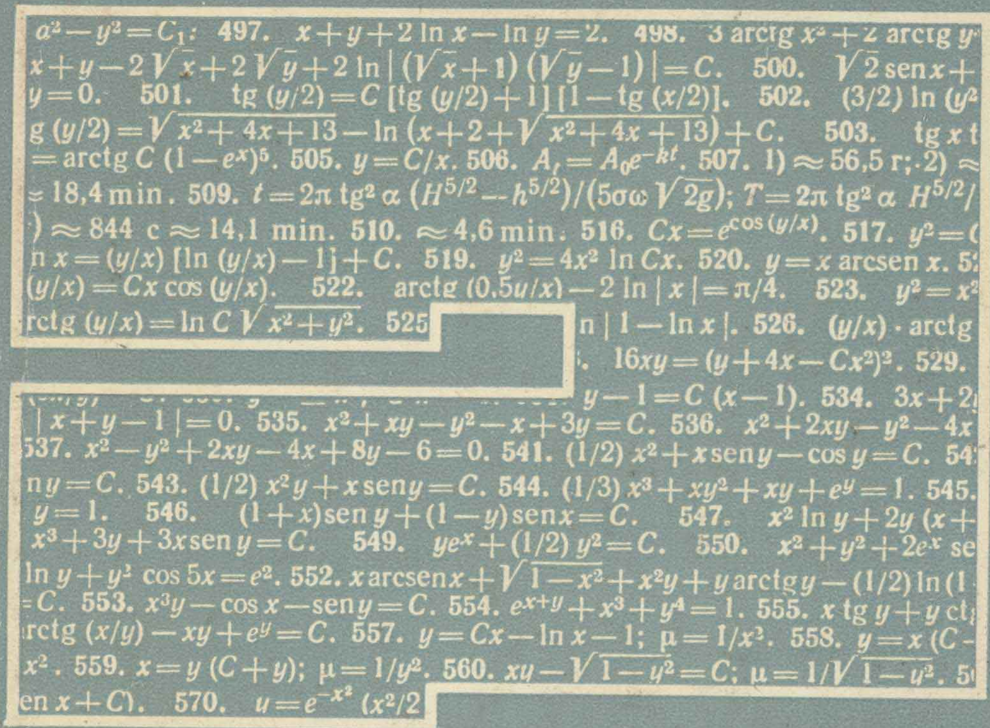
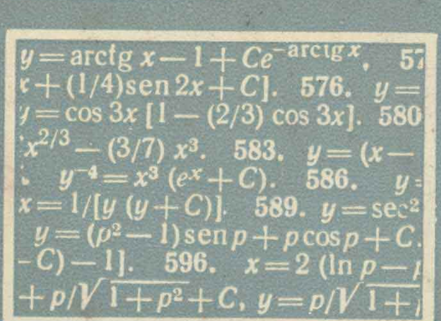
P. E. DANKÓ, A. G. POPOV, T. YA. KOZHÉVNIKOVA

