

Ondes électromagnétiques 1 - propagation libre

M. Jouguet



unod technique

ondes électromagnétiques

1 — propagation libre

Marc JOUGUET

Professeur honoraire
à l'École Nationale des Ponts et Chaussées
et à l'École Nationale Supérieure des
Télécommunications

dunod

© BORDAS, Paris, 1973 — 011 878 0204

ISBN 2-04-010070-9

“ Toute représentation ou reproduction, intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur, ou de ses ayants-droit, ou ayants-causé, est illicite (loi du 11 mars 1957, alinéa 1^{er} de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal. La loi du 11 mars 1957 n'autorise, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, que les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective d'une part, et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration ”

Avertissement

Les connaissances fondamentales, relatives aux équations de Maxwell et nécessaires pour une étude approfondie de la propagation libre ou guidée des ondes électromagnétiques, étant supposées acquises, il n'a pas été jugé utile de les reprendre ici dans un chapitre préliminaire. Elles sont en effet exposées dans les chapitres III et V du tome III et dans le chapitre II du tome IV de mon *Traité d'Electricité théorique*, dont le présent ouvrage peut être considéré comme une cinquième et dernière partie. Mais, bien que quelques renvois soient faits à ce *Traité*, il n'est pas indispensable à la compréhension du présent ouvrage. Les notions nécessaires sont en effet exposées de façon suffisante dans de nombreux ouvrages français ou étrangers, ainsi que dans les cours des Universités et des Grandes Ecoles.

Il s'agit essentiellement ici d'un livre de Physique théorique, dans lequel on s'est efforcé avant tout d'analyser avec précision et rigueur les phénomènes de propagation, sans chercher à en faire une étude exhaustive et l'on a par conséquent laissé de côté, en particulier, ce qui a trait à leur aspect expérimental et technologique. On ne s'est d'ailleurs pas borné, comme on le fait le plus souvent, de façon à peu près exclusive, à l'étude des ondes sinusoïdales qui n'ont, en toute rigueur, pas d'existence physique et l'on a consacré quelques développements aux paquets d'ondes, ainsi qu'à la propagation d'ondes de forme quelconque sur les lignes.

D'autre part, bien qu'on ait eu surtout en vue la propagation des ondes électriques, à hautes et basses fréquences, dans les milieux matériels ou le long des lignes, on a étendu assez largement l'étude au domaine des ondes lumineuses, qui ont, avec les premières, de nombreux points communs. On a ainsi été conduit à exposer les propriétés optiques des milieux anisotropes, utiles à bien connaître pour comprendre les phénomènes de double réfraction des ondes hertziennes dans l'ionosphère.

Chaque chapitre a été divisé en deux parties. La première est consacrée à l'exposé des notions fondamentales et des principaux résultats théoriques. Les résultats moins importants ont été rejetés, avec la plupart des applications, dans la deuxième partie, sous la rubrique : *compléments et applications*.

Pour faciliter son utilisation par les étudiants des Universités, l'ouvrage est présenté en deux fascicules séparés, qui peuvent être étudiés indépendamment l'un de l'autre :

- I. Propagation libre,
- II. Propagation guidée ;

ils correspondent respectivement à deux programmes différents de Diplômes d'Etudes approfondies (I. Propagation des ondes électromagnétiques ; II. Hyperfréquences, guides et cavités).

Le système d'Unités utilisé est le système d'unités mixtes C.G.S. qui est, pour des raisons que nous avons maintes fois exposées ailleurs, celui qui convient le mieux à l'étude des questions théoriques et qu'emploient largement les théoriciens français et étrangers. Cependant nous avons transcrit en unités S.I., avec un numéro bis les principales formules utilisées en pratique. En outre, une annexe sur les changements d'unités permet de passer facilement d'un système à l'autre.

Conformément à un usage très répandu, les grandeurs vectorielles ont été représentées par des lettres en caractères gras. Il convient toutefois de signaler que, pour les majuscules cursives, qui désignent le plus souvent des quantités complexes, scalaires ou vectorielles, les caractères gras diffèrent assez peu des caractères ordinaires. Mais il ne doit pas, croyons-nous, en résulter trop de gêne pour un lecteur attentif, qui ne manquera pas d'observer la légère différence de forme existant entre ces caractères.

