

Л. Н. БОЛЬШЕВ, Н. В. СМЕРНОВ

ТАБЛИЦЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1983

22.194
Б 79
УДК 519.2

Таблицы математической статистики. Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р -
н о в Н. В.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической лите-
ратуры, 1983.—416 с.

Книга представляет собой сборник статистических таблиц с подробными пояснениями и примерами, которые выходят за рамки простого описания и представляют самостоятельный интерес как справочный материал. В отличие от других книг аналогичного содержания, здесь функции табулированы по всей естественной области определения, что достигается с помощью табулирования поправок к простейшим асимптотическим формулам. При конструировании таблиц широко используются предельные теоремы и асимптотические формулы, связанные с преобразованиями, улучшающими сходимость.

Второе издание выходило в 1968 г.

Для специалистов, использующих в своей работе методы математической статистики, а также для студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр. поясни- тельно- части	Стр. таб- лиц
Предисловие к первому изданию	7	—
I. Нормальное распределение	9	111
Таблица 1.1. Функция нормального распределения	9	112
Таблица 1.2. Плотность нормального распределения и ее пять произ- водных	10	119
Таблица 1.3. Функция, обратная функции нормального распределения	13	136
Таблица 1.4. Отношение Миллса	14	138
II. Распределение χ^2	15	139
Состав таблиц	16	—
Таблица 2.1а. Интеграл вероятностей χ^2	16	140
Таблица 2.1б. Поправки для вычисления интеграла вероятностей χ^2	16	160
Таблица 2.2а. Процентные точки распределения χ^2	16	166
Таблица 2.2б. Поправки для вычисления процентных точек распре- деления χ^2	16	170
Таблица 2.3. Необходимый объем выборки для оценки квадратичного отклонения с заданной относительной погрешностью	17	172
Интерполяция	17	—
Назначение таблиц распределения χ^2 и примеры их использования	18	—
III. Некоторые основные распределения, связанные с нормальным распределением	23	173
Таблицы 3.1. Функция распределения Стьюдента	23	—
Состав таблиц	23	—
Таблица 3.1а. Функция распределения Стьюдента	23	174
Таблица 3.1б. Поправки для вычисления функции распределения Стьюдента	24	177
Интерполяция	24	—
Таблица 3.2. Процентные точки распределения Стьюдента	25	178
Назначение таблиц и примеры их использования	25	—
Таблицы 3.3. Функция В-распределения	27	—
Состав таблиц	28	—
Таблица 3.3а. В-распределение; функции $\Phi_1(u, v)$ и $\Phi_2(u, v)$	28	179
Таблица 3.3б. В-распределение; функция $\gamma(u, a)$	28	181
Примеры	29	—
Таблицы 3.4. Квантили В-распределения	29	182
Состав таблиц. Интерполяция и экстраполяция	30	—
Таблицы 3.5. Процентные точки F-распределения	32	200
Состав таблиц. Интерполяция и экстраполяция	33	—
Назначение таблиц и их применения	34	—
Таблицы 3.6. Функция распределения медианы в выборке из нормаль- ной совокупности	36	—
Состав таблиц. Интерполяция	37	—
Таблица 3.6а. Функция распределения медианы в выборке из нормальной со- вокупности. Поправки к нормальной аппроксимации $R_n(x) = P_n(x) -$ $-\Phi(x)$	37	216
Таблица 3.6б. Функция распределения медианы в выборке из нормальной со- вокупности. Поправки к нормальной аппроксимации $r(x, t) = P_n(x) -$ $-\Phi(x)$	38	218
Таблица 3.7. Процентные точки медианы в выборке из нормальной сово- купности	38	219
Таблицы 3.8. Распределение размаха выборки из нормальной совокуп- ности	39	—
Состав таблиц. Интерполяция	40	—

	Стр. поясни- тельной части	Стр. таб- лиц
Таблица 3.8а. Функция распределения размаха выборки из нормальной совокупности	40	220
Таблица 3.8б. Процентные точки размаха выборки из нормальной совокупности	40	226
Таблица 3.8в. Моменты размаха выборки из нормальной совокупности с параметрами (0, 1)	40	226
Назначение таблиц и примеры их использования	40	—
Т а б л и ц ы 3.9. Критерий дисперсионного отношения, основанный на размахах	41	—
Таблица 3.9а. Верхние критические значения для отношения размахов в двух выборках из нормальных совокупностей	41	227
Таблица 3.9б. Функция мощности критерия, основанного на отношении размахов	42	231
Т а б л и ц ы 3.10. Модифицированный t -критерий	42	232
IV. Статистические оценки и критерии, связанные с нормальным распределением	43	233
Т а б л и ц ы 4.1. Точечные и интервальные оценки квадратичного отклонения нормальной совокупности	43	—
Таблица 4.1а. Моменты отношения s/σ	44	234
Таблица 4.1б. Наилучшие линейные оценки квадратичного отклонения	44	234
Таблица 4.1в. Множители для определения доверительных пределов квадратичного отклонения σ	44	235
Таблица 4.1г. Моменты отношения $\frac{m}{\sigma} = \frac{1}{n\sigma} \sum_{i=1}^n \xi_i - \bar{\xi} $	44	236
Таблица 4.1д. Квантили распределения арифметического среднего абсолютных отклонений $\frac{m}{\sigma} = \frac{1}{n\sigma} \sum_{i=1}^n \xi_i - \bar{\xi} $	45	236
Т а б л и ц а 4.2. Множители для построения толерантных пределов в случае нормального распределения	45	237
Т а б л и ц ы 4.3. Критерии равенства дисперсий	46	—
Таблица 4.3а. Критерий Бартлетта	47	239
Таблица 4.3б. Критерий Кокрена	48	242
Т а б л и ц а 4.4. Критерий сравнения средних значений в двух нормальных совокупностях	49	244
Т а б л и ц ы 4.5. Нормальная корреляция	50	—
Таблица 4.5а. Процентные точки выборочного коэффициента корреляции r , когда $\rho = 0$	51	248
Таблица 4.5б. Преобразование Фишера $z = \arg \operatorname{th} r$	52	249
Таблица 4.5в. Доверительные пределы для коэффициента корреляции ρ	52	250
Т а б л и ц ы 4.6. Доверительные зоны для линии регрессии	53	—
Таблица 4.6а. Доверительные зоны для линии регрессии. Критические значения $u_v(p, \lambda)$	54	252
Таблица 4.6б. Доверительные зоны для линии регрессии. Критические значения $v_v(p, \lambda)$	54	255
Т а б л и ц ы 4.7. Критерии отклонения распределения от нормального	55	—
Таблица 4.7а. Процентные точки распределения статистики $d = \frac{1}{ns^*} \sum \xi_i - \bar{\xi} $	56	258
Таблица 4.7б. Процентные точки распределения выборочного коэффициента асимметрии g_1	56	258
Таблица 4.7в. Процентные точки распределения выборочной характеристики эксцесса b_2	56	259
Т а б л и ц ы 4.8. Критерии исключения резко выделяющихся наблюдений	58	—
Таблица 4.8а. Критерии исключения резко выделяющихся наблюдений. Процентные точки наибольшего нормированного отклонения $\zeta^+(a, \sigma) = (\eta_n - a)/\sigma$	60	260
Таблица 4.8б. Процентные точки наибольшего нормированного отклонения $\zeta^+(\eta, \sigma) = (\eta_n - \eta)/\sigma$	60	261
Таблица 4.8в. Процентные точки наибольшего по абсолютной величине нормированного выборочного отклонения $\zeta(\eta, s^*) = \max_i \eta_i - \eta /s^*$	60	262
Таблица 4.8г. Процентные точки наибольшего нормированного отклонения $\zeta^+(\eta, s_v) = (\eta_n - \eta)/s_v$ (s_v^2 не зависит от $\eta_n - \eta$ и представляет собой несмещенную оценку для σ^2 с ν степенями свободы)	60	263