MATEMÁTICAS SUPERIORES EN EJERCICIOS Y PROBLEMAS

2 PARTE





EDITORIAL · MIR ·
MOSCÚ

P. E. DANKO,
A. G. POPOV,
T. YA. KOZHEVNIKOVA

MATEMÁTICAS SUPERIORES EN EJERCICIOS Y PROBLEMAS

2 PARTE

EDITORIAL "MIR"
MOSCU

П. Е. Данко,
А. Г. Попов,
Т. Я. Кожевникова

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В УПРАЖНЕНИЯХ И ЗАДАЧАХ

II

ЧАСТЬ

Издательство
«Высшая школа»
Москва

ИЗДАТЕЛЬСТВО МИР

P. E. DANKO,
A. G. POPOV,
T. YA. KOZHEVNIKOVA

MATEMÁTICAS SUPERIORES EN EJERCICIOS Y PROBLEMAS

2

PARTE

EDITORIAL "MIR"
MOSCU

Traducido del ruso por
A. I. Samojválov

Impreso en la URSS

На испанском языке

Indice

Capítulo I. Integrales dobles y triples

§ 1. Integral doble en coordenadas rectangulares

Supongamos que la función $f(x, y)$ está definida en una región cerrada acotada D del plano xOy. Dividimos arbitrariamente la región D en n regiones elementales que tienen las áreas $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$ y los diámetros $d_1, d_2, \ldots, d_n$ (se llama *diámetro de una región* a la mayor de las distancias entre dos puntos de la frontera de esta región). Escogemos en cada región elemental un punto arbitrario $P_k(\xi_k; \eta_k)$ y multiplicamos el valor de la función en el punto P_k por el área de esta región.

Se denomina *suma integral* para la función $f(x, y)$ de la región D a la suma que tiene la forma siguiente:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\,\Delta\sigma_k = f(\xi_1, \eta_1)\,\Delta\sigma_1 + f(\xi_2, \eta_2)\,\Delta\sigma_2 + \ldots + f(\xi_n, \eta_n)\,\Delta\sigma_n.$$

Se llama *integral doble* de la función $f(x, y)$ de la región D al límite de la suma integral a condición de que el mayor entre los diámetros de las regiones elementales tienda a cero:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,d\sigma = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\,\Delta\sigma_k.$$

Si la función $f(x, y)$ es continua en la región cerrada D, el límite de la suma integral existe y no depende del procedimiento de división de la región D en regiones elementales y de la selección de los puntos P_k (*teorema de existencia* de una integral doble).

Si $f(x, y) > 0$ en la región D, entonces la integral doble $\iint\limits_D f(x, y)\,d\sigma$ es igual al *volumen del cuerpo cilíndrico* limitado de arriba por la superficie $z = f(x, y)$, de costado por la superficie cilíndrica cuyas generatrices son paralelas al eje Oz y de abajo por la región D del plano xOy.

Propiedades principales de una integral doble

1ª. $\iint\limits_D [f_1(x, y) \pm f^2(x, y)]\,d\sigma = \iint\limits_D f_1(x, y)\,d\sigma \pm \iint\limits_D f_2(x, y)\,d\sigma.$

2ª. $\iint\limits_D c\cdot f(x, y)\,d\sigma = c\iint\limits_D f(x, y)\,d\sigma$, donde c es una constante.

3ª. Si la región de integración D está dividida en dos regiones D_1 y D_2, entonces

$$\iint_D f(x, y)\, d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y)\, d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y)\, d\sigma.$$

En las coordenadas cartesianas la integral doble se suele escribir en la forma $\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$.

Reglas de cálculo de las integrales dobles

Se distinguen dos tipos principales de regiones de integración.

1. La región de integración D está limitada de los lados izquierdo y derecho por las rectas $x = a$ y $x = b$ $(a < b)$ y de abajo y de arriba por las líneas curvas continuas $y = \varphi_1(x)$ e $y = \varphi_2(x)$ $[\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)]$ cada una de las cuales se interseca con la recta vertical sólo en un punto (fig. 1).

Para una región así la integral doble se calcula por la fórmula

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy,$$

además, primeramente se calcula la integral $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy$ en la cual x se considera constante.

2. La región de integración D está limitada de abajo y de arriba por las rectas $y = c$ e $y = d$ $(c < d)$ y del lado izquierdo y del lado derecho por las

