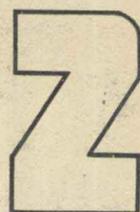


MATEMÁTICAS SUPERIORES EN EJERCICIOS Y PROBLEMAS



PARTE

$a^2 - y^2 = C_1$. 497. $x + y + 2 \ln x - \ln y = 2$. 498. $3 \operatorname{arctg} x^2 + z \operatorname{arctg} y$
 $x + y - 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 2 \ln |(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{y} - 1)| = C$. 500. $\sqrt{2} \sin x +$
 $y = 0$. 501. $\operatorname{tg}(y/2) = C [\operatorname{tg}(y/2) + 1] [1 - \operatorname{tg}(x/2)]$. 502. $(3/2) \ln(y^2$
 $\operatorname{g}(y/2) = \sqrt{x^2 + 4x + 13} - \ln(x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 13}) + C$. 503. $\operatorname{tg} x t$
 $= \operatorname{arctg} C (1 - e^x)^5$. 505. $y = C/x$. 506. $A_t = A_0 e^{-kt}$. 507. $1) \approx 56,5 \text{ r}; 2) \approx$
 $\approx 18,4 \text{ min}$. 509. $t = 2\pi \operatorname{tg}^2 \alpha (H^{5/2} - h^{5/2}) / (5\sigma\omega \sqrt{2g})$; $T = 2\pi \operatorname{tg}^2 \alpha H^{5/2} /$
 $) \approx 844 \text{ c} \approx 14,1 \text{ min}$. 510. $\approx 4,6 \text{ min}$. 516. $Cx = e^{\cos(y/x)}$. 517. $y^2 = ($
 $n x = (y/x) [\ln(y/x) - 1] + C$. 519. $y^2 = 4x^2 \ln Cx$. 520. $y = x \operatorname{arcsen} x$. 5;
 $(y/x) = Cx \cos(y/x)$. 522. $\operatorname{arctg}(0,5u/x) - 2 \ln|x| = \pi/4$. 523. $y^2 = x^2$
 $\operatorname{rctg}(y/x) = \ln C \sqrt{x^2 + y^2}$. 525. $n |1 - \ln x|$. 526. $(y/x) \cdot \operatorname{arctg}$
 $16xy = (y + 4x - Cx^2)^2$. 529.

$y - 1 = C(x - 1)$. 534. $3x + 2$
 $|x + y - 1| = 0$. 535. $x^2 + xy - y^2 - x + 3y = C$. 536. $x^2 + 2xy - y^2 - 4x$
 $537. x^2 - y^2 + 2xy - 4x + 8y - 6 = 0$. 541. $(1/2) x^2 + x \operatorname{sen} y - \cos y = C$. 54
 $ny = C$. 543. $(1/2) x^2 y + x \operatorname{sen} y = C$. 544. $(1/3) x^3 + xy^2 + xy + e^y = 1$. 545.
 $y = 1$. 546. $(1 + x) \operatorname{sen} y + (1 - y) \operatorname{sen} x = C$. 547. $x^2 \ln y + 2y(x +$
 $x^3 + 3y + 3x \operatorname{sen} y = C$. 549. $ye^x + (1/2) y^2 = C$. 550. $x^2 + y^2 + 2e^x \operatorname{se}$
 $\ln y + y^2 \cos 5x = e^2$. 552. $x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1 - x^2} + x^2 y + y \operatorname{arctg} y - (1/2) \ln(1$
 $= C$. 553. $x^3 y - \cos x - \operatorname{sen} y = C$. 554. $e^{x+y} + x^3 + y^4 = 1$. 555. $x \operatorname{tg} y + y \operatorname{ctg}$
 $\operatorname{rctg}(x/y) - xy + e^y = C$. 557. $y = Cx - \ln x - 1$; $\mu = 1/x^2$. 558. $y = x(C -$
 x^2 . 559. $x = y(C + y)$; $\mu = 1/y^2$. 560. $xy - \sqrt{1 - y^2} = C$; $\mu = 1/\sqrt{1 - y^2}$. 5
 $\operatorname{en} x + C$. 570. $u = e^{-x^2} (x^2/2$

