

本 抄 本
ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE

TOPOLOGIE DES ESPACES METRIQUES

par

M. SERFATI

DIRECTION GÉNÉRALE



TOPOLOGIE DES ESPACES METRIQUES

par

M. SERFATI

P L A N

	Pages
<u>INTRODUCTION</u>	2
<u>PRELIMINAIRES</u>	3
<u>CHAPITRE I</u> - Espaces métriques	7
Exercices	37
<u>CHAPITRE II</u> - Limites, continuité	57
Exercices	81
<u>CHAPITRE III</u> - Espaces compacts	99
Exercices	111
<u>CHAPITRE IV</u> - Espaces connexes	123
Exercices	129
<u>CHAPITRE V</u> - Espaces complets	137
Exercices	145

INTRODUCTION

Ce manuel destiné aux élèves de 1ère année "Economie" développe l'introduction nécessaire à la suite du même cours : espaces vectoriels normés (Banach, Hilbert), éléments d'analyse fonctionnelle, calcul différentiel dans les espaces de Banach.

Ce cours concerne donc la topologie des espaces métriques, les seuls utilisés en pratique dans les autres cours de l'école ; néanmoins, chaque fois que c'est utile, on distingue les notions strictement métriques (attachées à la distance) des notions topologiques (conservées par homéomorphisme). De même on insiste sur les diverses équivalences de distances (et les notions conservées dans ces équivalences).

La présentation du chapitre "limites et continuité" est classique à ce niveau. On a donné à titre de complément la définition et l'étude des limites suivant une base de filtre (non traitées en cours) qui peuvent donc être laissées de côté en première lecture.

On trouve en cours de texte des "questions" (parfois "idiotes") ou des exercices très courts qui visent à l'assimilation de la notion qui vient d'être définie (par exemple : en quels points une fonction caractéristique χ_A est-elle continue ? - ou même : un espace métrique possède-t-il toujours des parties compactes, ou connexes ?). Les autres exercices sont rassemblés à la fin de chaque chapitre avec des indications ou une résolution complète, lorsque cela semblait utile.

PRELIMINAIRES

① Quelques (petits) préalables, en provenance de votre cours d'algèbre.

* On notera $\mathcal{F}(A, B)$ l'ensemble de toutes les applications de A dans B .

* Si A_1 et A_2 sont deux parties de A , on notera

$$A_1 - A_2 = \{x \in A \mid x \in A_1 \text{ et } x \notin A_2\} = A_1 \cap \complement_A(A_2)$$

* Si A est une partie du produit cartésien $X_1 \times X_2$, on appelle première coupe de A ($C_1(A)$)

$$C_1(A) = \{a \in X_1 \mid (\exists b \in X_2) \quad (a, b) \in A\}$$

(on a $A \subset C_1(A) \times C_2(A)$)

* Si $f \in \mathcal{F}(A, B)$ et A_1 une partie de A , la restriction de f à A_1 sera notée $f|_{A_1}$: elle est donc définie par

$$(\forall t \in A_1) \quad f|_{A_1}(t) = f(t)$$

* La restriction de l'identité de A à A_1 ($\text{id}_A|_{A_1}$) est appelée l'injection canonique (j_{A_1}) de A_1 dans A

$$j_{A_1} : A_1 \rightarrow A \quad j_{A_1}(t) = t$$

* Si $X = \prod_{i=1}^b X_i$ (produit cartésien), on note p_i la i ème projection
 $p_i : X \rightarrow X_i \quad p_i(a) = a_i \quad (\text{si } a = (a_1, \dots, a_p))$

* Soit $f \in \mathcal{S}(A, B)$

L'image directe d'une partie A_1 de A sera notée $\hat{f}(A_1)$

l'image réciproque d'une partie B_1 de B sera notée $\check{f}(B_1)$

donc $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathcal{S}(A), \mathcal{S}(B))$.