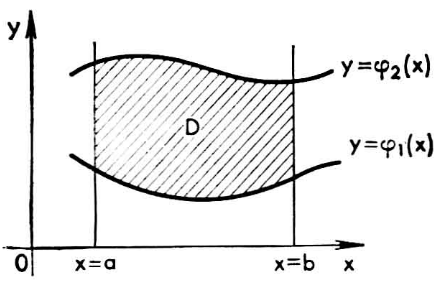


Fig. 1

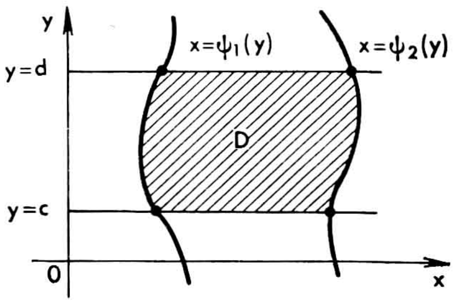


Fig. 2

líneas curvas continuas $x = \psi_1(y)$ y $x = \psi_2(y)$ $[\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)]$ cada una de las cuales se interseca por la recta horizontal sólo en un punto (fig. 2).

Para una región así la integral doble se calcula por la fórmula

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx,$$

además, primeramente se calcula la integral $\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx$ en la cual y se considera constante.

Los segundos miembros de las fórmulas indicadas se llaman integrales *dobles* (o *reiteradas*).

En un caso más general la región de integración por medio de la división por partes se reduce a las principales.

1. Calcular $\iint\limits_D x\ln y\,dx\,dy$ si la región D es el rectángulo $0\leqslant x\leqslant 4,\ 1\leqslant y\leqslant e$.

Resolución. Tenemos

$$\iint\limits_D x\ln y\,dx\,dy=\int\limits_0^4 x\,dx\int\limits_1^e \ln y\,dy=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4\cdot[y\ln y-y]_1^e=8\cdot(e-e+1)=8.$$

2. Calcular $\iint\limits_D (\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 y)\,dx\,dy$ si la región D es el cuadrado $0\leqslant x\leqslant \pi/4,\ 0\leqslant y\leqslant \pi/4$.

Resolución. Hallamos

$$\iint\limits_D (\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 y)\,dx\,dy=\int\limits_0^{\pi/4} dx\int\limits_0^{\pi/4}(\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 y)\,dy=\int\limits_0^{\pi/4}\left[y\cos^2 x+\frac{y}{2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2y\right]_0^{\pi/4}dx=\int\limits_0^{\pi/4}\left(\frac{\pi}{4}\cos^2 x-\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)dx=\left[\frac{\pi}{8}\left(x+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)x\right]_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{8}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2}{16}.$$

3. Calcular $I=\int\limits_1^2 dx\int\limits_x^{x^2}(2x-y)\,dy$.

Resolución. Tenemos

$$I=\int\limits_1^2\left[2xy-\frac{1}{2}y^2\right]_x^{x^2}dx=\int\limits_1^2\left(2x^3-\frac{1}{2}x^4-2x^2+\frac{1}{2}x^2\right)dx=$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{2}x^3\right]_1^2=0{,}9.$$

4. Calcular $\iint\limits_D (x-y)\,dx\,dy$, si la región D está limitada por las líneas $y=2-x^2,\ y=2x-1$.

Resolución. Vamos a construir la región D. La primera línea es una parábola que tiene por vértice el punto (0; 2), simétrica respecto al eje Oy. La segunda línea es una recta. Resolviendo conjuntamente las ecuaciones $y=2-x^2$ e $y=2x-1$, determinamos las coordenadas de los puntos de intersección A (—3; —7), B (1; 1) (fig. 3).

La región de integración pertenece al primer tipo. Encontramos

$$\iint_D (x-y)\,dx\,dy=\int_{-3}^{1} dx \int_{2x-1}^{2-x^2} (x-y)\,dy=$$

$$=\int_{-3}^{1}\left[xy-\frac{1}{2}y^2\right]_{2x-1}^{2-x^2} dx=\int_{-3}^{1}\left(2x-x^3-2+2x^2-\frac{1}{2}x^4-2x^2+\right.$$

$$\left.+x+2x^2-2x+\frac{1}{2}\right)dx=\int_{-3}^{1}\left(-\frac{1}{2}x^4-x^3+2x^2+x-\frac{3}{2}\right)dx=$$

$$=\left[-\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x\right]_{-3}^{1}=4\frac{4}{15}.$$