$y = \operatorname{arctg} x - 1 + Ce^{-\operatorname{arctg} x}$. 57
 $r + (1/4) \operatorname{sen} 2x + C$. 576. $y =$
 $y = \cos 3x [1 - (2/3) \cos 3x]$. 580
 $x^{2/3} - (3/7) x^3$. 583. $y = (x -$
 $y^4 = x^3 (e^x + C)$. 586. $y =$
 $x = 1/[y(y + C)]$. 589. $y = \sec^2$
 $y = (\rho^2 - 1) \operatorname{sen} \rho + \rho \cos \rho + C$
 $- C) - 1]$. 596. $x = 2 (\ln \rho - \rho$
 $+ \rho/\sqrt{1 + \rho^2} + C$, $y = \rho/\sqrt{1 + \rho^2}$

**P.E.DANKO,
A.G.POPOV,
T.YA.KOZHEVNIKOVA**

**MATEMÁTICAS
SUPERIORES
EN EJERCICIOS
Y PROBLEMAS**

2

PARTE

**EDITORIAL "MIR"
MOSCU**

П. Е. Данко,
А. Г. Попов,
Т. Я. Кожевникова

**ВЫСШАЯ
МАТЕМАТИКА
В УПРАЖНЕНИЯХ
И ЗАДАЧАХ**

II

ЧАСТЬ

Издательство
«Высшая школа»
Москва



**Р.Е.ДАНКО,
А.Г.ПОПОВ,
Т.Я.КОЗНЕВНИКОВА**

MATEMÁTICAS SUPERIORES EN EJERCICIOS Y PROBLEMAS

2

PARTE

**EDITORIAL "MIR"
MOSCU**

Traducido del ruso por
A. I. Samojvátov

Impreso en la URSS

На испанском языке

© Издательство «Высшая школа». 1980

© Traducción al español. Editorial Mir. 1983

Indice

Capítulo I. Integrales dobles y triples	9
§ 1. Integral doble en coordenadas rectangulares	9
§ 2. Cambio de variables en una integral doble	14
§ 3. Cálculo del área de una figura plana	17
§ 4. Cálculo del volumen de un cuerpo	20
§ 5. Cálculo del área de una superficie	21
§ 6. Aplicaciones de la integral doble	25
§ 7. Integral triple	29
§ 8. Aplicaciones de una integral triple	33
§ 9. Integrales en función de un parámetro. Derivación e integración bajo el signo integral	35
§ 10. Función gamma. Función beta	41
Capítulo II. Integrales curvilíneas e integrales de superficie	49
§ 1. Integrales curvilíneas por la longitud de un arco y por las coordenadas	49
§ 2. Independencia de una integral curvilínea de género II del contorno de integración. Determinación de una función por su diferencial total	54
§ 3. Fórmula de Green	57
§ 4. Cálculo de un área	58
§ 5. Integrales de superficie	
§ 6. Fórmulas de Stokes y de Ostrogradski—Gauss. Elementos de la teoría del campo	63
Capítulo III. Series	70
§ 1. Series numéricas	70
§ 2. Series de funciones	81
§ 3. Series de potencias	87
§ 4. Desarrollo de funciones en series de potencias	92
§ 5. Cálculos aproximados de los valores de las funciones mediante series de potencias	98
§ 6. Aplicación de series de potencias para el cálculo de límites y de integrales definidas	103
§ 7. Números complejos y series con términos complejos	105

§	8. Serie de Fourier	115
§	9. Integral de Fourier	123
Capítulo IV. Ecuaciones diferenciales ordinarias		128
§	1. Ecuaciones diferenciales de primer orden	128
§	2. Ecuaciones diferenciales de órdenes superiores	152
§	3. Ecuaciones lineales de órdenes superiores	159
§	4. Integración de ecuaciones diferenciales con ayuda de series	177
§	5. Sistemas de ecuaciones diferenciales	182
Capítulo V. Elementos de la teoría de las probabilidades		193
§	1. Suceso aleatorio, su frecuencia y probabilidad	193
§	2. Axiomas de la suma y multiplicación de probabilidades	195
§	3. Fórmula de Bernoulli. El número más probable de realización de un evento	199
§	4. Fórmula de la probabilidad total. Fórmula de Bayes	202
§	5. Variable aleatoria y la ley de su distribución	204
§	6. Esperanza matemática y varianza de una variable aleatoria	209
§	7. Moda y mediana	212
§	8. Distribución uniforme	214
§	9. Ley de distribución binomial. Ley de Poisson	215
§	10. Distribución exponencial. Función de fiabilidad	218
§	11. Ley de distribución normal. Función de Laplace	221
§	12. Momentos, asimetría y exceso de una variable aleatoria	225
§	13. Ley de los grandes números	230
§	14. Teorema de Moivre—Laplace	233
§	15. Sistemas de variables aleatorias	234
§	16. Líneas de regresión. Correlación	245
§	17. Determinación de las características de las variables aleatorias basándose en datos experimentales	252
§	18. Determinación de las leyes de distribución de variables aleatorias basándose en datos experimentales	265
Capítulo VI. Concepto de ecuaciones en derivadas parciales		286
§	1. Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales	286
§	2. Tipos de ecuaciones de segundo orden en derivadas parciales. Reducción a la forma canónica	288
§	3. Ecuación de la oscilación de una cuerda	292
§	4. Ecuación de conductibilidad térmica	298
§	5. Problema de Dirichlet para el círculo	305
Capítulo VII. Elementos de la teoría de las funciones de variables compleja		309
§	1. Función de variable compleja	309
§	2. Derivada de una función de variable compleja	312
§	3. Concepto de aplicación conforme	315
§	4. Integral de variable compleja	318
§	5. Series de Taylor y de Laurent	324
§	6. Cálculo de residuos de funciones. Aplicación de los residuos para el cálculo de integrales	329