Je remercie vivement le CNET et ses collaborateurs de l'aide qu'ils m'ont apportée pour la publication de cet ouvrage et, tout particulièrement M. Pierre Lapostolle et M. Claude Vassallo, qui ont pris la peine de lire entièrement mon manuscrit. Les remarques qu'ils m'ont faites m'ont été d'une grande utilité et m'ont permis d'éviter quelques erreurs. Qu'ils veuillent bien trouver ici l'expression de ma profonde gratitude.

Table des matières

Chapitre 1 Ondes planes dans le vide	1
1.1 Ondes planes monochromatiques	1
1.2 Polarisation elliptique, rectiligne et circulaire	3
1.3 Intégrale générale des équations de Maxwell dans le vide	5
1.4 Groupes ou paquets d'ondes	8
1.5 Relations d'incertitude pour le photon	12
1.6 Ondes stationnaires	14
1.7 Energie d'une onde plane monochromatique	15
1.8 Vecteur radiant complexe	16
1.9 Energie d'une perturbation électromagnétique quelconque	18
1.10 Energie d'un paquet d'ondes	20
1.10.1 Energie et puissance moyennes	22
<i>Compléments et applications</i>	24
1.11 Les ondes planes et les fonctions de Bromwich-Borgnis	24
1.12 Paquet d'ondes gaussien	27
1.12.1 Relation d'Heisenberg	29
1.13 Influence du mouvement sur la propagation	31
1.13.1 Aberration	32
1.13.2 Effet Doppler-Fizeau	33
Chapitre 2 Rayonnement et ondes sphériques dans le vide	35
2.1 Champ produit par un système émetteur	35
2.1.1 Champs à grande distance	37
2.2 Dipôles rayonnants	38
2.3 Dipôle électrique. Oscillateur de Hertz	39
2.3.1 Structure du champ d'un dipôle harmonique	42
2.3.2 Puissance rayonnée	43
2.4 Dipôle magnétique. Circuit oscillant	44
2.4.1 Structure du champ d'un dipôle harmonique	46
2.4.2 Puissance rayonnée	47
2.5 Expression générale des champs en fonction des sources	47
2.6 Potentiels et champs à grande distance en fonction des sources	51
2.6.1 Cas où $\chi \gg a$	52
<i>Compléments et applications</i>	55
2.7 Rayonnement de charges en mouvement lent	55
2.7.1 Mouvements vibratoires harmoniques	58
2.7.2 Remarques sur le calcul des potentiels	58

2.8	Charge accélérée en mouvement rapide	59
2.8.1	Mouvement circulaire uniforme	61
2.9	Charge ultrarelativiste en mouvement circulaire	64
2.9.1	Analyse du rayonnement synchrotron	66
2.9.2	Exemple numérique	70
2.10	Rayonnement d'une antenne rectiligne	71
2.10.1	Antenne demi-onde	73
2.10.2	Antenne très courte	74
2.10.3	Antenne et circuit	75
2.11	Oscillations amorties	75
2.12	Oscillations propres d'une sphère	76
2.12.1	Premier régime de type électrique	78
2.12.2	Premier régime de type magnétique	80
 <i>Chapitre 3 Les ondes planes dans les milieux isotropes</i>		 82
3.1	Hypothèses simplificatrices et équations fondamentales	82
3.1.1	Temps de relaxation	83
3.1.2	Notation complexe	84
3.2	Milieux transparents non dispersifs	84
3.3	Milieux absorbants	86
3.3.1	Milieux peu conducteurs	88
3.3.2	Corps très conducteurs	89
3.4	Gaz ionisés	90
3.4.1	Conductivité statique	90
3.4.2	Conductivité et permittivité en régime harmonique	92
3.4.3	Variations de σ et de ε en fonction de ω	96
3.4.4	Résistance visqueuse équivalente	97
3.5	Ondes hertziennes dans l'ionosphère	98
3.5.1	Indices de réfraction et d'extinction	99
3.5.2	Vitesse de groupe	102
3.6	Réflexion et réfraction vitreuses	103
3.6.1	Lois de Descartes	103
3.6.2	Formules de Fresnel	105
3.7	Incidence normale	108
3.8	Incidence oblique	109
3.8.1	Premier cas $n > 1$	109
3.8.2	Deuxième cas $n < 1$	110
3.9	Onde évanescente	112
3.10	Réflexion sur un conducteur	114
3.10.1	Onde réfractée	115
3.10.2	Onde réfléchie	115
<i>Compléments et applications</i>		116
3.11	Réflexion et réfraction ionosphérique	116
3.11.1	Incidence normale	117
3.11.2	Incidence oblique	118
3.11.3	Indice variable	119
3.12	Dispersion de la lumière	122
3.12.1	Constante diélectrique statique	123
3.12.2	Constante diélectrique complexe	124
3.12.3	Dispersion et absorption	124
3.13	Ondes à phase complexe	128
3.13.1	Régimes harmoniques	130

