не заботиться о том, какую из коммуникаций с нулевыми перевозками исключать из числа основных на каждом шаге метода, то возможно образование цикла, т. е. периодическое возвращение к одной и той же системе основных коммуникаций. Для предотвращения цикла можно использовать ε-прием, переобразовав объемы производства и потребления задачи по формулам (7).

В процессе решения число ε не фиксируется, а полагается меньшим любой конечной величины, с которой его приходится сравнивать. Следует отметить, что случаи зацикливания крайне редки. Поэтому при решении практических задач можно не заботиться о возможности получения цикла. Если же цикл все же образуется, то необходимо, начиная с этого момента, использовать ε-прием до первого уменьшения транспортных расходов, после чего целесообразно вернуться к обычному способу решения задачи.

Метод потенциалов основан на так называемом втором алгоритме метода улучшения плана (на методе обратной матрицы). Отличие здесь состоит только в том, что на каждом шаге параметры задачи (план, предварительные потенциалы) вычисляются не по рекуррентным формулам, а непосредственно. Это оказывается более выгодным из-за простоты условий транспортной задачи.

Среди статей сборника описанию метода, эквивалентного методу потенциалов, посвящена только работа Флада «Проблема распределения Хичкока». В ней подробно описывается связь транспортной задачи с общей задачей линейного программирования; результаты выводятся с помощью общих теорем линейного программирования. Кроме того, в статье приводится оригинальное рассмотрение случая вырожденности транспортной задачи.

К методу потенциалов примыкает так называемый распределительный метод. Его основой является первый алгоритм метода улучшения плана. Здесь на каждой итерации необходимо разложение всех векторов условий задачи по векторам, соответствующим основным коммуникациям плана. Для задач небольших размеров, решаемых вручную, распределительный метод мало отличается по трудоемкости от метода потенциалов. Однако в задачах с большим числом пунктов метод потенциалов оказывается более эффективным. Описание распределительного метода приводится в статье Билы, Фидлера и Ножички «Применение теории графов в решении транспортной задачи», перевод которой помещен в сборнике. Изложение здесь ведется на основе теории графов[1], которая довольно часто оказывается полезной при разработке теории и методов решения задач транспортного типа. Из других алгоритмов типа метода потенциалов отметим весьма компактную схему Глейзала [12], использование которой не требует разделения задач на вырожденные и невырожденные.

Наибольшее число статей сборника посвящено изложению алгоритмов решения транспортной задачи, основанных на методе последовательного сокращения невязок. Типичным для этой группы алгоритмов является так называемый венгерский метод. Интересно отметить, что основные идеи этого метода были высказаны еще в 1931 г. венгерским математиком Эгервари (отсюда и название метода). Первая публикация по венгерскому методу принадлежит Куну, в ней венгерский метод излагается применительно к важному частному случаю транспортной задачи — задаче о назначениях (задаче выбора) ($a_i=b_j=1$, $m=n$).

Перевод этой работы Куна — «Венгерский метод решения задачи о назначениях» — включен в сборник.

В дальнейшем венгерский метод был распространен на общую транспортную задачу. Этому вопросу посвящены две статьи сбор-

[1] С основами теории графов можно познакомиться по обзорной статье [11].

ника: «Решение транспортной задачи» Форда и Фулкерсона и «Алгоритмы решения задачи выбора и транспортной задачи» Манкреса.

Приведем общую схему решения транспортной задачи венгерским методом.