Capítulo VIII. Elementos del cálculo operacional	335
§ 1. Determinación de transformadas de funciones	335
§ 2. Determinación de la función original a partir de la transformada	337
§ 3. Convulación de funciones. Transformada de derivadas y de integral de una función original	341
§ 4. Aplicación del cálculo operacional a la resolución de algunas ecuaciones diferenciales e integrales	343
§ 5. Fórmula general de inversión	346
§ 6. Aplicación del cálculo operacional a la resolución de algunas ecuaciones de la física matemática	348
Capítulo IX. Métodos de cálculos	353
§ 1. Solución aproximada de ecuaciones	353
§ 2. Interpolación	363
§ 3. Cálculo aproximado de integrales definidas	368
§ 4. Cálculo aproximado de integrales múltiples	372
§ 5. Aplicación del método de Montecarlo para calcular integrales definidas y múltiples	385
§ 6. Integración numérica de ecuaciones diferenciales	397
§ 7. Método de Picard de aproximaciones sucesivas	404
§ 8. Procedimientos elementales de elaboración de los datos experimentales	406
Capítulo X. Fundamentos del cálculo de variaciones	416
§ 1. Introducción	416
§ 2. Condición necesaria del extremo de una funcional	420
§ 3. Funcionales dependientes de las derivadas de orden superior	426
§ 4. Funcionales dependientes de dos funciones de una variable independiente	427
§ 5. Funcionales dependientes de funciones de dos variables independientes	429
§ 6. Forma paramétrica	431
§ 7. Concepto de condiciones suficientes del extremo de una funcional	433
Respuestas	435
Suplemento	448

Capítulo I. Integrales dobles y triples

§ 1. Integral doble en coordenadas rectangulares

Supongamos que la función $f(x, y)$ está definida en una región cerrada acotada D del plano xOy . Dividimos arbitrariamente la región D en n regiones elementales que tienen las áreas $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ y los diámetros d_1, d_2, \dots, d_n (se llama *diámetro de una región* a la mayor de las distancias entre dos puntos de la frontera de esta región). Escogemos en cada región elemental un punto arbitrario $P_k(\xi_k; \eta_k)$ y multiplicamos el valor de la función en el punto P_k por el área de esta región.

Se denomina *suma integral* para la función $f(x, y)$ de la región D a la suma que tiene la forma siguiente:

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k = f(\xi_1, \eta_1) \Delta\sigma_1 + f(\xi_2, \eta_2) \Delta\sigma_2 + \dots + f(\xi_n, \eta_n) \Delta\sigma_n.$$

Se llama *integral doble* de la función $f(x, y)$ de la región D al límite de la suma integral a condición de que el mayor entre los diámetros de las regiones elementales tienda a cero:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\max d_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k.$$

Si la función $f(x, y)$ es continua en la región cerrada D , el límite de la suma integral existe y no depende del procedimiento de división de la región D en regiones elementales y de la selección de los puntos P_k (*teorema de existencia de una integral doble*).

Si $f(x, y) > 0$ en la región D , entonces la integral doble $\iint_D f(x, y) d\sigma$

es igual al *volumen del cuerpo cilíndrico* limitado de arriba por la superficie $z = f(x, y)$, de costado por la superficie cilíndrica cuyas generatrices son paralelas al eje Oz y de abajo por la región D del plano xOy .