3.14	Application à la réflexion	131
3.14.1	Rayon transmis dans un milieu absorbant	132
3.14.2	Rayon réfracté par un milieu transparent et énergie d'une onde évanescente	132
3.14.3	Réflexion totale et décalage d'un faisceau limite	133
 <i>Chapitre 4 Les ondes dans les milieux anisotropes. Double réfraction</i>		134
4.1	Ondes dans un milieu anisotrope transparent et non dispersif	134
4.1.1	Rayons électromagnétiques et vitesse radiale	137
4.1.2	Biréfringence	137
4.2	Surface et ellipsoïde des indices	139
4.3	Milieux biaxes	142
4.4	Milieux uniaxes	144
4.5	Biréfringence circulaire	145
4.6	Théorie mathématique du pouvoir rotatoire	147
4.7	Biréfringence de l'ionosphère	149
4.8	Champ magnétique parallèle à la direction de propagation	152
4.8.1	Onde singulière	155
4.9	Champ magnétique orthogonal à la direction de propagation	155
4.10	Exemples numériques	157
4.11	Ionosphère et plasmas	159
4.11.1	Effet des chocs	159
	<i>Compléments et applications</i>	160
4.12	Surface d'onde	160
4.12.1	Milieux biaxes	162
4.12.2	Milieux uniaxes	164
4.13	Rayons réfractés	164
4.13.1	Milieux uniaxes	165
4.13.2	Milieux biaxes	165
4.14	Pouvoir rotatoire magnétique	166
4.14.1	Constante de Verdet	168
4.15	Invariance par symétrie et pouvoir rotatoire	169
4.15.1	Invariance par symétrie	170
4.15.2	Application au pouvoir rotatoire	171
4.16	Biréfringences accidentelles	174
4.16.1	Biréfringence par déformation	174
4.16.2	Effet Kerr	175
4.16.3	Effet Cotton-Mouton	176
 <i>Annexe A Changements d'unités</i>		178
A.1	Règles générales	178
A.2	Exemples	179
Tableau	181

SOMMAIRE DU FASCICULE II

Chapitre 5 Propagation le long d'un cylindre indéfini

Chapitre 6 Propagation dans les tuyaux métalliques

Chapitre 7 **Ligne à deux fils**

Chapitre 8 **Câble coaxial**

Chapitre 9 **Oscillations dans les cavités**

Annexe B **Constante de propagation des ondes guidées par des conducteurs imparfaits**

Index

Chapitre 1

Ondes planes dans le vide

1.1 ONDES PLANES MONOCHROMATIQUES

Le champ électromagnétique, dans le vide, peut être défini par les deux seuls vecteurs \mathbf{E} et \mathbf{H} et les deux principales équations de Maxwell, celle qui exprime la loi de l'induction et celle qui généralise le théorème d'Ampère, peuvent être écrites sous la forme

$$(1.1) \quad \mathbf{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \mathbf{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

si l'on utilise les unités mixtes CGS, ou

$$(1.1bis) \quad \mathbf{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \mathbf{rot} \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

si l'on utilise les unités S.I.

Si l'on exclut les champs invariables, les deux autres équations, qui expriment, l'une le théorème de Gauss, l'autre la conservation du flux magnétique et qui se réduisent à

$$(1.2) \quad \mathbf{div} \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{div} \mathbf{H} = 0,$$

sont des conséquences des précédentes. On peut donc se dispenser de les écrire. Mais il peut être avantageux de les utiliser et il convient, par conséquent, de les avoir présentes à l'esprit.