	Стр. поясни- тельной части	Стр. таб- лиц
Таблица 4.8д. Процентные точки отношений $\frac{\eta_n - \eta_{n-1}}{\eta_n - \eta_1}$, $\frac{\eta_n - \eta_{n-1}}{\eta_n - \eta_2}$ и $\frac{\eta_n - \eta_{n-2}}{\eta_n - \eta_1}$	61	266
Таблица 4.9. Критерий Аббе	62	267
Таблица 4.10. Функция мощности критерия χ^2 (нецентральное χ^2 -распределение)	62	268
Таблица 4.11. Функция мощности критерия Стьюдента (нецентральное t -распределение)	63	270
Таблица 4.12. Функция мощности F -критерия (нецентральное F -распределение)	64	271
Таблица 4.13. Графики для определения типа кривой К. Пирсона в зависимости от величин β_1 и β_2	65	278
Таблица 4.14. Квантили нормированных случайных величин, подчиняющихся распределениям К. Пирсона	66	279
V. Некоторые дискретные распределения	67	—
Таблица 5.1. Биномиальное распределение	67	284
Таблица 5.2. Доверительные пределы для параметра p биномиального распределения	69	286
Таблица 5.3. Распределение Пуассона	70	298
Таблицы 5.4. Доверительные пределы для параметра распределения Пуассона	71	—
Таблица 5.4а. Доверительные пределы для параметра распределения Пуассона	71	306
Таблица 5.4б. Доверительные пределы для параметра распределения Пуассона (поправки к приближенным формулам для λ_1 и λ_2 при $\xi > 50$)	71	307
Таблица 5.5. Доверительные пределы для отношения параметров двух распределений Пуассона	72	308
Таблица 5.6. Доверительные пределы для параметра гипергеометрического распределения; критерий значимости для таблиц сопряженности признаков 2×2 ; критерий сравнения вероятностей	73	314
Процентные точки гипергеометрического распределения	75	—
Доверительные пределы для параметра M	75	—
Описание таблицы	75	—
Назначение таблицы и примеры ее применений	76	—
Приближенные критерии в случае больших выборок	78	—
«Отрицательное» гипергеометрическое распределение	79	—
VI. Таблицы непараметрической статистики	80	345
Критерии, основанные на разностях функций эмпирического и теоретического распределений	80	—
Критерии Колмогорова и Смирнова	80	—
Критерии Реньи	82	—
Критерии ω^2	83	—
Критерии однородности двух выборок	83	—
Критерии однородности двух выборок (продолжение)	86	—
Таблица 6.1. Функция распределения Колмогорова	87	346
Таблица 6.2. Критические значения для наибольшего отклонения эмпирического распределения от теоретического (критерий Колмогорова)	87	347
Таблица 6.3. Функция распределения Реньи	87	348
Таблица 6.4а. Критерий ω^2 . Функция распределения $a_1(x)$	88	348
Таблица 6.4б. Критерий ω^2 . Функция распределения $a_2(x)$	88	349
Таблица 6.5а. Критерий однородности двух выборок (критерий Смирнова)	88	350
Таблица 6.5б. Критерий однородности двух выборок. Значения функций b и b^*	89	352
Критерии, основанные на простейших функциях от порядковых статистик	89	—
Таблица 6.6. Критерий знаков. Доверительные пределы для медианы	89	353
Таблица 6.7. Критические значения для количества серий	91	354
Таблица 6.8. Критические значения статистики W критерия Вилкоксона	93	357
Таблица 6.9а. Критические значения статистики X критерия Ван-дер-Вардена	95	361
Таблица 6.9б. Вспомогательная таблица для вычисления дисперсии статистики X критерия Ван-дер-Вардена	96	362
Другие ранговые критерии	96	—
Таблицы 6.10. Ранговая корреляция	97	—

	Стр. поясни- тельной части	Стр. таб- лиц
Таблица 6.10а. Распределение коэффициента ранговой корреляции ρ Спирмена	98	363
Таблица 6.10б. Распределение коэффициента ранговой корреляции τ Кендалла	98	363
Таблица 6.10в. Распределение коэффициента согласованности W_s	98	364
VII. Вспомогательные таблицы	100	365
Таблица 7.1а. Равномерно распределенные случайные числа	100	366
Таблица 7.1б. Нормально распределенные случайные числа	100	371
Таблица 7.2. Ортогональные многочлены Чебышева	100	376
Таблица 7.3. Степени целых чисел	102	386
Таблица 7.4. Суммы степеней чисел натурального ряда	102	388
Таблица 7.5. Квадраты целых чисел	103	390
Таблица 7.6. Факториалы, десятичные логарифмы факториалов, квадратные корни и обратные величины	103	392
Таблица 7.7. Г-функция, ее десятичный логарифм и некоторые вспомогательные функции	103	398
Таблица 7.8. Натуральные логарифмы	104	400
Таблица 7.9. Постоянные	105	402
Литература	106	—
Послесловие (Ю. В. Прохоров, Д. М. Чибисов)	403	—
Комментарии и библиография (сост. Д. С. Шмерлинг)	404	—
Указатель	413	—

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Из года в год наблюдается все усиливающийся интерес к математико-статистическим методам со стороны представителей почти всех опытных наук и технических дисциплин, а также со стороны работников производства, медицины, сельского хозяйства и т. д. Эти лица большей частью нуждаются в указании рационального способа обработки имеющихся у них результатов наблюдений или специальных экспериментов для получения по возможности надежных и обоснованных заключений на основе информации, доставляемой опытом. Но как раз эта конечная цель статистической обработки, предпринимаемой ради решения определенных познавательных задач или руководства последующей деятельностью, требует применения вероятностных оценок, делающих выводы, сопоставления или прогнозы оправданными и надежными в той мере, в какой это вообще возможно в данной ситуации. Этот заключительный и наиболее ответственный момент приложения статистических методов технически должен быть, как правило, обслужен надлежащими таблицами функций распределения используемых статистических критериев.

Необходимость специальных таблиц для полноценной методики статистических выводов была осознана уже давно, и в настоящее время работа над созданием весьма разнотипных по своему составу таблиц математической статистики ведется довольно широко. Наибольшей популярностью в международной статистической практике пользуется сборник *), оразивший, с одной стороны, основные достижения английской школы Р. Фишера и с другой — школы Неймана — Пирсона. Эти таблицы взяты за основу при составлении настоящего сборника. Был использован ряд таблиц, опубликованных в различных математических журналах и книгах; соответствующие литературные ссылки даны в описании каждой таблицы; обнаруженные ошибки исправлены. Приблизительно четвертая часть всех таблиц различных функций (их в сборнике около 100), необходимых для приложения вероятностных и статистических методов, вычислена целиком или частично в Математическом институте АН СССР и публикуется впервые.

Каждой таблице предпослано специальное описание. В разделах I — III сосредоточены таблицы, наиболее часто встречающиеся в статистической практике (таблицы нормального распределения, χ^2 -распределения, распределения Стьюдента и т. д.). В подробных описаниях таблиц этих разделов рассмотрены различные примеры статистических приложений и приемы интерполирования. Остальные таблицы разделов IV — VI имеют более специальное назначение и снабжены поэтому лишь краткими замечаниями.