Propiedades principales de una integral doble

$$1^{\text{a}}. \iint_D [f_1(x, y) \pm f_2(x, y)] d\sigma = \iint_D f_1(x, y) d\sigma \pm \iint_D f_2(x, y) d\sigma.$$

$$2^{\text{a}}. \iint_D c \cdot f(x, y) d\sigma = c \iint_D f(x, y) d\sigma, \text{ donde } c \text{ es una constante.}$$

3ª. Si la región de integración D está dividida en dos regiones D_1 y D_2 , entonces

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma.$$

En las coordenadas cartesianas la integral doble se suele escribir en la forma $\iint_D f(x, y) dx dy$.

Reglas de cálculo de las integrales dobles

Se distinguen dos tipos principales de regiones de integración.

1. La región de integración D está limitada de los lados izquierdo y derecho por las rectas $x = a$ y $x = b$ ($a < b$) y de abajo y de arriba por las líneas curvas continuas $y = \varphi_1(x)$ e $y = \varphi_2(x)$ [$\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$] cada una de las cuales se interseca con la recta vertical sólo en un punto (fig. 1).

Para una región así la integral doble se calcula por la fórmula

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy,$$

además, primeramente se calcula la integral $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$ en la cual x se considera constante.

2. La región de integración D está limitada de abajo y de arriba por las rectas $y = c$ e $y = d$ ($c < d$) y del lado izquierdo y del lado derecho por las

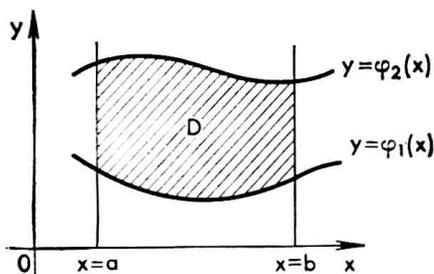


Fig. 1

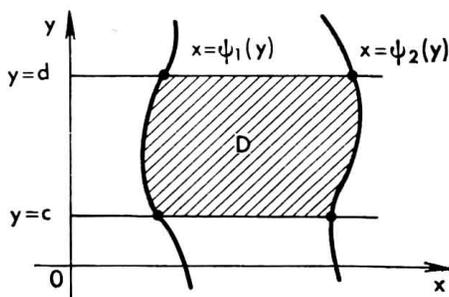


Fig. 2

líneas curvas continuas $x = \psi_1(y)$ y $x = \psi_2(y)$ [$\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$] cada una de las cuales se interseca por la recta horizontal sólo en un punto (fig. 2).

Para una región así la integral doble se calcula por la fórmula

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx,$$

además, primeramente se calcula la integral $\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$ en la cual y se considera constante.

Los segundos miembros de las fórmulas indicadas se llaman integrales *dobles* (o *reiteradas*).

En un caso más general la región de integración por medio de la división por partes se reduce a las principales.

1. Calcular $\int\int_D x \ln y \, dx \, dy$ si la región D es el rectángulo $0 \leq x \leq 4$, $1 \leq y \leq e$.

Resolución. Tenemos

$$\int\int_D x \ln y \, dx \, dy = \int_0^4 x \, dx \int_1^e \ln y \, dy = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 \cdot [y \ln y - y]_1^e = 8 \cdot (e - e + 1) = 8.$$

2. Calcular $\int\int_D (\cos^2 x + \sen^2 y) \, dx \, dy$ si la región D es el cuadrado $0 \leq x \leq \pi/4$, $0 \leq y \leq \pi/4$.

Resolución. Hallamos

$$\begin{aligned} \int\int_D (\cos^2 x + \sen^2 y) \, dx \, dy &= \int_0^{\pi/4} dx \int_0^{\pi/4} (\cos^2 x + \sen^2 y) \, dy = \int_0^{\pi/4} \left[y \cos^2 x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4} \sen 2y \right]_0^{\pi/4} dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \left(\frac{\pi}{4} \cos^2 x - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) dx = \left[\frac{\pi}{8} \left(x + \frac{1}{2} \sen 2x \right) + \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) x \right]_0^{\pi/4} \\ &= \frac{\pi}{8} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{16}. \end{aligned}$$

3. Calcular $I = \int_1^2 dx \int_x^{x^2} (2x - y) \, dy$.

Resolución. Tenemos

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \left[2xy - \frac{1}{2} y^2 \right]_x^{x^2} dx = \int_1^2 \left(2x^3 - \frac{1}{2} x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2} x^2 \right) dx = \\ &= \left[\frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{10} x^5 - \frac{1}{2} x^3 \right]_1^2 = 0,9. \end{aligned}$$

4. Calcular $\int\int_D (x - y) \, dx \, dy$, si la región D está limitada por las líneas $y = 2 - x^2$, $y = 2x - 1$.

Resolución. Vamos a construir la región D . La primera línea es una parábola que tiene por vértice el punto $(0; 2)$, simétrica respecto al eje Oy . La segunda línea es una recta. Resolviendo conjuntamente las ecuaciones $y = 2 - x^2$ e $y = 2x - 1$, determinamos las coordenadas de los puntos de intersección $A (-3; -7)$, $B (1; 1)$ (fig. 3).