Pour rechercher les solutions harmoniques, de pulsation ω , des équations (1.1), on utilise la notation complexe. On pose

$$(1.3) \quad \mathbf{E} = \text{Re } \mathcal{E} e^{i\omega t}, \quad \mathbf{H} = \text{Re } \mathcal{H} e^{i\omega t},$$

où \mathcal{E} et \mathcal{H} sont des vecteurs à composantes complexes et où Re signifie « partie réelle de ». Les équations (1.1) se réduisent alors à

$$(1.4) \quad \text{rot } \mathcal{E} = -i \frac{\omega}{c} \mathcal{H}, \quad \text{rot } \mathcal{H} = i \frac{\omega}{c} \mathcal{E}.$$

A toute intégrale de ces équations, les formules (1.3) font correspondre une intégrale des équations (1.1).

Soit \mathbf{k} un vecteur quelconque de longueur

$$(1.5) \quad k = \omega / c$$

et désignons par \mathbf{r} le vecteur qui joint l'origine des coordonnées au point courant. On va voir que les équations (1.4) admettent des intégrales de la forme

$$(1.6) \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

où les composantes des vecteurs \mathcal{E}_0 et \mathcal{H}_0 sont des constantes complexes.

Portons en effet les expressions (1.6) dans la première équation (1.4). Le calcul de $\text{rot } \mathcal{E}$ donne

$$(1.7) \quad \text{rot } \mathcal{E} = -\mathcal{E}_0 \wedge \text{grad } e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \mathcal{E}_0 \wedge i\mathbf{k} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

de sorte qu'on obtient, en tenant compte de (1.5),

$$(1.8) \quad \mathcal{H}_0 = (\mathbf{k}/k) \wedge \mathcal{E}_0.$$

D'une manière analogue, la deuxième équation (1.4) donne

$$(1.9) \quad \mathcal{E}_0 = -(\mathbf{k}/k) \wedge \mathcal{H}_0.$$

Pour que les vecteurs (1.6) vérifient les deux équations (1.4), il faut et il suffit que les deux relations (1.8) et (1.9) soient compatibles. On en conclut que les trois vecteurs \mathcal{E}_0 , \mathcal{H}_0 et \mathbf{k} doivent former un trièdre trirectangle direct,

\mathcal{H}_0 se déduisant de \mathcal{E}_0 par simple rotation de $+\frac{\pi}{2}$ autour du vecteur \mathbf{k} . On observera d'ailleurs qu'en général, les droites qui portent \mathcal{E}_0 et \mathcal{H}_0 sont imaginaires.

L'orthogonalité de \mathcal{E}_0 et de \mathcal{H}_0 avec \mathbf{k} peut s'exprimer sous la forme

$$(1.10) \quad \mathbf{k} \mathcal{E}_0 = 0, \quad \mathbf{k} \mathcal{H}_0 = 0.$$

C'est d'ailleurs ce que donneraient les équations (1.2). On peut, si l'on veut — et c'est ce que l'on fait habituellement — remplacer la condition (1.9) par la première condition (1.10).

Finalement, la solution des équations de Maxwell que nous venons d'obtenir s'écrit, en notation complexe,

$$(1.11) \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \mathcal{H} = (\mathbf{k}/k) \wedge \mathcal{E},$$

avec

$$(1.12) \quad \mathbf{k} \mathcal{E}_0 = 0.$$

En unités S.I., la deuxième formule (1.11) est remplacée par

$$(1.11\text{bis}) \quad \mathcal{H} = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} (\mathbf{k}/k) \wedge \mathcal{E}_0.$$

La solution réelle correspondant à ces expressions complexes et fournie par les formules (1.3) est

$$(1.13) \quad \mathbf{E} = \operatorname{Re} \mathcal{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \quad \mathbf{H} = (\mathbf{k}/k) \wedge \mathbf{E},$$

avec

$$(1.14) \quad \mathbf{k}\mathbf{E} = 0.$$

Les vecteurs \mathbf{E} et \mathbf{H} sont, à un instant donné, équipollents en tous les points d'un plan orthogonal à \mathbf{k} et ils restent invariables au cours du temps dans tout plan d'équation

$$(1.15) \quad \omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} = \text{constante},$$

plan qui se déplace à la vitesse

$$(1.16) \quad V = \omega/k = c.$$

On a donc affaire à une onde plane monochromatique ; \mathbf{k} est la *vecteur de propagation* et sa grandeur k est la *constante de propagation*.