Предполагается, что читатель владеет основными понятиями теории вероятностей и математической статистики. Введение к таблицам не может заменить изложение соответствующих вопросов в том или ином учебнике: оно предназначено лишь для ориентировки читателя в способах применения таблиц для решения наиболее типичных задач статистической практики. С целью осуществления возможности вычисления значений табулированных функций во всей естественной области их определения некоторые из имевшихся ранее таблиц расширены, что в ряде случаев потребовало уточнения асимптотических формул и разработки специальных приемов интерполяции и экстраполяции.

Таким образом, по сравнению с указанным выше сборником Пирсона и Хартли предлагаемый сборник содержит не только более обширный по своему составу, но

*) Pearson E. S. and Hartley H. O. Biometrika tables for statisticians, v. I. — Cambridge University Press, 1954.

и в ряде случаев более полный (в смысле охвата естественной области определения) комплекс табулированных функций. Там, где это представилось возможным, наряду с функциями распределений приводятся таблицы соответствующих процентных точек или квантилей. Значения некоторых функций даны с количеством десятичных знаков, иногда превышающим запросы обычных статистических приложений. Это сделано в расчете на решение других задач, возникающих в математической статистике и требующих повышенной точности. Например, вычисление критических значений для резко выделяющихся наблюдений требует знания квантилей распределения Стьюдента с несколькими запасными десятичными знаками. Точно так же квантили В-распределения можно оценить по квантилям Г-распределения, вычисленным с большей точностью (см. описания таблиц 3.4 и 4.8в).

Таблицы занумерованы двойной нумерацией. Первое число указывает номер раздела, а второе — номер таблицы этого раздела. В пределах каждого раздела во введении формулы имеют самостоятельную нумерацию с помощью лишь одного числа. В ссылках на формулы других разделов принята двойная нумерация; например, (3.2) означает формулу (2) из раздела III. Способ интерполяции указывается, как правило, для каждой таблицы отдельно, чтобы по возможности свести к минимуму ссылки на описание других таблиц.

Ссылки на литературу даются числами, заключенными в квадратные скобки. Каждое число указывает номер статьи или книги в списке литературы, приложенном к таблицам. В ссылках на таблицы перед числом поставлена буква Т (например, [Т5]).

П р и н я т ы е о б о з н а ч е н и я. В тех случаях, где это представлялось возможным, случайные величины обозначались греческими буквами, остальные величины — латинскими. Иногда в разных по содержанию таблицах можно встретить одинаковые обозначения для разных величин (например, W — статистика критерия Вилкоксона, W — количество серий и W — выборочный размах). Однако в пределах каждой таблицы одинаковых обозначений нет.

$P\{A\}$ — вероятность события A ,

$M\xi$ — математическое ожидание случайной величины ξ ,

$D\xi$ — дисперсия случайной величины ξ .

В работе по вычислению таблиц, по подготовке рукописи к печати принимали участие сотрудники отдела математической статистики МИ АН СССР: Б. И. Деятов, Е. С. Кедрова, В. Ф. Котельникова, Н. К. Печенкова, М. А. Рыбинская.

I. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Таблица 1.1. Функция нормального распределения

Распределение случайной величины ξ называется *нормальным*, если соответствующая ей функция распределения выражается формулой

$$P\{\xi \leq x\} = N(x; a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dt, \quad (1)$$

в которой x может принимать все действительные значения и где a и σ — параметры распределения ($|a| < \infty$, $\sigma > 0$). Функция нормального распределения $N(x; a, \sigma)$ удовлетворяет равенству

$$N(x; a, \sigma) = N((x-a)/\sigma; 0, 1), \quad (2)$$

поэтому для вычисления ее значений достаточно иметь таблицу функции $N(x; 0, 1)$ (далее условимся для краткости обозначать $N(x; 0, 1) = \Phi(x)$). Таким образом,

$$\Phi(x) = N(x; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt. \quad (3)$$

Формулой (3) функция $\Phi(x)$ определяется при всех действительных x и представляет собой непрерывную, монотонно возрастающую

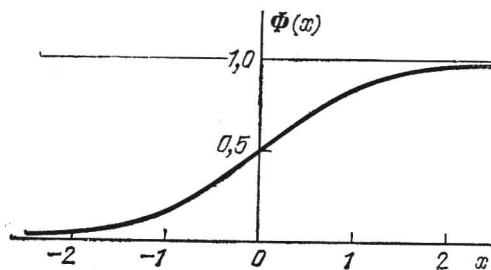


Рис. 1.

функцию, изменяющуюся от 0 до 1 (график функции $\Phi(x)$ изображен на рис. 1); легко можно убедиться в справедливости

формул

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt = \Phi(x) - \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^x e^{-t^2/2} dt = 2\Phi(x) - 1.$$

Так как при всех действительных значениях x имеет место тождество

$$\Phi(x) + \Phi(-x) \equiv 1, \quad (4)$$

то для вычисления интеграла (3) достаточно иметь таблицы функции $\Phi(x)$ лишь для $x \geq 0$.

В таблице 1.1 указаны значения функции $\Phi(x)$ с шестью значащими цифрами для $x = 0,000$ (0,001) 3,000 и с пятью значащими цифрами для $x = 3,00$ (0,01) 5,00 (в данном случае значащими называются все разряды десятичной дроби, начиная с первого, отличного от девятки; например, если $\Phi(x) = 0,99976737$, то значащими цифрами будут 76737). Каждая табличная строка представляет собой таблицу функции $\Phi(x)$, в которой последний десятичный знак аргумента x меняется от 0 до 9, причем в столбцах с первого по девятый указаны лишь последние цифры значений $\Phi(x)$, отличные от цифр в «нулевом» столбце (табличные значения функции $\Phi(x)$, у которых несколько первых цифр одинаковы, выделены «зонами»).

Пусть, например, требуется определить $\Phi(0,055)$ и $\Phi(3,73)$. На пересечении строки «с номером» 0,05 и столбца «с номером» 5 расположено число 1931; это число находится в той «зоне», где первые две цифры в «нулевом» столбце есть 52, поэтому окончательно $\Phi(0,055) = 0,521931$. Во втором случае на пересечении строки «с номером» 3,7 и столбца «с номером» 3 находим число 04260; так как первые цифры в соответствующей «зоне» есть 94 (т. е. 9999), то $\Phi(3,73) = 0,999904260$.

При $x \leq 3$ таблица 1.1 допускает линейную интерполяцию, а при $x > 3$ — квадратичную *)

*) Для интерполяции в пределах шести десятичных знаков можно воспользоваться формулой $\Phi(x) = \Phi(x_0) + (x - x_0) \varphi(x_0)$, где x_0 — ближайшее к x табличное значение аргумента и $\varphi(x) = d\Phi(x)/dx$ (значения производной $\varphi(x)$ даны в таблице 1.2).