Выбирается некоторый план двойственной транспортной задачи (8)—(9), т. е. система чисел u_i, v_j, удовлетворяющая условиям

$$v_j - u_i \leqslant c_{ij} \text{ для всех } i, j.$$

Допустимой считается только такая коммуникация $\overrightarrow{A_i B_j}$, для которой

$$v_i - u_i = c_{ij}.$$

Далее осуществляется решение вспомогательной задачи—построение плана перевозок по допустимым коммуникациям максимально возможного суммарного объема. При этом в каждый пункт-потребитель завозится не более того, что ему требуется. Если реализация составленного плана приводит к удовлетворению всех потребителей, то он является решением задачи. В противном случае по решению вспомогательной задачи и имеющемуся плану двойственной задачи формируется новый план двойственной задачи. Этот план порождает новую вспомогательную задачу, решение которой либо определит искомый оптимальный план двойственной задачи, либо даст возможность улучшить план двойственной транспортной задачи. Каждый шаг метода сокращает степень неудовлетворенности пунктов-потребителей. Через конечное число шагов потребности всех пунктов-потребителей полностью удовлетворятся, и будет получено решение задачи.

Венгерский метод допускает различные способы алгоритмизации. Кроме указанных выше алгоритмов Манкреса и Форда и Фулкерсона, следует отметить алгоритмы А. Л. Лурье и Ю. А. Олейника [13] и А. Л. Брудно [14]. Различие алгоритмов венгерского метода проявляется лишь на этапе решения вспомогательной задачи. Кстати, основное отличие венгерского метода от общего метода последовательного сокращения невязок как раз и состоит в экономном способе решения вспомогательной задачи, хорошо приспособленном к специфике ее условий.

Сравнительное описание нескольких алгоритмов, реализующих венгерский метод, основанное на элементах теории графов, содержится в статье Куна «Некоторые видоизменения венгерского метода для задачи о назначениях».

Венгерский метод обладает некоторыми преимуществами, выгодно отличающими его от других способов решения транспортной задачи. К ним относятся:

а) небольшая модификация венгерского метода (см. [3], стр. 404—407) позволяет после каждого шага получать план задачи и характеристику его близости к решению. Это дает возможность прервать процесс решения после достижения заранее заданной близости к оптимуму.

б) Венгерский метод нечувствителен к явлению вырожденности.

Конечные методы решения общей задачи линейного программирования делятся на три группы: симплексный метод, метод одновременного решения прямой и двойственной задачи, двойственный симплексный метод. Как отмечалось, представители первых двух групп являются основой всех существующих конечных методов решения транспортной задачи. Идеи, на которых базируется типичный для методов третьей группы метод последовательного уточнения оценок (двойственный симплексный метод), до сих пор не использовались для исследования транспортной задачи. Однако это ни в коей мере не означает, что метод последовательного уточнения оценок не пригоден для транспортной задачи. Напротив, подобно другим методам, он может быть приспособлен для этой задачи, причем каждая итерация полученного алгоритма будет не более трудоемкой, чем в методе потенциалов.

При использовании метода уточнения оценок движение к оптимальному плану будет осуществляться по так называемым квазипланам задачи: наборам «перевозок» x_{ij}, удовлетворяющим уравнениям (1), (2), но, вообще говоря, не подчиняющимся ограничениям (3). Отсутствие отрицательных величин среди компонент квазиплана указывает на его оптимальность.

§ 4. ВИДОИЗМЕНЕНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

До сих пор мы предполагали выполненным условие (5) баланса производства и потребления. Однако в некоторых моделях равенство (5) может и не иметь места.

Если

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

то потребности всех пунктов-потребителей, естественно, не могут быть удовлетворены полностью. Условимся, что за неудовлетворение потребностей пункта B_j на единицу накладывается штраф в размере c_j денежных единиц.

Задача состоит в определении такого плана перевозок, при котором весь продукт из пунктов-производителей вывозится, и при этом сумма транспортных расходов и штрафов достигает возможно меньшего значения.

Введем фиктивный пункт-производитель A_{m+1} с объемом производства

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

Стоимость перевозки единицы продукта из A_{m+1} в B_j положим равной c_j.

В таком случае сформулированная задача эквивалентна обычной транспортной задаче типа (1)—(4) с $(m+1)$ пунктами-производителями (m действительных и один фиктивный) и n пунктами-потребителями.