1.2 POLARISATION ELLIPTIQUE, RECTILIGNE ET CIRCULAIRE

Pour préciser la structure de cette onde, nous allons supposer le vecteur de propagation dirigé suivant Oz , de sorte que le produit scalaire $\mathbf{k}\mathbf{r}$ va se réduire à kz et que les champs vont être orthogonaux à Oz . Leurs composantes cartésiennes sont

$$(1.17) \quad \begin{cases} E_x = \operatorname{Re} \mathcal{E}_{0x} e^{i(\omega t - kz)}, & H_x = -E_y, \\ E_y = \operatorname{Re} \mathcal{E}_{0y} e^{i(\omega t - kz)}, & H_y = E_x. \end{cases}$$

Désignons respectivement par E_1 et E_2 les modules de \mathcal{E}_{0x} et \mathcal{E}_{0y} , par φ_1 et φ_2 leurs arguments. On a

$$(1.18) \quad \begin{cases} E_x = H_y = E_1 \cos(\omega t - kz + \varphi_1), \\ E_y = -H_x = E_2 \cos(\omega t - kz + \varphi_2). \end{cases}$$

Ces formules représentent une onde à *polarisation elliptique*, que l'on peut considérer comme la superposition de deux ondes à polarisation rectiligne : la première transporte un champ électrique, d'amplitude E_1 , parallèle à Ox et un champ magnétique de même amplitude, parallèle à Oy ; son *plan de polarisation*, c'est-à-dire celui qui contient la direction de propagation et est perpendiculaire au champ électrique (¹), est le plan des yz ; la seconde transporte des champs d'amplitude E_2 et a pour plan de polarisation le plan des xz . En un point donné de l'espace, l'extrémité du vecteur \mathbf{E} décrit une ellipse inscrite dans un rectangle dont les côtés, respectivement parallèles à Ox et Oy , ont pour longueurs $2E_1$ et $2E_2$

(¹) Les radioélectriciens appellent plutôt « plan de polarisation » celui qui contient le champ électrique. Nous adoptons ici la terminologie habituelle en optique.

(fig. 1.1). L'extrémité du vecteur \mathbf{H} décrit une ellipse qui se déduit de la précédente par une rotation de $+\pi/2$ autour de la direction de propagation Oz .

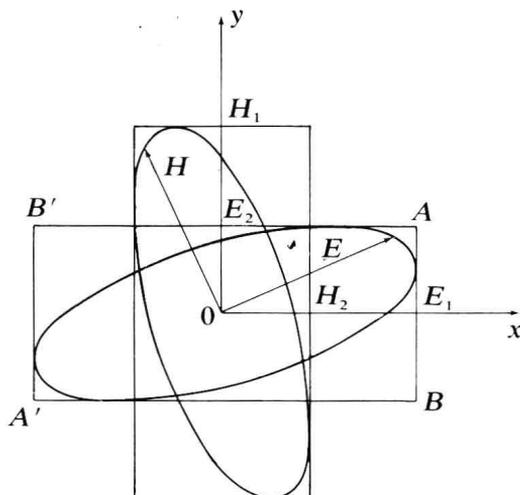


Fig. 1.1

La forme de l'ellipse et son sens de description dépendent de la différence de phase $\varphi_2 - \varphi_1$, que nous pouvons toujours supposer comprise entre 0 et 2π . Si $\varphi_2 - \varphi_1$ est compris entre 0 et π , les champs tournent, pour un observateur qui voit venir l'onde, dans le sens des aiguilles d'une montre ; on a alors des *ellipses droites* ; si $\varphi_2 - \varphi_1$ est compris entre π et 2π , les champs tournent en sens inverse et l'on a des *ellipses gauches*.

Les ellipses peuvent se réduire à des droites, auquel cas la polarisation est rectiligne. C'est ce qui a lieu si $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ ou π : l'extrémité de \mathbf{E} décrit la diagonale AA' du rectangle $ABA'B'$ (fig. 1.1) dans le premier cas, la diagonale BB' dans le second.