(соответственно на шесть и на пять значащих цифр). Пусть, например, требуется определить $\Phi(\pi/2)$ и $\Phi(\pi)$. Так как $1,570 < \pi/2 < 1,571$, $3,14 < \pi < 3,15$ и по таблице 1.1

$$\Phi(1,570) = 0,9417924, \quad \Phi(1,571) = 0,9419087, \\ \Phi(3,14) = 0,9315526, \quad \Phi(3,15) = 0,9318365, \\ \Phi(3,16) = 0,9321115,$$

то, сохраняя только значащие цифры, получаем

$$\Delta\Phi(1,570) = 1163, \quad \Delta\Phi(3,14) = 2839, \\ \Delta^2\Phi(3,14) = -89,$$

где $\Delta\Phi$ и $\Delta^2\Phi$ — первая и вторая разности функции $\Phi(x)$, вычисляемые для равноотстоящих значений аргумента x_0, x_1 и x_2 по формулам

$$\Delta\Phi(x_0) = \Phi(x_1) - \Phi(x_0), \\ \Delta^2\Phi(x_0) = \Delta\Phi(x_1) - \Delta\Phi(x_0) = \\ = \Phi(x_0) - 2\Phi(x_1) + \Phi(x_2).$$

Согласно интерполяционной формуле Ньютона имеем (квадратичная интерполяция)

$$\Phi(x) = \Phi(x_0) + u \cdot \Delta\Phi(x_0) - \frac{u(1-u)}{2} \Delta^2\Phi(x_0),$$

где $x_0 \leq x < x_1$, $u = (x - x_0)/h$ — фаза интерполяции и h — табличный шаг аргумента, т. е. $h = x_1 - x_0$. В обоих случаях первые разности $\Delta\Phi$ имеют четыре значащих цифры, поэтому фазу интерполяции u следует вычислить не менее чем с четырьмя верными знаками: в первом случае $u = 0,7963$, а во втором $u = 0,1593$ и $u(1-u)/2 = 0,067$.

Таким образом, с погрешностью, не превышающей единицы последнего десятичного знака, находим

$$\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 10^{-7} (9417924 + 0,7963 \cdot 1163) = \\ = 0,9418850,$$

$$\Phi(\pi) = 10^{-8} [99915526 + 0,1593 \cdot 2839 - \\ - 0,067(-89)] = 0,99915984.$$

Для вычисления функции $\Phi(x)$ при $x > 5$ можно воспользоваться асимптотическим рядом:

$$\Phi(x) = 1 - \\ - \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1 \cdot 3}{x^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{x^6} + \dots\right).$$

Таблица 1.1 составлена по пятизначным таблицам [Т36]. Более подробные сведения о функции нормального распределения можно найти в учебниках [38, 68, 115, 128, 137].

Таблица 1.2. Плотность нормального распределения и ее пять производных

Плотность нормального распределения с параметрами (a, σ) представляет собой первую производную по x от функции нормального

распределения $N(x; a, \sigma)$:

$$n(x; a, \sigma) = \\ = \frac{\partial}{\partial x} N(x; a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x-a}{\sigma} \right)^2 \right\};$$

в частности,

$$n(x; 0, 1) = \frac{d}{dx} N(x; 0, 1) = \frac{d\Phi}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Поэтому

$$n(x; a, \sigma) = n\left(\frac{x-a}{\sigma}; 0, 1\right) / \sigma,$$

значит, для вычисления значений плотности нормального распределения достаточно иметь таблицу функции $n(x; 0, 1)$ (далее условимся для краткости обозначать $n(x; 0, 1) = \varphi(x)$). Таким образом, при всех действительных значениях x функция $\varphi(x)$ определяется формулой

$$\varphi(x) = e^{-x^2/2} / \sqrt{2\pi}.$$

График $\varphi(x)$ изображен на рис. 2.

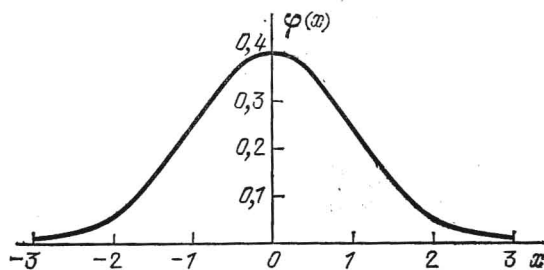


Рис. 2.

Легко можно убедиться, что любая производная плотности $\varphi(x)$ представима в виде произведения некоторого многочлена на плотность $\varphi(x)$:

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{d^n \varphi(x)}{dx^n} = (-1)^n H_n(x) \varphi(x)$$

($H_n(x)$ называют многочленами Чебышева — Эрмита). Например,

$$\varphi^{(1)}(x) = -x\varphi(x),$$

$$\varphi^{(2)}(x) = (x^2 - 1)\varphi(x),$$

$$\varphi^{(3)}(x) = -(x^3 - 3x)\varphi(x),$$

$$\varphi^{(4)}(x) = (x^4 - 6x^2 + 3)\varphi(x),$$

$$\varphi^{(5)}(x) = -(x^5 - 10x^3 + 15x)\varphi(x) \text{ и т. д.}$$

Многочлены $H_n(x)$ и производные $\varphi^{(n)}(x)$ при $n \geq 1$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$H_{n+1}(x) - xH_n(x) + nH_{n-1}(x) = 0, \\ \varphi^{(n+1)}(x) + x\varphi^{(n)}(x) + n\varphi^{(n-1)}(x) = 0, \quad (5)$$

где при $n = 1$ следует положить $\varphi^{(0)}(x) \equiv \varphi(x)$ и $H_0(x) \equiv 1$.

В таблице 1.2 даны значения плотности $\varphi(x)$ и ее первых пяти производных с шестью десятичными знаками для

$x =$
 $= 0,000 (0,004) 3,00 (0,02) 4,00 (0,04) 5,0 (0,1) 6,0$
 (эта таблица заимствована из сборника [Т42]).

Так как производные четного порядка $\varphi^{(2m)}(x)$ — четные функции, а производные нечетного порядка $\varphi^{(2m+1)}(x)$ — нечетные функции аргумента x , то для отыскания значений $\varphi^{(n)}(x)$ при отрицательных x следует пользоваться формулой

$$\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n \varphi^{(n)}(-x) \\ (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Для интерполяции табличных значений на шесть десятичных знаков рекомендуется применять формулу Тейлора:

$$\varphi^{(n)}(x) = \varphi^{(n)}(x_0) + (x - x_0) \varphi^{(n+1)}(x_0) + \\ + \frac{(x - x_0)^2}{2} \varphi^{(n+2)}(x_0),$$

где x_0 — ближайшее к x табличное значение аргумента. При $n = 4$ или 5 результат интерполяции по формуле Тейлора зависит от производных шестого порядка и выше, которые не охватываются таблицей 1.2. Эти производные можно выразить через производные низших порядков с помощью второго рекуррентного соотношения (5). В результате получаются формулы

$$\varphi^{(4)}(x) = \varphi^{(4)}(x_0) + (x - x_0) \varphi^{(5)}(x_0) - \\ - \frac{(x - x_0)^2}{2} [x_0 \varphi^{(5)}(x_0) + 5 \varphi^{(4)}(x_0)], \\ \varphi^{(5)}(x) = \varphi^{(5)}(x_0) - (x - x_0) [x_0 \varphi^{(5)}(x_0) + \\ + 5 \varphi^{(4)}(x_0)] + \frac{(x - x_0)^2}{2} [(x_0^2 - 6) \varphi^{(5)}(x_0) + \\ + 5 x_0 \varphi^{(4)}(x_0)].$$

Если в интерполяционной формуле пренебречь последним слагаемым, то результат будет иметь пять верных десятичных знаков.