5. Calcular $\iint_D (x+2y)\,dx\,dy$, si la región D está limitada por las rectas $y=x$, $y=2x$, $x=2$, $x=3$.

Resolución. Hallamos

$$\iint_D (x+2y)\,dx\,dy=\int_2^3 dx\int_x^{2x}(x+2y)\,dy=$$

$$\int_2^3 [xy+y^2]_x^{2x}\,dx=\int_2^3 (2x^2+4x^2-x^2-x^2)\,dx=4\int_2^3 x^2\,dx=\frac{3}{4}x^3\big|_2^3=25\frac{1}{3}.$$

6. Calcular $\iint_D e^{x+\operatorname{sen} y}\cos y\,dx\,dy$ si la región D es un rectángulo $0\leqslant x\leqslant\pi$, $0\leqslant y\leqslant\pi/2$.

7. Calcular $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, si la región D está limitada por las líneas $y=x$, $x=0$, $y=1$, $y=2$.

8. Calcular $\iint_D (3x^2-2xy+y)\,dx\,dy$, si la región D está limitada por las líneas $x=0$, $x=y^2$, $y=2$.

9. Cambiar el orden de integración en la integral $\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\,dy$.

Resolución. La región de integración D está limitada por las líneas $x=-1$, $x=1$, $y=-\sqrt{1-x^2}$, $y=1-x^2$ (fig. 4). Vamos a cambiar el orden de integración para lo cual representamos la región dada en forma de dos regiones (del segundo tipo): D_1 limitada de los lados izquierdo y derecho por

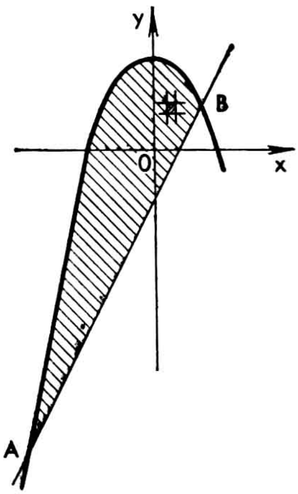


Fig. 3

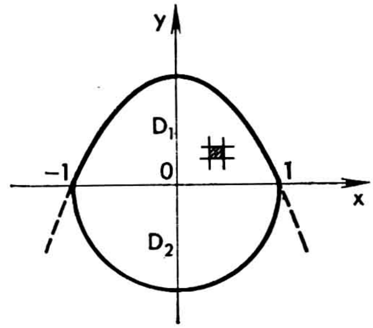


Fig. 4

las ramas de la parábola $x = \pm\sqrt{1-y}$ $(0 \leqslant y \leqslant 1)$ y D_2 limitada por los arcos de la circunferencia $x = \pm\sqrt{1-y^2}$ $(-1 \leqslant y \leqslant 0)$. Entonces

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y)\, dy = \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y)\, dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\, dx.$$

10. Calcular $\int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx \int_0^a y\, dy.$

11. Calcular $\int_1^3 dx \int_{x^2}^{x} (x-y)\, dy.$

12. Calcular $\iint_D y \ln x\, dx\, dy$, si la región D está limitada por las líneas $xy=1$, $y=\sqrt{x}$, $x=2$.

13. Calcular $\iint_D (\cos 2x + \operatorname{sen} y)\, dx\, dy$, si la región D está limitada por las líneas $x=0$, $y=0$, $4x+4y-\pi=0$.

14. Calcular $\iint_D (3x+y)\, dx\, dy$, si la región D se define por las desigualdades $x^2+y^2 \leqslant 9$, $y \geqslant (2/3)\, x + 3$.

15. Calcular $\iint_D \operatorname{sen}(x+y)\, dx\, dy$, si la región D está limitada por las líneas $x=0$, $y=\pi/2$, $y=x$.