La región de integración pertenece al primer tipo. Encontramos

$$\begin{aligned} \iint_D (x-y) dx dy &= \int_{-3}^1 dx \int_{2x-1}^{2-x^2} (x-y) dy = \\ &= \int_{-3}^1 \left[xy - \frac{1}{2} y^2 \right]_{2x-1}^{2-x^2} dx = \int_{-3}^1 \left(2x - x^3 - 2 + 2x^2 - \frac{1}{2} x^4 - 2x^2 + \right. \\ &\quad \left. + x + 2x^2 - 2x + \frac{1}{2} \right) dx = \int_{-3}^1 \left(-\frac{1}{2} x^4 - x^3 + 2x^2 + x - \frac{3}{2} \right) dx = \\ &= \left[-\frac{1}{10} x^5 - \frac{1}{4} x^4 + \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{3}{2} x \right]_{-3}^1 = 4 \frac{4}{15}. \end{aligned}$$

5. Calcular $\iint_D (x+2y) dx dy$, si la región D está limitada por las rectas $y=x$, $y=2x$, $x=2$, $x=3$.

Resolución. Hallamos

$$\begin{aligned} \iint_D (x+2y) dx dy &= \int_2^3 dx \int_x^{2x} (x+2y) dy = \\ \int_2^3 [xy + y^2]_x^{2x} dx &= \int_2^3 (2x^2 + 4x^2 - x^2 - x^2) dx = 4 \int_2^3 x^2 dx = \frac{3}{4} x^3 \Big|_2^3 = 25 \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

6. Calcular $\iint_D e^{x+\sin y} \cos y dx dy$ si la región D es un rectángulo $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi/2$.

7. Calcular $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, si la región D está limitada por las líneas $y=x$, $x=0$, $y=1$, $y=2$.

8. Calcular $\iint_D (3x^2 - 2xy + y) dx dy$, si la región D está limitada por las líneas $x=0$, $x=y^2$, $y=2$.

9. Cambiar el orden de integración en la integral $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy$.

Resolución. La región de integración D está limitada por las líneas $x = -1$, $x = 1$, $y = -\sqrt{1-x^2}$, $y = 1-x^2$ (fig. 4). Vamos a cambiar el

orden de integración para lo cual representamos la región dada en forma de dos regiones (del segundo tipo): D_1 limitada de los lados izquierdo y derecho por

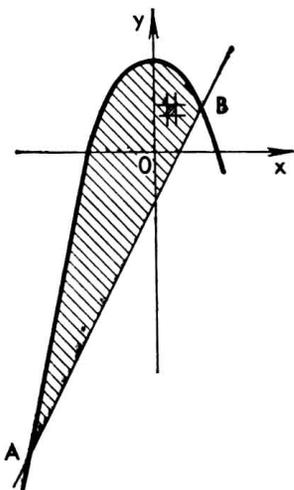


Fig. 3

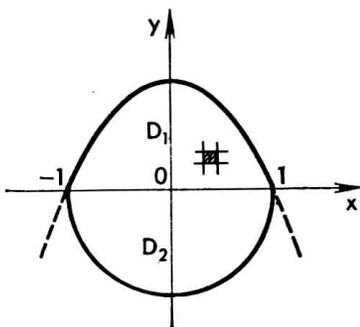


Fig. 4

las ramas de la parábola $x = \pm\sqrt{1-y}$ ($0 \leq y \leq 1$) y D_2 limitada por los arcos de la circunferencia $x = \pm\sqrt{1-y^2}$ ($-1 \leq y \leq 0$). Entonces

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

10. Calcular $\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx \int_0^{\pi} y dy$.

11. Calcular $\int_1^3 dx \int_{x^2}^x (x-y) dy$.

12. Calcular $\iint_D y \ln x dx dy$, si la región D está limitada por las líneas $xy=1$, $y=\sqrt{x}$, $x=2$.

13. Calcular $\iint_D (\cos 2x + \sen y) dx dy$, si la región D está limitada por las líneas $x=0$, $y=0$, $4x+4y-\pi=0$.