Последовательность многочленов Чебышева — Эрмита $\{H_n(x)\}$ представляет собой полную систему функций, ортогональных на всей действительной оси с весом $\varphi(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) \varphi(x) dx = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi^{(m)}(x) \varphi^{(n)}(x)}{\varphi(x)} dx = \begin{cases} n! & \text{при } m = n, \\ 0 & \text{при } m \neq n. \end{cases}$$

Всякой функции распределения $F(x)$, для которой существуют моменты всех порядков,

причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) = 1,$$

можно поставить в соответствие ряд

$$\Phi(x) - \varphi(x) \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{c_n}{n!} H_{n-1}(x) = \\ = \Phi(x) + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \varphi^{(n-1)}(x),$$

где

$$c_n = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) dF_1(x).$$

Если $\int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2/4} dF(x) < \infty$, то этот ряд сходится к $F(x)$ во всех точках непрерывности функции $F(x)$; если же это условие не выполнено, то ряд может расходиться (см. [68], гл. 17).

«Однако в практических приложениях в большинстве случаев значение свойств сходимости нашего разложения не имеет большого значения. В действительности интересно знать, *дает ли небольшое число слагаемых* (обычно не более двух или трех) *достаточно хорошее приближение к функции распределения* $F(x)$? Если это имеет место, то нас не интересует больше вопрос, сходится или расходится наш бесконечный ряд. Более того, если мы знаем, что ряд сходится, то это не принесет практической пользы, если для того, чтобы получить частную сумму ряда, дающую достаточно хорошее приближение, необходимо вычислить большое число коэффициентов c_n » (Г. Крамер [68], с. 249).

Указанный вопрос приобретает особое значение тогда, когда функция распределения $F(x; t)$ зависит от параметра t , причем $F(x; t) \rightarrow \Phi(x)$ при $t \rightarrow 0$. И хотя в большинстве практически важных случаев ряд, соответствующий $F(x; t)$, расходится, однако с помощью этого ряда обычно удается построить некоторый другой ряд, который может быть истолкован как асимптотическое разложение функции распределения $F(x; t)$ по степеням малого параметра t .

Пусть, например, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ — последовательность независимых и одинаково непрерывно распределенных случайных величин, у которых существуют все моменты. Положим $t = 1/\sqrt{n}$, и пусть $F(x; t)$ — функция распределения нормированной суммы

$$\eta_n = \frac{1}{\sqrt{nm_2}} \sum_{i=1}^n (\xi_i - a),$$

где $a = M\xi_1$, $m_2 = M(\xi_1 - a)^2$ и, вообще, $m_k = M(\xi_1 - a)^k$ для $k = 2, 3, \dots$. Согласно центральной предельной теореме случайная величина η_n рас-

предельна асимптотически нормально с параметрами $(0, 1)$, т. е. при $n \rightarrow \infty$ (или в наших обозначениях при $t \rightarrow 0$)

$$F(x; t) \rightarrow \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du.$$

С помощью формального разложения в ряд, указанный выше, последнее соотношение можно уточнить. А именно, как показал Крамер (см. [67, 68]), существует последовательность многочленов $\{P_k(x)\}$ такая, что

$$F(x; t) \sim \Phi(x) + \varphi(x) \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x) t^k,$$

причем, если $t \rightarrow 0$, то

$$\sup_{-\infty < x < \infty} \left| F(x; t) - \Phi(x) - \varphi(x) \sum_{k=1}^n P_k(x) t^k \right| \leq C t^{n+1},$$

где C — некоторая абсолютная постоянная. Первые три слагаемых асимптотического ряда для $F(x; t)$ имеют вид

$$F(x; t) = \Phi(x) - \frac{m_3}{6m_2^{3/2}} \varphi^{(2)}(x) t + \left[\frac{m_3^2}{72m_2^3} \varphi^{(5)}(x) + \frac{m_4 - 3m_2^2}{24m_2^2} \varphi^{(3)}(x) \right] t^2 + O(t^3). \quad (6)$$

Аналогичная асимптотическая формула имеет место и для функции $G(p; t)$, обратной $F(x; t)$ по аргументу x (функция G определяется тождеством $F[G(p; t); t] \equiv p$ для $0 < p < 1$). Как показано в статье [9], существует последовательность многочленов $\{Q_k(x)\}$ такая, что

$$\Phi[G(p; t)] \sim p + \varphi[\Psi(p)] \sum_{k=1}^{\infty} Q_k[\Psi(p)] t^k,$$

где $\Psi(p)$ — функция, обратная $\Phi(x)$ (см. таблицу 1.3). Если $t \rightarrow 0$, то на любом фиксированном отрезке $[c, d]$, расположенном внутри интервала $(0, 1)$,

$$\sup_{c < p < d} \left| G(p; t) - \Psi \left\{ p + \varphi[\Psi(p)] \sum_{k=1}^n Q_k[\Psi(p)] t^k \right\} \right| \leq D t^{n+1},$$

где D зависит лишь от c и d . Первые три слагаемых асимптотического ряда для сложной функции $\Phi[G(p; t)]$ имеют вид

$$\Phi[G(p; t)] = p + \frac{m_3}{6m_2^{3/2}} \varphi^{(2)}(x) t + \left\{ \frac{m_3^2}{72m_2^3} [\varphi^{(5)}(x) + 12\varphi^{(3)}(x) + 12\varphi^{(1)}(x)] - \frac{m_4 - 3m_2^2}{24m_2^2} \varphi^{(3)}(x) \right\} t^2 + O(t^3),$$

где $x = \Psi(p)$.

Практически для вычисления $G(p; t)$ при малых t удобнее пользоваться следствием этой асимптотической формулы (ряд Корниша — Фишера):

$$\varphi(x) [G(p; t) - x] = \frac{m_3}{6m_2^{3/2}} \varphi^{(2)}(x) t + \left\{ \frac{m_3^2}{36m_2^3} [2\varphi^{(3)}(x) + \varphi^{(1)}(x)] - \frac{m_4 - 3m_2^2}{24m_2^2} \varphi^{(3)}(x) \right\} t^2 + O(t^3). \quad (7)$$

Правые части формул (6) и (7) представляют собой линейные комбинации производных $\varphi^{(n)}(x)$ не выше пятого порядка, поэтому для вычисления приближенных значений функций $F(x; t)$ и $G(p; t)$ по этим формулам можно непосредственно воспользоваться таблицами 1.2 и 1.1.

Производные $\varphi^{(n)}(x)$ могут быть использованы также и для вычисления значений функции двумерного нормального распределения по формуле (см., например, [68])

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi \sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a_1}{\sigma_1}} \int_{-\infty}^{\frac{y-a_2}{\sigma_2}} \exp \left\{ -\frac{u^2 - 2\rho uv + v^2}{2(1-\rho^2)} \right\} du dv = \\ = \Phi \left(\frac{x-a_1}{\sigma_1} \right) \Phi \left(\frac{y-a_2}{\sigma_2} \right) + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)} \left(\frac{x-a_1}{\sigma_1} \right) \varphi^{(n)} \left(\frac{y-a_2}{\sigma_2} \right)}{(n+1)!} \rho^{n+1}. \quad (8) \end{aligned}$$

Ряд в правой части (8) сходится в интервале $-1 < \rho < 1$.

Члены этого ряда можно выразить через так называемые «тетрахорические» функции $\tau_k(x)$, которые связаны с производными $\varphi^{(k-1)}(x)$ равенством

$$\tau_k(x) = (-1)^k \varphi^{(k-1)}(x) / \sqrt{k!}.$$

В [Т38] даны семизначные таблицы функций $\tau_k(x)$ для $k = 1$ (1) 21.