Observez que $\hat{f}$ "respecte" les lois ensemblistes usuelles

$$\hat{f} \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} \hat{f}(B_i)$$

$$\text{et } \hat{f} \left(\bigcap_B B_i \right) = \bigcap_A \left(\check{f}(B_i) \right)$$

$$\hat{f} \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} \hat{f}(B_i)$$

mais qu'il n'en est pas de même pour $\check{f}$; on a :

$$\check{f} \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} \check{f}(B_i), \text{ mais seulement}$$

$$\check{f} \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) \subset \bigcap_{i \in I} \check{f}(B_i)$$

on utilisera aussi les propriétés

$$A_1 \subset (\hat{f} \circ \check{f})(A_1) \text{ et } (\check{f} \circ \hat{f})(B_1) \subset B_1$$

* Avec ces notations, si $A \subset X_1 \times X_2$, on a le schéma

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{j_A} & X_1 \times X_2 & \xrightarrow{p_1} & X_1 \\ & & & & p_1 \circ j_A = \pi_1 \end{array}$$

et la première coupe $C_1(A) = \hat{\pi}_1(A)$

* Si $(X, \leq)$ est un ensemble ordonné, on note

$$[a, \rightarrow[= \{t \in X \mid t \geq a\} \quad (\text{section finissante})$$

② Notions de topologie de $\mathbb{R}$.

Cette année (ou l'an passé) vous avez vu construire l'ensemble fondamental $\mathbb{R}$. A l'aide de la notion très simple d'intervalle ouvert réel, nous allons donner le premier exemple de ce que nous appellerons plus loin "topologie d'un espace métrique"

Définition 1. : Nous dirons qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est ouverte si, pour tout x de A il existe un intervalle ouvert de centre x ($]x - h, x + h[$) contenu dans A .

Vérifiez que

- 1) $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont ouverts
- 2) Toute réunion d'ouverts est ouverte
- 3) Une intersection finie d'ouverts est ouverte

L'ensemble $\mathcal{O}$ des ouverts de $\mathbb{R}$ est appelé la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

Exercices

- 1) Montrer qu'un intervalle ouvert est ouvert
- 2) Montrer que $]a, +\infty[$ et $]-\infty, b[$ sont ouverts
- 3) $\{a\}$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$.
- 4) $\mathbb{Z}$ est-il ouvert dans $\mathbb{R}$?
- 5) L'intersection de la famille d'ouverts

$$]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}[\quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

est-elle ouverte ?

- 6) Montrer que si $\mathcal{O}$ est un ouvert majoré non vide de $\mathbb{R}$,

$$\sup \mathcal{O} \notin \mathcal{O}$$

CHAPITRE I : ESPACES METRIQUES

1 - Distance, espace métrique

Soit E un ensemble non vide : on appelle distance (ou métrique) sur E toute application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant.

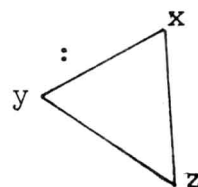
$$(\forall (x,y,z) \in E^3) \left\{ \begin{array}{ll} 1) (d(x,y) = 0) \iff (x=y) & \text{(Axiome de séparation)} \\ 2) d(x,y) = d(y,x) & \text{(Axiome de symétrie)} \\ 3) d(x,y) \leq d(y,z) + d(z,x) & \text{(Inégalité triangulaire)} \end{array} \right.$$

Le couple (E,d) est alors appelé un espace métrique (*) (les éléments de E sont appelés points).

Notons que les axiomes jouent des rôles différents. Le second et le troisième structurent l'espace. C'est en l'honneur de la géométrie des Grecs que le 3ème axiome a reçu son nom.

Si l'on affaiblit le 1er axiome en le remplaçant par

$$1)' (\forall x \in E) d(x,x) = 0$$



L'application d obtenue (vérifiant 1', 2) et 3) est appelée un écart sur E .

Remarque : nous dirons abusivement que E (et non (E,d)) est un espace métrique si aucune confusion n'est à craindre sur la distance d .

Exemples de distances

1) Sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), la valeur absolue (resp. le module) définit une distance (dite usuelle) par $d(x,y) = |x-y|$.

...