Enfin, si $E_1 = E_2$ et si $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$ ou $3\pi/2$, les ellipses se réduisent à des cercles ; les ondes sont dites circulaires droites dans le premier cas, circulaires gauches dans le second.

La figure 1.2 résume ces résultats.

Les ondes à polarisation elliptique présentent la même périodicité dans le temps et dans l'espace que les ondes à polarisation rectiligne. A la période T , à la fréquence f et à la pulsation ω , liées par les relations

$$(1.19) \quad T = 1/f = 2\pi/\omega,$$

correspondent, dans l'espace, la longueur d'onde λ , le nombre d'ondes N et la constante de propagation k , liées par les relations

$$(1.20) \quad \lambda = 1/N = 2\pi/k.$$

On a d'ailleurs

$$(1.21) \quad \omega = ck, \quad f = cN, \quad \lambda = cT.$$

Si l'on superpose un nombre quelconque d'ondes à polarisations elliptiques, rectilignes ou circulaires, ayant même vecteur de propagation et

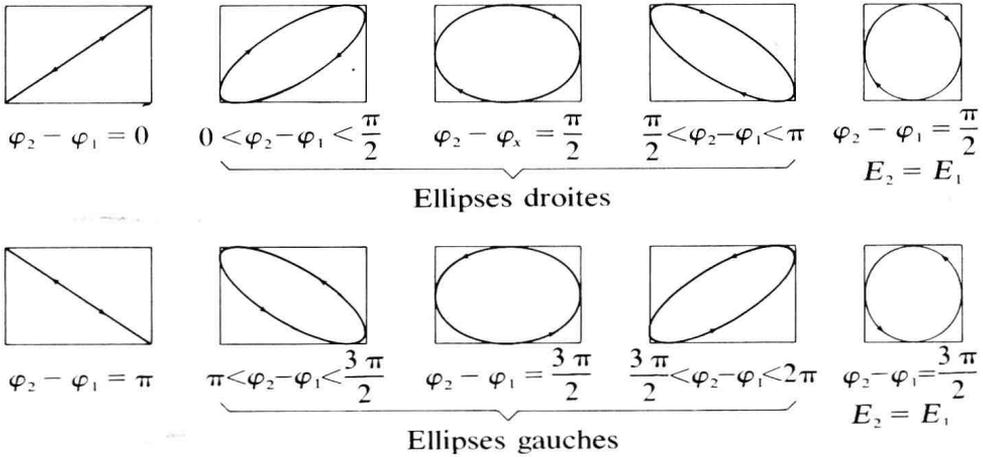


Fig. 1.2

orientées de façon quelconque autour de ce vecteur, on obtient toujours une onde à polarisation elliptique (étant entendu que les polarisations rectiligne et circulaire en sont des cas particuliers). Cela résulte immédiatement de ce que toute vibration elliptique peut être considérée comme résultant de deux vibrations rectilignes et sinusoïdales suivant des directions rectangulaires quelconques et de ce que la superposition de vibrations rectilignes et sinusoïdales, de même fréquence et de même direction, en nombre quelconque, est toujours une vibration rectiligne et sinusoïdale.

1.3 INTÉGRALE GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS DE MAXWELL DANS LE VIDE

Etant donné des vecteurs \mathbf{E} et \mathbf{H} quelconques, dont les composantes cartésiennes sont des fonctions des coordonnées x, y, z et du temps t , on peut toujours exprimer ces composantes sous forme d'intégrales de Fourier quadruples. Rappelons en effet qu'à toute fonction $F(x, y, z, t)$, on peut faire correspondre une fonction \bar{F} de quatre variables réelles ξ, η, ζ, θ telle que l'on ait

$$(1.22) \quad F(x, y, z, t) = \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}(\xi, \eta, \zeta, \theta) e^{i(\xi x + \eta y + \zeta z + \theta t)} d\xi d\eta d\zeta d\theta.$$

La fonction \bar{F} est la transformée de Fourier de F et elle s'exprime en fonction de F sous la forme

$$(1.23) \quad \bar{F}(\xi, \eta, \zeta, \theta) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x, y, z, t) \times e^{-i(\xi x + \eta y + \zeta z + \theta t)} dx dy dz dt.$$