Пример 1. Рассмотрим последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ взаимно независимых и одинаково нормально распределенных случайных величин с параметрами $(0, 1)$. Пусть

$$\chi_n^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2.$$

Легко можно убедиться, что в данном случае

$$a = M\xi_1^2 = 1, \quad m_2 = M(\xi_1^2 - 1)^2 = 2,$$

$$m_3 = M(\xi_1^2 - 1)^3 = 8, \quad m_4 = M(\xi_1^2 - 1)^4 = 60,$$

поэтому согласно (6)

$$\begin{aligned} P\{\chi_n^2 < n + x\sqrt{2n}\} &\equiv F\left(x; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \\ &= \Phi(x) - \frac{2}{3} \varphi^{(2)}(x) \frac{1}{\sqrt{2n}} + \\ &+ \left[\frac{2}{9} \varphi^{(5)}(x) + \varphi^{(3)}(x) \right] \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Положим в этой формуле $n = 72$ и вычислим приближенное значение вероятности $P\{\chi_{72}^2 < X\}$ при $X = 84,03$. Так как $X = n + x\sqrt{2n}$, то в данном случае $x = 1,0025$.

По таблице 1.1 линейной интерполяцией получаем

$$\begin{aligned} \Phi(1,0025) &= \Phi(1,002) + 0,5 \cdot \Delta\Phi(1,002) = \\ &= 0,841828 + 0,5 \cdot 0,000242 = 0,841949. \end{aligned}$$

Далее, из таблицы 1.2 при $x - x_0 = 1,0025 - 1,004 = -0,0015$ линейной интерполяцией по формуле

Тейлора находим

$$\begin{aligned}\varphi(1,0025) &= 0,241003 + 0,0015 \cdot 0,2420 = 0,241366, \\ \varphi^{(1)}(1,0025) &= -0,241967 - 0,0015 \cdot 0,0019 = -0,241970, \\ \varphi^{(2)}(1,0025) &= 0,001932 - 0,0015 \cdot 0,4820 = 0,001209, \\ \varphi^{(3)}(1,0025) &= 0,481994 + 0,0015 \cdot 0,4897 = 0,482729, \\ \varphi^{(5)}(1,0025) &= -1,436300 - 0,0015(1,004 \cdot 1,4363 + \\ &\quad + 5 \cdot 0,4897) = -1,442136.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}P\{\chi_{72}^2 < 84,03\} &\approx 0,841949 - \frac{2}{3} \cdot 0,001209 \cdot \frac{1}{12} + \\ &\quad + \left(-\frac{2}{9} \cdot 1,442136 + 0,482728\right) \cdot \frac{1}{144} = \\ &= 0,841949 - 0,000067 + 0,001127 = 0,84301.\end{aligned}$$

По таблице 2.16 $P\{\chi_{72}^2 < 84,03\} = 0,84289$ (с абсолютной погрешностью не более 10^{-5}). Следовательно, вычисленное приближенное значение этой вероятности имеет относительную погрешность менее 0,08%.

Пример 2. Условия те же, что и в предыдущем примере. Требуется вычислить также значения X' и X'' , для которых

$$P\{\chi_{72}^2 < X'\} = 0,025, \quad P\{\chi_{72}^2 < X''\} = 0,975.$$

Согласно (7) имеем

$$\begin{aligned}\varphi(x) \left[G\left(p; \frac{1}{6\sqrt{2}}\right) - x \right] &\approx \\ &\approx \frac{1}{18} \varphi^{(2)}(x) - \frac{1}{1296} [\varphi^{(3)}(x) - 4\varphi^{(1)}(x)],\end{aligned}$$

где (см. таблицу 1.3) следует положить $p = 0,025$ и $0,975$, $x = \Psi(p) = -1,959964$ и $+1,959964$ соответственно. Искомые величины X' и X'' связаны с заданными значениями вероятностей p соотношениями

$$\begin{aligned}X' &= 72 + 12 \cdot G\left(0,025; \frac{1}{6\sqrt{2}}\right), \\ X'' &= 72 + 12 \cdot G\left(0,975; \frac{1}{6\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

В таблице 1.2 ближайшее к $x > 0$ табличное значение аргумента есть $x_0 = 1,960$, поэтому в данном случае $x - x_0 = -0,000036$. Как и в предыдущем примере, по формуле Тейлора получаем

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= 0,058441 + 0,000036 \cdot 0,115 = 0,058445 = \\ &= \varphi(-x), \\ \varphi^{(1)}(x) &= -0,114544 - 0,000036 \cdot 0,166 = \\ &= -0,114550 = -\varphi^{(1)}(-x), \\ \varphi^{(2)}(x) &= 0,166066 + 0,000036 \cdot 0,096 = 0,166069 = \\ &= \varphi^{(2)}(-x), \\ \varphi^{(3)}(x) &= -0,096400 + 0,000036 \cdot 0,309 = \\ &= -0,096389 = -\varphi^{(3)}(-x).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}G\left(0,025; \frac{1}{6\sqrt{2}}\right) &\approx -1,797328, \\ G\left(0,975; \frac{1}{6\sqrt{2}}\right) &\approx 2,113048,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X' &\approx 72 - 12 \cdot 1,797328 = 50,432, \\ X'' &\approx 72 + 12 \cdot 2,113048 = 97,357.\end{aligned}$$

По таблице 2.2а $X' = 50,428$ и $X'' = 97,353$ (с абсолютной погрешностью не более 0,001). Таким образом, относительные ошибки вычисленных приближенных значений X' и X'' не превосходят 0,01%.

Пример 3. Пусть (ξ_1, ξ_2) — двумерная, нормально распределенная случайная величина с параметрами

$$\begin{aligned}a_1 &= M\xi_1 = 0, \quad a_2 = M\xi_2 = 0, \\ \sigma_1^2 &= D\xi_1 = 1, \quad \sigma_2^2 = D\xi_2 = 1,\end{aligned}$$

$$\rho = M[(\xi_1 - a_1)(\xi_2 - a_2)]/(\sigma_1\sigma_2) = M(\xi_1\xi_2) = 0,6,$$

и пусть требуется вычислить вероятность одновременно осуществления событий: $\xi_1 < -1,1$ и $\xi_2 < -1,2$. Согласно (8) имеем

$$\begin{aligned}P\{\xi_1 < -1,1; \xi_2 < -1,2\} &= \\ &= \frac{1}{1,6\pi} \int_{-\infty}^{-1,1} \int_{-\infty}^{-1,2} \exp\left\{-\frac{u^2 - 1,2uv + v^2}{1,28}\right\} du dv = \\ &= \Phi(-1,1)\Phi(-1,2) + \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(-1,1)\varphi^{(n)}(-1,2)}{(n+1)!} (0,6)^{n+1}.\end{aligned}$$

Так как $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ и $\varphi^{(n)}(-x) = (-1)^n \varphi^{(n)}(x)$, то искомая вероятность равна

$$\begin{aligned}[1 - \Phi(1,1)][1 - \Phi(1,2)] + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(1,1)\varphi^{(n)}(1,2)}{(n+1)!} (0,6)^{n+1}.\end{aligned}$$

Если ограничиться частной суммой этого ряда, в которой n изменяется от 0 до 5, то по таблицам 1.1 и 1.2 можно будет вычислить приближенное значение искомой вероятности:

$$\begin{aligned}P\{\xi_1 < -1,1; \xi_2 < -1,2\} &\approx 0,13567 \cdot 0,11507 + \\ &\quad + \frac{0,21785 \cdot 0,19419}{1} 0,6 + \frac{0,23964 \cdot 0,23302}{2} (0,6)^2 + \\ &\quad + \frac{0,04575 \cdot 0,08544}{6} (0,6)^3 + \frac{0,4290 \cdot 0,3635}{24} (0,6)^4 + \\ &\quad + \frac{0,609 \cdot 0,693}{120} (0,6)^5 + \frac{1,05 \cdot 0,62}{720} (0,6)^6 = 0,05233.\end{aligned}$$

С точностью до единицы пятого знака точное значение искомой вероятности, вычисленное по таблицам [Т34], равно 0,05247. Следовательно, относительная ошибка в данном случае менее 0,3%.