16. Calcular $\iint\limits_D x\,dx\,dy$, si la región D es el triángulo que tiene por vértices A (2; 3), B (7; 2), C (4; 5).

Cambiar el orden de integración:

17. $\int\limits_{-6}^{2} dx \int\limits_{x^2/4-1}^{2-x} f(x, y)\,dy.$

18. $\int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{0}^{\ln x} f(x, y)\,dy.$

19. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx.$

20. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x} f(x, y)\,dy.$

21. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{(1-x)^2/2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy.$

22. $\int\limits_{0}^{\pi} dx \int\limits_{0}^{\operatorname{sen} x} f(x, y)\,dy.$

§ 2. Cambio de variables en una integral doble

1. Integral doble en coordenadas polares. La transformación de una integral doble, haciéndola pasar de las coordenadas rectangulares x, y a *las polares* ρ, θ ligadas con las rectangulares por las relaciones $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\theta$, se lleva a cabo por la fórmula

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta.$$

Si la región de integración D está limitada por dos semirrectas $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ $(\alpha < \beta)$ que salen del polo y por dos curvas $\rho = \rho_1(\theta)$ y $\rho = \rho_2(\theta)$, donde $\rho_1(\theta)$ y $\rho_2(\theta)$ son funciones unívocas para $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$ y $\rho_1(\theta) \leqslant \rho_2(\theta)$, entonces la *integral doble se calcula por la fórmula*

$$\iint\limits_D F(\rho, \theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\theta \int\limits_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} F(\rho, \theta)\,\rho\,d\rho,$$

donde $F(\rho, \theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)$, además, primeramente se calcula

$\int\limits_{\rho_1(\rho)}^{\rho_2(\theta)} F(\rho, \theta)\,\rho\,d\rho$ en la cual θ se considera constante.

2. Integral doble en coordenadas curvilíneas. Supongamos que una integral doble se transforma pasando de las coordenadas rectangulares x, y a *las curvi-*

líneas u, v ligadas con las rectangulares por las relaciones $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, donde las funciones $x(u, v)$ e $y(u, v)$ tienen derivadas parciales continuas en la región D' del plano $uO'v$ y el *jacobiano de transformación* en la región D' no se anula:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Con ello se establece una correspondencia recíprocamente unívoca y continua en ambas direcciones entre los puntos de la región D del plano xOy y los puntos de la región D' del plano $uO'v$ (fig. 5).

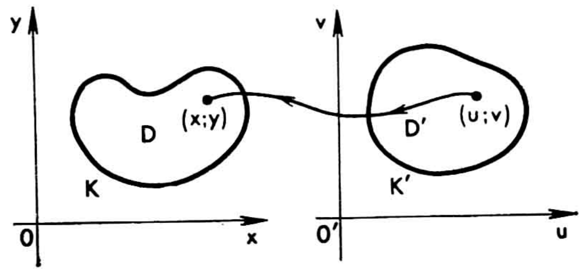


Fig. 5

En este caso la *fórmula de transformación de la integral doble* tiene el aspecto

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{D'} f[x(u,v),\ y(u, v)]\ |J|\ du\, dv.$$

Para el caso de las coordenadas polares

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho.$$

23. Pasando a las coordenadas polares, calcular $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$ si D es el cuadrante I del círculo $x^2+y^2 \leqslant a^2$.

Resolución. Haciendo $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\theta$, tenemos

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy = \iint_D \sqrt{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta}\ \rho\, d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a \rho^2\, d\rho = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \rho^3 \Big|_0^a d\theta = \frac{a^3}{3}\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi a^3}{6}.$$

24. Calcular $\iint_D \ln(x^2+y^2)\, dx\, dy$ si la región D es el anillo comprendido entre las circunferencias $x^2+y^2 = e^2$ y $x^2+y^2 = e^4$.