A tout vecteur \mathbf{E} (ou \mathbf{H}) correspond, d'une manière analogue, un vecteur $\bar{\mathbf{E}}$ (ou $\bar{\mathbf{H}}$) et ils sont liés par des relations vectorielles analogues à (1.22) et

(1.23). Pour écrire ces relations de façon aussi simple que possible, nous introduirons, comme précédemment, le vecteur $\mathbf{r}(x, y, z)$; nous ferons le changement de notations $\xi, \eta, \zeta, \theta \rightarrow -k_x, -k_y, -k_z, \omega$; nous désignerons par \mathbf{k} le vecteur de composantes k_x, k_y, k_z ; nous écrirons respectivement $d^3\mathbf{r}$ et $d^3\mathbf{k}$ pour $dx dy dz$ et $dk_x dk_y dk_z$; enfin nous remplacerons le signe de sommation quadruple par un signe simple, affecté de l'indice 4. Nous aurons ainsi

$$(1.24) \quad \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_4 \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} d^3\mathbf{k} d\omega, \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \int_4 \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} d^3\mathbf{k} d\omega ; \end{cases}$$

$\bar{\mathbf{E}}$ et $\bar{\mathbf{H}}$ s'expriment en fonction de \mathbf{E} et de \mathbf{H} sous forme d'intégrales analogues à (1.23).

Supposons maintenant que \mathbf{E} et \mathbf{H} constituent une solution quelconque des équations de Maxwell dans le vide et déterminons $\bar{\mathbf{E}}$ et $\bar{\mathbf{H}}$ de façon qu'il en soit bien ainsi. Pour cela, portons les expressions (1.24) dans la première équation (1.1). Comme on peut dériver sous le signe d'intégration par rapport à x, y, z, t et que

$$(1.25) \quad \text{rot} [\bar{\mathbf{E}} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}] = -\bar{\mathbf{E}} \wedge \text{grad} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} = -i\mathbf{k} \wedge \bar{\mathbf{E}} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})},$$

$$(1.26) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\bar{\mathbf{H}} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}] = i \frac{\omega}{c} \bar{\mathbf{H}} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})},$$

on obtient

$$(1.27) \quad \int_4 \left(\mathbf{k} \wedge \bar{\mathbf{E}} - \frac{\omega}{c} \bar{\mathbf{H}} \right) e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} d^3\mathbf{k} d\omega = 0.$$

Cette égalité devant être vérifiée quels que soient \mathbf{r} et t , le coefficient de l'exponentielle doit être nul. On doit donc avoir

$$(1.28) \quad \mathbf{k} \wedge \bar{\mathbf{E}} = (\omega/c) \bar{\mathbf{H}}.$$

D'une manière analogue, la deuxième équation (1.1) donne

$$(1.29) \quad \mathbf{k} \wedge \bar{\mathbf{H}} = -(\omega/c) \bar{\mathbf{E}}.$$

En portant dans (1.29) l'expression de $\bar{\mathbf{H}}$ tirée de (1.28), on obtient

$$(1.30) \quad \mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge \bar{\mathbf{E}}) = -(\omega^2/c^2) \bar{\mathbf{E}},$$

ce qui donne

$$(1.31) \quad (\mathbf{k}\bar{\mathbf{E}}) \mathbf{k} = (k^2 - \omega^2/c^2) \bar{\mathbf{E}}.$$

D'une manière analogue, on obtiendrait, à partir de la deuxième équation (1.1),

$$(1.32) \quad (\mathbf{k}\bar{\mathbf{H}}) \mathbf{k} = (k^2 - \omega^2/c^2) \bar{\mathbf{H}}.$$

Mais \mathbf{k} ne peut être colinéaire à $\bar{\mathbf{E}}$ ou à $\bar{\mathbf{H}}$ sans que ces vecteurs soient nuls, d'après (1.28) et (1.29). On a donc nécessairement

$$(1.33) \quad k^2 = \omega^2/c^2$$

et

$$(1.34) \quad \mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{E}} = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{H}} = 0.$$

Le vecteur \mathbf{k} est donc orthogonal aux deux vecteurs $\bar{\mathbf{E}}$ et $\bar{\mathbf{H}}$. C'est d'ailleurs ce que donneraient les équations (1.2) si l'on y portait les expressions (1.24) de \mathbf{E} et de \mathbf{H} et l'on vérifie encore ici que ces équations ne donnent rien qui ne soit implicitement contenu dans les équations (1.1).