Более подробные и обстоятельные сведения о применениях таблицы 1.2 можно найти в монографиях [52, 68].

Таблица 1.3. Функция, обратная функции нормального распределения

Функцией, обратной функции нормального распределения $p = N(x; a, \sigma)$ (см. (1)), называется такая функция $x = N^{-1}(p; a, \sigma)$, значение которой в произвольной точке p интервала $(0, 1)$ определяется как корень x уравнения $p = N(x; a, \sigma)$. В силу равенств (2) и (3) это уравнение имеет вид

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{(x-a)/\sigma} e^{-t^2/2} dt, \quad (9)$$

где a и σ — параметры распределения ($-\infty < a < +\infty$, $\sigma > 0$). В математической статистике значения функции $N^{-1}(p; a, \sigma)$ иногда

называют p -квантилями нормального распределения с параметрами (a, σ) .

Согласно равенству (8)

$$N^{-1}(p; a, \sigma) = a + \sigma N^{-1}(p; 0, 1),$$

поэтому для вычисления значений $N^{-1}(p; a, \sigma)$ достаточно иметь таблицу функции $\Psi(p) = N^{-1}(p; 0, 1)$, которая представляет собой обратную функцию для $\Phi(x)$ (см. (3)). Таким образом,

$$\Phi[\Psi(p)] \equiv p \quad (0 < p < 1).$$

Так как $\Psi(p)$ при всех p из интервала $(0, 1)$ удовлетворяет тождеству (см. (4))

$$\Psi(p) + \Psi(1 - p) \equiv 0,$$

то практически нужны таблицы функции $\Psi(p)$ лишь для тех значений p , которые принадлежат полуинтервалу $0,5 \leq p < 1$.

В таблице 1.3 даны значения $\Psi(p)$ с шестью десятичными знаками для

$$p = 0,500 \ (0,001) \ 0,9700 \ (0,0001) \ 0,9990.$$

Каждая табличная строка представляет собой таблицу, в которой последний десятичный знак аргумента p меняется от 0 до 9, причем в столбцах с первого по девятый указаны лишь пять последних десятичных знаков, отличных от цифр в первом столбце (табличные значения функции $\Psi(p)$, у которых две первые цифры одинаковы, выделены «зонами»).

Пусть, например, требуется определить $\Psi(0,9775)$. На пересечении строки «с номером» 0,977 и столбца «с номером» 5 расположено число 04654; это число находится в той «зоне», где первые две цифры в «нулевом» столбце есть 2,0, поэтому окончательно $\Psi(0,9775) = 2,004657$.

Для вычисления значений Ψ при $0,999 < p \leq 0,999999$ дана специальная таблица, где для облегчения интерполяции вместо p за аргумент принята величина $-\lg(1 - p) = -\lg 1/(1 - p)$ ($\lg$ — десятичный логарифм).

Интерполяция таблицы 1.3 на шесть десятичных знаков не сложнее кубичной. Погрешность квадратичной интерполяции нигде не превосходит 10^{-5} , если в качестве интерполяционной формулы воспользоваться формулой Бесселя:

$$\Psi(p) = \Psi(p_0) + u\Delta\Psi(p_0) - \frac{u(1-u)}{4}[\Delta^2\Psi(p_0) + \Delta^2\Psi(p_{-1})],$$

где $p_{-1}, p_0, p_1, \dots$ — равноотстоящие таблич-

ные значения аргумента, $p_0 \leq p < p_1$, $u = (p - p_0)/(p_1 - p_0)$ — фаза интерполяции. Первые и вторые разности функции $\Psi(p)$ определяются формулами

$$\Delta\Psi(p_i) = \Psi(p_{i+1}) - \Psi(p_i),$$

$$\Delta^2\Psi(p_i) = \Delta\Psi(p_{i+1}) - \Delta\Psi(p_i).$$

Пусть, например, требуется вычислить $\Psi(0,99875)$. По таблице 1.3 выписываем четыре соответствующих значения функции Ψ и составляем следующую вспомогательную таблицу разностей (выделены те значения функции Ψ и ее разностей $\Delta\Psi$ и $\Delta^2\Psi$, которые входят в интерполяционную формулу):

	$\Psi(p_i)$	$\Delta\Psi(p_i)$	$\Delta^2\Psi(p_i)$
$p_{-1} = 0,9986$	2,988882	22 572	1646
$p_0 = 0,9987$	3,011454	24 218	1924
$p_1 = 0,9988$	3,035672	26 142	
$p_2 = 0,9989$	3,061814		

Так как в данном случае $u = 0,5$ и $(1 - u) = 0,25$, то по формуле Бесселя получаем

$$\Psi(0,99875) \approx 3,011454 + 0,024218/2 - 0,003570/16 = 3,023340.$$

На самом же деле с точностью до шестого знака $\Psi(0,99875) = 3,023342$.

Таблица 1.3 составлена по восьмизначным таблицам [Т10]. Дополнительная таблица для отыскания $\Psi(p)$ при $p > 0,999$ вычислена в отделе математической статистики Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР.

Более подробные сведения о функции $\Psi(p)$ и ее применениях можно найти в [Т10] и [28, 47, 68].

Таблица 1.4. Отношение Миллса

В таблице даны (с пятью десятичными знаками) значения отношения Миллса

$$\frac{1 - \Phi(x)}{\varphi(x)} = e^{x^2/2} \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt$$

для $x = 0,00 \ (0,01) \ 3,0 \ (0,1) \ 10$. При $x > 10$ это отношение приближенно равно выражению $x^{-1} - x^{-3} + 3x^{-5}$; погрешность не превышает $15x^{-7}$.

II. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ χ^2

Случайной величиной χ_n^2 , подчиняющейся распределению χ^2 с n степенями свободы, называют сумму квадратов n взаимно независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, одинаково нормально распределенных с параметрами $(0, 1)$ (см. раздел I). Таким образом,

$$\chi_n^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2.$$

Функция распределения χ^2 с n степенями свободы выражается формулой (см., например, [38, 68])

$$F_n(x) = P\{\chi_n^2 < x\} = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_0^x y^{n/2-1} e^{-y/2} dy, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Таблицы этого раздела предназначены для вычисления значений так называемого интеграла вероятностей χ^2 :

$$P(x, n) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_x^\infty y^{n/2-1} e^{-y/2} dy, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (1)$$

Связанного с функцией распределения χ^2 соотношением

$$P(x, n) = 1 - F_n(x),$$

а также для вычисления Q -процентных точек распределения χ^2 (иногда их называют Q -процентными критическими значениями), которые определяются как значения функции $x(Q, n)$, обратной $100P(x, n) \%$ по аргументу x :

$$P[x(Q, n), n] \equiv Q/100$$

$$(0\% < Q < 100\%; n = 1, 2, \dots).$$

Иными словами, при фиксированных Q и n значение Q -процентной точки $x(Q, n)$ определяется как корень x уравнения $P(x, n) = 0,01Q$.