(*) abrégé e.m. dans la suite

- 2) Sur un ensemble E quelconque,
l'application d définie par :

$$d(x,x) = 0$$

$$d(x,y) = 1 \text{ si } x \neq y \text{ est une distance sur } E, \text{ dite triviale.}$$

- 3) Si d est une distance sur E ,
l'application :

$$d_1 = \frac{d}{1+d}$$

est aussi une distance sur E (cet exemple se trouvera convenablement généralisé dans l'exercice 1-2) de fin de chapitre).

Voici maintenant, comme il est usuel en mathématiques la définition des sous espaces et des espaces produits.

Sous espaces métriques Soit $A \subset E$. Alors $(A, d|_A)$ est encore un espace métrique appelé sous espace métrique de (E, d) . $(\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, [0,1])$, sont ainsi des sous espaces métriques de $\mathbb{R}$

Espace produit Soit $(E_i, \delta_i) (1 \leq i \leq n)$ une famille de n espaces métriques. Sur $E = E_1 \times \dots \times E_n$,

$$\text{on définit } d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \delta_i^2(x_i, y_i)}$$

Alors d est une distance sur E , appelée distance produit.

Démonstration : On observe que les propriétés 1 et 2 sont immédiates
Pour démontrer l'inégalité triangulaire on établit d'abord l'

Inégalité de Schwarz : soient (a_i) et $(b_i) (1 \leq i \leq n)$ deux suites finies de réels.

...

On a :

$$\left[\sum_{i=1}^n a_i^2 \right] \cdot \left[\sum_{i=1}^n b_i^2 \right] \geq \left[\sum_{i=1}^n a_i b_i \right]^2$$

Pour cela vous considérez l'expression

$$\sum_{i=1}^n (a_i + \lambda b_i)^2 \text{ qui est positive ou nulle (quel que soit}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$). Elle s'écrit en général comme un trinôme en λ dont le discriminant est donc négatif ou nul (mettez en forme cette démonstration en envisageant tous les cas).

Puis considérez

$$\begin{aligned} \Delta &= \left[d_2(x, z) + d_2(y, z) \right]^2 - d_2^2(x, y) = d_2^2(x, z) + d_2^2(y, z) - d_2^2(x, y) + 2d_2(x, z)d_2(y, z) \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\delta_i^2(x_i, z_i) + \delta_i^2(y_i, z_i) - \delta_i^2(x_i, y_i) \right] + 2 \left[\sum_{i=1}^n \delta_i^2(x_i, z_i) \cdot \sum_{i=1}^n \delta_i^2(y_i, z_i) \right]^{1/2} \end{aligned}$$

$$\text{or } \delta_i^2(x_i, y_i) \leq \left[\delta_i(x_i, z_i) + \delta_i(y_i, z_i) \right]^2. \text{ En développant on trouve :}$$

$$\Delta \geq -2 \sum_{i=1}^n \delta_i(x_i, z_i) \cdot \delta_i(y_i, z_i) + 2 \left[\sum_{i=1}^n \delta_i^2(x_i, z_i) \cdot \sum_{i=1}^n \delta_i^2(y_i, z_i) \right]^{1/2}$$

et en appliquant le lemme de Schwarz : $\Delta \geq 0$

...

Exemple : Sur $\mathbb{R}^n$ $\mathbb{C}^n$, d définie par :

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}$$

est une distance (dite euclidienne)

Remarque : Sur l'espace produit E , on peut définir d'autres distances. Montrer que

$$a) d_{\infty}(x,y) = \sup_i [\delta_i(x_i, y_i)]$$

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^n \delta_i(x_i, y_i)$$

sont deux distances sur E .

b) Montrer que l'on a $(\forall (x,y) \in E^2)$

$$\left[\begin{array}{l} d_{\infty}(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \sqrt{n} \cdot d_{\infty}(x,y) \\ d_{\infty}(x,y) \leq d_1(x,y) \leq n \cdot d_{\infty}(x,y) \end{array} \right]$$

Isométrie Soient (E,d) et (F,d') deux espaces métriques.