Может оказаться, что

$$\sum_{j=1}^{n} b_j < \sum_{i=1}^{m} a_i,$$

т. е. продукта производится больше, чем необходимо. Тогда, очевидно, часть продукта должна остаться в пунктах-производителях. Если условиться, что остаток единицы продукта в пункте A_i связан с расходом (например, на хранение) c денежных единиц, то задача состоит в определении плана перевозок, удовлетворяющего потребности всех пунктов B_j и приводящего к минимальной сумме транспортных издержек и расходов на хранение. Эта задача также легко приводится к обычной транспортной задаче после введения фиктивного пункта-потребителя B_{n+1} с объемом

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

и стоимостями c_i перевозок из A_i в B_{n+1}.

Транспортные задачи с нарушенным балансом производства и потребления иногда называют открытыми транспортными моделями.

К естественному усложнению транспортной модели приводят следующие рассуждения.

Транспортные коммуникации обычно не обладают неограниченными возможностями. Объем груза, перевозка которого планируется по линии в течение какого-то отрезка времени, не должен превышать возможностей линии — ее пропускной способности за указанное время. Следовательно, перевозки x_{ij} плана X должны подчиняться дополнительным ограничениям

$$x_{ij} \leqslant d_{ij}. \qquad (10)$$

Числа d_{ij} называют пропускными способностями соответствующих коммуникаций.

Модели, в которых, кроме условий (1)—(3), имеются ограничения (10), называются транспортными задачами с ограниченными пропускными способностями коммуникаций или транспортными задачами с двусторонними ограничениями. Любой метод решения транспортной задачи может быть распространен на этот более широкий класс задач. Важно отметить, что трудоемкость отдельной итерации при этом почти не возрастает, однако число итераций может заметно увеличиться. В настоящем сборнике помещены переводы двух статей, содержащих описание венгерского метода для транспортных задач с двусторонними ограничениями. Это — работа Форда и Фулкерсона «Алгоритм одновременного решения прямой и двойственной задач для проблемы Хичкока с ограниченными пропускными способностями» и статья Прагера «Численное решение обобщенной транспортной задачи».

§ 5. МАТРИЧНАЯ И СЕТЕВАЯ ПОСТАНОВКИ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

При формулировке транспортной задачи (1)—(4) предполагалось, что любая пара пунктов производитель—потребитель связана коммуникацией, и притом единственной. Поэтому систему транспортных расходов c_{ij}, так же как и систему перевозок x_{ij}, можно записать в виде прямоугольных таблиц (матриц):

$$C = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{Vmatrix},$$

$$X = \begin{Vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Строки матриц C и X соответствуют пунктам-производителям, а столбцы — пунктам-потребителям. Решение транспортной задачи *тем или иным* методом сводится к последовательным преобразованиям матриц C и X. В связи со сказанным задачу (1)—(4) принято называть транспортной задачей в матричной постановке.

Представляет интерес следующая, более общая транспортная модель.

Имеется ряд пунктов, связанных между собой сетью дорог. Сеть состоит из конечного числа звеньев. Два пункта, соединенные одним звеном сети, называются соседними. (Другими словами, задан граф.) Пункты делятся на производителей, потребителей и перевалочные пункты. Пункт с номером i характеризуется числом S_i — количеством продукта, производимым или потребляемым в этом пункте. Для пункта-производителя $S_i > 0$, для пункта-потребителя $S_i < 0$. Перевалочным пунктам отвечает значение $S_i = 0$.

Условие баланса производства и потребления имеет вид

$$\sum_{i=1}^{N} S_i = 0,$$

где N — общее число пунктов.

Для каждого звена сети известны стоимости перевозки единицы продукта в обоих направлениях. План перевозок определяется заданием для каждого звена сети величины и направления перевозки. При этом предполагается, что для каждого пункта разность между вывозимым и ввозимым количеством продукта равна S_i, где i — номер рассматриваемого пункта.

Задача состоит в формировании оптимального плана перевозок, т. е. плана, связанного с минимальными транспортными расходами.