Производные интеграла $P(x, n)$ по аргументу x связаны с разностями по аргументу $n/2$ формулой

$$\frac{\partial^s}{\partial x^s} P(x, n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^s \nabla^s P(x, n - 2s), \quad (2)$$

где

$$\nabla P(x, m) = P(x, m + 2) - P(x, m),$$

$$\nabla^s P(x, m) = \nabla^{s-1} P(x, m + 2) - \nabla^{s-1} P(x, m).$$

Поэтому разложение функции $P(x, n)$ по степеням $(x - x_0)$ имеет вид

$$P(x, n) = P(x_0, n) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^m \frac{(x - x_0)^m}{m!} \nabla^m P(x_0, n - 2m). \quad (3)$$

Разности $\nabla^m P$ можно использовать также для вычисления ортогональных функций Лагерра. Полином Лагерра $L_m^{(\alpha)}(y)$ степени m с индексом α определяется формулой ($\alpha > 0, y > 0$)

$$\frac{\partial^m}{\partial y^m} (y^{m+\alpha-1} e^{-y}) = (-1)^m m! L_m^{(\alpha)}(y) y^{\alpha-1} e^{-y}.$$

Полагая $\alpha = n/2, y = x/2$ и разделив обе части последнего равенства на $2^{m+1} \Gamma(m + n/2)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \left[\frac{x^{m+n/2-1} e^{-x/2}}{2^{m+n/2} \Gamma(m + n/2)} \right] &= \\ &= (-1)^m \frac{\Gamma(m+1) \Gamma(n/2)}{2^m \Gamma(m + n/2)} L_m^{(n/2)} \left(\frac{x}{2} \right) \frac{x^{n/2-1} e^{-x/2}}{2^{n/2} \Gamma(n/2)}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}} P(x, n + 2m) &= \\ &= (-1)^m \frac{\Gamma(m+1) \Gamma(n/2)}{2^m \Gamma(m + n/2)} L_m^{(n/2)} \left(\frac{x}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x} P(x, n). \end{aligned}$$

Таким образом, в силу (2)

$$\begin{aligned} L_m^{(n/2)} \left(\frac{x}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x} P(x, n) &= \\ &= -\frac{1}{2} \left(m + \frac{n}{2} - 1 \right) \nabla^{m+1} P(x, n - 2), \end{aligned}$$

или, окончательно,

$$L_m^{(n/2)} \left(\frac{x}{2} \right) = \left(m + \frac{n}{2} - 1 \right) \frac{\nabla^{m+1} P(x, n - 2)}{\nabla P(x, n - 2)},$$

$$\text{где } \left(m + \frac{n}{2} - 1 \right) = \frac{\Gamma(m+1) \Gamma(n/2)}{\Gamma(m + n/2)}.$$

Интегрированием по частям можно убедиться в том, что система многочленов Лагерра $\{L_m^{(n/2)}(x/2)\}$

ортогональна на полупрямой $x > 0$ с весом $-\partial P(x, n)/\partial x$:

$$\frac{1}{2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty L_r^{(n/2)}\left(\frac{x}{2}\right) L_s^{(n/2)}\left(\frac{x}{2}\right) x^{n/2-1} e^{-x/2} dx = \begin{cases} \binom{s+n/2-1}{s} & \text{при } r=s, \\ 0 & \text{при } r \neq s. \end{cases}$$

О разложении функций в ряд по многочленам Лагерра см., например, [17, 68, 70].

При составлении таблиц распределения χ^2 были учтены два основных требования:

1. Таблицы должны обеспечивать одинаковую точность вычисления значений функций $P(x, n)$ и $x(Q, n)$ во всей области изменения переменных x, n и Q :

$$0 < x < \infty, \quad r = 1, 2, 3, \dots, \\ Q = 0,05; 0,1; 0,5; 1; 2,5; 5; 10 \quad (10) \quad 90; 95; \\ 97,5; 99; 99,5; 99,9; 99,95\%.$$

2. Интерполяция должна быть возможно простой и по своей трудности не превосходить квадратичной интерполяции.

В качестве источников были использованы таблицы [Т27, Т33, Т51] и работа [9]. В силу того, что таблицы [Т27] не удовлетворяют первому из указанных требований, а таблицы [Т33] — второму, потребовалась их переработка, результаты которой представлены таблицами 2.1а и 2.1б. Таблицы [Т51] воспроизводятся без изменений в разделе 2.2а, где табулированы процентные точки распределения χ^2 в интервале $n = 1$ (1) 100.

При вычислении процентных точек $x(Q, n)$ для $n > 100$ обычно рекомендуется пользоваться теми или иными асимптотическими формулами (см., например, [Т27] или [Т56]). Однако все эти формулы, как правило, не обеспечивают той же точности, которую дают основные таблицы типа [Т51], и, следовательно, не удовлетворяют первому из указанных требований. По этой причине составители сочли целесообразным дополнить таблицу 2.2а таблицей 2.2б, где даны поправки к одной из простейших асимптотических формул (см. [9]).

СОСТАВ ТАБЛИЦ

Таблица 2.1а. Интеграл вероятностей χ^2

В этой таблице даны (с пятью верными десятичными знаками) значения функции $P(x, n)$ (см. (1)) для $n = 1$ (1) 32 (2) 70. Так как при $n = 1$ интерполяция в области малых значений x затруднительна, то для вычисления $P(x, 1)$ при $x < 1$ (в точках, не совпадающих с табличными) рекомендуется пользоваться формулой $P(x, 1) = 2 [1 - \Phi(\sqrt{x})]$ (см.

таблицу 1.1). Следует отметить, что $P(y^2, 2)$ как функция аргумента y представляет собой интеграл вероятностей распределения Релея, а $P(y^2, 1)$ — интеграл вероятностей модуля нормально распределенной случайной величины с параметрами (0, 1).

Таблица 2.1б. Поправки для вычисления интеграла вероятностей χ^2

В таблице даны значения функции

$$R(t, v) = P(x, n) - [1 - \Phi(t)], \quad (4)$$

где

$$t = \sqrt{2x} - \sqrt{2n}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{2n}},$$

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-z^2/2} dz.$$

Аргументы t и v изменяются в пределах

$$t = -4,5 \quad (0,1) \quad 4,8, \\ v = 0,01 \quad (0,01) \quad 0,11 \quad (0,005) \quad 0,125.$$

Используя таблицы 1.1 и 2.1б, можно вычислять значения интеграла вероятностей $P(x, n)$ с пятью верными десятичными знаками для всех $n \geq 32$ (не обязательно целых) по формуле

$$P(x, n) = 1 - \Phi(t) + R(t, v), \quad (5)$$

где t и v связаны с x и n соотношениями (4).

Следует подчеркнуть, что при $32 \leq n \leq 70$ применимы как таблица 2.1а, так и таблица 2.1б. Однако, если n — четное число, то, конечно, таблица 2.1а для вычисления $P(x, n)$ предпочтительнее, так как здесь $n = 32$ (2) 70. При нечетном n рекомендуется пользоваться таблицей 2.1б.

Таблица 2.2а. Процентные точки распределения χ^2

В этой таблице даны значения функции $x(Q, n)$ для $n = 1$ (1) 100 и указанных выше значений Q . Погрешность значений не превосходит $5 \cdot 10^{-4}$.

Таблица 2.2б. Поправки для вычисления процентных точек распределения χ^2

Дополнение таблицы 2.2а, в котором табулирована функция

$$r(Q, v) = x(Q, n) - n - \Psi\left(1 - \frac{Q}{100}\right) \sqrt{2n}, \quad (6)$$

где $v = 1/\sqrt{2n}$, и $\Psi(1 - 0,01Q)$ представляет собой Q -процентную точку нормального распределения с параметрами (0, 1) (см. таблицу 1.3). Значения r даны с тремя десятичными зна-