On dit que f est une isométrie si c'est une bijection (de E sur F) conservant les distances. Donc

$$(\forall (x,y) \in E^2) \quad d(x,y) = d'(f(x), f(y))$$

...

Exercice : Montrer que pour que f soit une isométrie de $\mathbb{R}$, muni de la distance usuelle, il faut et il suffit qu'il existe $(\varepsilon, a) \in \{-1, +1\} \times \mathbb{R}$

$$f(x) = a + \varepsilon \cdot x$$

Indications : si f est une isométrie, montrer que ψ définie par $\psi(x) = (f(x) - f(0)) / (f(1) - f(0))$ est aussi une isométrie, telle que

$$|\psi(x)| = |x| \quad \text{et} \quad |\psi(x) - 1| = |x - 1|$$

En déduire $\psi = \text{id}_{\mathbb{R}}$, puis le résultat proposé.

Partie bornée. Diamètre d'une partie

Soit $X \subset E$. Si l'ensemble des $d(x, y)$ où $(x, y) \in X^2$ est une partie majorée de $\mathbb{R}^+$, on dit que X est bornée dans E , et on appelle diamètre de X le réel positif :

$$\delta(X) = \sup_{(x, y) \in X^2} d(x, y)$$

Question 1. démontrez qu'une réunion finie de parties bornées est bornée.

Question 2. Montrer que si X et Y sont bornées et $X \cap Y \neq \emptyset$;

$$\delta(X \cup Y) \leq \delta(X) + \delta(Y)$$

Distance de la convergence uniforme Soit A un ensemble non vide et E un espace métrique. On dit qu'une application f de A dans E est bornée si $\tilde{f}(A)$ est une partie bornée de E . On note $B(A, E)$ l'ensemble des applications bornées de A dans E et $\tilde{d}$ l'application définie sur $B \times B$ par

$$\tilde{d}(f, g) = \sup_{x \in A} d(f(x), g(x))$$

Montrer que $\tilde{d}$ est une distance sur B , appelée distance de la convergence uniforme.

2 - Ouverts d'un espace métrique

Les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ vont trouver maintenant une généralisation appropriée dans un espace métrique quelconque à l'aide des boules ouvertes

soit (E, d) un e.m, $x \in E$, et $\underline{\underline{\rho > 0}}$

Définitions. On appelle : boule ouverte de centre x (et de rayon ρ)

$$B(x, \rho) = \{y \in E \mid d(x, y) < \rho\}$$

boule fermée de centre x (et de rayon ρ)

$$B_f(x, \rho) = \{y \in E \mid d(x, y) \leq \rho\}$$

sphère de centre x (et de rayon ρ)

$$S(x, \rho) = \{y \in E \mid d(x, y) = \rho\}$$

(notez qu'une sphère peut être vide).

Exemples 1). Dans $\mathbb{R}^2$ muni des 3 métriques (d_1, d_2, d_∞) décrire les boules ouvertes de centre $(0,0)$ et de rayon 1; faites un dessin.

2) Dans un espace métrique muni de la distance triviale, décrire les boules ouvertes de centre x et de rayon ρ ($\rho \in \mathbb{R}^{+*}$)

3) Si F est un sous espace métrique de E , on a pour les boules ouvertes B_F de F :

$$B_F(x, \rho) = F \cap B(x, \rho)$$

Exemple 4. destiné à montrer que centre et rayon d'une boule ne sont pas nécessairement uniques (!)

$$E = [0, 1] \subset \mathbb{R}$$

Comparer $B(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$, $B(\frac{5}{6}, \frac{1}{3})$

Exemple 5. Soit $A \subset E$. Démontrer l'équivalence

- A est bornée dans E
- il existe une boule ouverte de E contenant A.

Exemple 6. $X = B([0,1], \mathbb{R})$ muni de la distance de la convergence uniforme ; $f(x) = x$. Déterminer l'ensemble des applications affines $g \in X$ telles que

$$g \in B_f(f, \frac{1}{2}) \quad (g(x) = ax + b)$$

On pourra donner en réponse un régionnement du plan décrivant l'ensemble des points $M(a,b)$.