14. Calcular $\iint_D (3x+y) dx dy$, si la región D se define por las desigualdades $x^2+y^2 \leq 9$, $y \geq (2/3)x+3$.

15. Calcular $\iint_D \sen(x+y) dx dy$, si la región D está limitada por las líneas $x=0$, $y=\pi/2$, $y=x$.

16. Calcular $\int_D \int x \, dx \, dy$, si la región D es el triángulo que tiene por vértices $A(2; 3)$, $B(7; 2)$, $C(4; 5)$.
Cambiar el orden de integración:

$$17. \int_{-\frac{6}{e}}^2 dx \int_{\frac{x^2/4 - 1}{\ln x}}^{2-x} f(x, y) \, dy.$$

$$18. \int_1^e dx \int_0^x f(x, y) \, dy.$$

$$19. \int_0^1 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x, y) \, dx.$$

$$20. \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) \, dy.$$

$$21. \int_0^1 dx \int_{(1-x)^2/2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) \, dy.$$

$$22. \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) \, dy.$$

§ 2. Cambio de variables en una integral doble

1. Integral doble en coordenadas polares. La transformación de una integral doble, haciéndola pasar de las coordenadas rectangulares x, y a las polares ρ, θ ligadas con las rectangulares por las relaciones $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, se lleva a cabo por la fórmula

$$\int_D \int f(x, y) \, dx \, dy = \int_D \int f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\rho \, d\theta.$$

Si la región de integración D está limitada por dos semirrectas $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ ($\alpha < \beta$) que salen del polo y por dos curvas $\rho = \rho_1(\theta)$ y $\rho = \rho_2(\theta)$, donde $\rho_1(\theta)$ y $\rho_2(\theta)$ son funciones unívocas para $\alpha \leq \theta \leq \beta$ y $\rho_1(\theta) \leq \rho_2(\theta)$, entonces la integral doble se calcula por la fórmula

$$\int_D \int F(\rho, \theta) \rho \, d\rho \, d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} F(\rho, \theta) \rho \, d\rho,$$

donde $F(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$, además, primeramente se calcula

$$\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} F(\rho, \theta) \rho \, d\rho \text{ en la cual } \theta \text{ se considera constante.}$$

2. Integral doble en coordenadas curvilíneas. Supongamos que una integral doble se transforma pasando de las coordenadas rectangulares x, y a las curvi-

líneas u, v ligadas con las rectangulares por las relaciones $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, donde las funciones $x(u, v)$ e $y(u, v)$ tienen derivadas parciales continuas en la región D' del plano $uO'v$ y el jacobiano de transformación en la región D' no se anula:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Con ello se establece una correspondencia recíprocamente unívoca y continua en ambas direcciones entre los puntos de la región D del plano xOy y los puntos de la región D' del plano $uO'v$ (fig. 5).

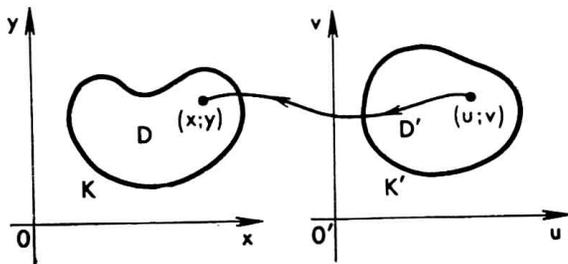


Fig. 5

En este caso la fórmula de transformación de la integral doble tiene el aspecto

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f[x(u, v), y(u, v)] |J| du dv.$$

Para el caso de las coordenadas polares

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho.$$

23. Pasando a las coordenadas polares, calcular $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ si D es el cuadrante I del círculo $x^2 + y^2 \leq a^2$.

Resolución. Haciendo $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \operatorname{sen} \theta$, tenemos

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \iint_D \sqrt{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \rho d\rho d\theta = \\ &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a \rho^2 d\rho = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \rho^3 \Big|_0^a d\theta = \frac{a^3}{3} \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi a^3}{6}. \end{aligned}$$

24. Calcular $\iint_D \ln(x^2 + y^2) dx dy$ si la región D es el anillo comprendido entre las circunferencias $x^2 + y^2 = e^2$ y $x^2 + y^2 = e^4$.