Définition. On dit qu'une partie A de E est ouverte dans E si $(\forall x \in A)$ il existe une boule ouverte de centre x contenue dans A.

On notera θ_d (ou θ si aucune confusion n'est à craindre) l'ensemble des ouverts de E qu'on appelle la topologie de l'espace métrique E

Propriétés

Vérifier que : 1) $\emptyset$ et E sont des ouverts

2) toute réunion d'ouverts est ouverte

3) une intersection finie d'ouverts est ouverte

Remarque 1. On dira de façon générale qu'une famille Ω de parties de E est une topologie sur E si Ω vérifie les 3 propriétés ci-dessus. Le couple (E, Ω) est alors appelé un espace topologique.

[Remarque 2. On dira dans la suite qu'une propriété est topologique si elle ne dépend que de la topologie. Apparaît ainsi un problème intéressant : à quelle condition deux métriques définissent elles la même topologie ?]

Exemple 1. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la métrique euclidienne, les ensembles ci-dessous sont-ils ouverts ?

$$E_1 = \{(x,y) \mid |x| < 1 \text{ et } |y| < 1\}$$

$$E_2 = \{(x, y) \mid x + y - 1 > 0\}$$

$$E_3 = \{(x, y) \mid |x| \leq 1 \text{ et } |y| > 1\}$$

$$E_4 =]0, 1[\times \{ \}$$

Exemple 2. on dit qu'un espace métrique E est discret si tout singleton $\{x\}$ y est ouvert. Montrer que toute partie d'un espace discret est ouverte - que la distance triviale définit un espace métrique discret - que $\mathbb{Z}$ est discret.

$\mathbb{Q}$ est-il discret ?

[Théorème 1-1. Toute boule ouverte est ouverte

$$\text{soit } y \in B(x, r) \quad \begin{array}{c} y^x \\ x^x \end{array}$$

Un dessin aide à choisir le rayon de la boule cherchée de centre y (*) vérifiez que $\rho = r - d(x, y)$ convient.

(*) Ces dessins sont à la fois indispensables et dangereux (cf. exercice 1-32)

[Théorème 1-2. Une partie est ouverte si et seulement si elle est réunion de boules ouvertes.

Si A est réunion de boules ouvertes, elle est ouverte (deuxième propriété de topologie). Réciproquement si A est ouvert

$$(\forall x \in A) \quad (\exists \rho_x > 0) \quad B(x, \rho_x) \subset A$$

$$\text{Donc } \bigcup_{x \in A} B(x, \rho_x) \subset A \text{ or } A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} B(x, \rho_x)$$

$$\text{Donc } A = \bigcup_{x \in A} B(x, \rho_x)$$

Fermés d'un espace métrique

Définition. On dit qu'une partie A de E est fermée dans E si son complémentaire est ouvert

Propriétés des fermés

- 1) E et $\emptyset$ sont fermés
- 2) Toute intersection de fermés est fermée
- 3) Une réunion finie de fermés est fermée

Remarque : Si l'espace métrique n'est pas discret, il est des parties qui ne sont ni ouvertes, ni fermées. Il peut se trouver des parties à la fois ouvertes et fermées (distinctes de E ou $\emptyset$) : cette éventualité qui ne se produit pas dans $\mathbb{R}^k$ fera l'objet d'une étude particulière (chapitre des espaces connexes).

Exemples. Dans $\mathbb{R}^2$ (distance euclidienne) les ensembles suivants

$$E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0x + y - 1 \geq 0\}$$

$$E_2 = [0, 1] \times \{0\}$$

sont-ils fermés ?

Voici une propriété qui nous utiliserons et que vous pouvez (simplement) démontrer.

Théorème 1-3. Dans un espace métrique, tout singleton est fermé. Démontrez aussi la propriété ci-dessous :

Théorème 1-4. Dans un espace métrique les boules fermées et les sphères sont fermées.

...