La relation (1.33) montre que pour un vecteur \mathbf{k} donné, de longueur k , ω ne peut avoir que les deux valeurs opposées $\omega = \pm kc$. A ces deux valeurs correspondent pour $\bar{\mathbf{E}}$ deux valeurs différentes que nous désignerons par $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{k})$ et $-\bar{\mathbf{E}}'(\mathbf{k})$. Dans l'expression (1.24) de \mathbf{E} , l'intégrale quadruple est donc remplacée par deux intégrales triples :

$$(1.35) \quad \mathbf{E} = \int_3 \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{k}) e^{i(kct - \mathbf{k}\mathbf{r})} d^3\mathbf{k} - \int_3 \bar{\mathbf{E}}'(\mathbf{k}) e^{-i(kct + \mathbf{k}\mathbf{r})} d^3\mathbf{k}.$$

Dans la deuxième intégrale, étendue, comme la première, à toutes les valeurs positives et négatives de k_x, k_y, k_z , on peut remplacer ces variables par $-k_x, -k_y, -k_z$, ce qui donne, en faisant sortir e^{ikct} et $e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ des signes d'intégration,

$$(1.36) \quad \mathbf{E} = e^{ikct} \int_3 \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3\mathbf{k} - e^{-ikct} \int_3 \bar{\mathbf{E}}'(-\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3\mathbf{k}.$$

Mais seules nous intéressent les solutions réelles des équations de Maxwell. Exprimons donc que \mathbf{E} est un vecteur réel, c'est-à-dire qu'il est égal à son imaginaire conjugué. On obtient l'égalité (l'astérisque désigne la quantité conjuguée)

$$(1.37) \quad e^{ikct} \int_3 [\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{k}) + \bar{\mathbf{E}}'^*(-\mathbf{k})] e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3\mathbf{k} = \\ = e^{-ikct} \int_3 [\bar{\mathbf{E}}^*(\mathbf{k}) + \bar{\mathbf{E}}'(-\mathbf{k})] e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3\mathbf{k},$$

qui doit être vérifiée quel que soit t , ce qui exige que les deux intégrales soient identiquement nulles, donc que l'on ait

$$(1.38) \quad \bar{\mathbf{E}}^*(\mathbf{k}) = -\bar{\mathbf{E}}'(-\mathbf{k}).$$

Si ω désigne désormais la quantité essentiellement positive $\omega = kc$, l'expression (1.36) de \mathbf{E} devient, compte tenu de (1.38)

$$(1.39) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_3 [\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{k}) e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} + \bar{\mathbf{E}}^*(\mathbf{k}) e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}] d^3\mathbf{k}.$$

D'une manière analogue, on a

$$(1.40) \quad H(\mathbf{r}, t) = \int_3 [\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{k}) e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} + \bar{\mathbf{H}}^*(\mathbf{k}) e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}] d^3\mathbf{k}$$

et, d'après (1.28) et (1.29), l'on a, puisque $\omega = kc$,

$$(1.41) \quad \bar{\mathbf{H}} = (\mathbf{k}/k) \wedge \bar{\mathbf{E}}, \quad \bar{\mathbf{E}} = -(\mathbf{k}/k) \wedge \bar{\mathbf{H}}.$$

Les quatre égalités (1.34) et (1.41), dont deux seulement sont indépendantes, expriment que les vecteurs $\bar{\mathbf{E}}$, $\bar{\mathbf{H}}$ et \mathbf{k} forment un trièdre trirectangle direct. Les deux premiers sont d'ailleurs, en général, complexes et portés par des droites imaginaires. $\bar{\mathbf{H}}$ se déduit de $\bar{\mathbf{E}}$ par une simple rotation de $+\pi/2$ autour de \mathbf{k} .

Les expressions précédentes font apparaître toute intégrale réelle des équations de Maxwell dans le vide comme une superposition de perturbations élémentaires représentées par les éléments différentiels $d\mathbf{E}$ et $d\mathbf{H}$ des intégrales (1.39) et (1.40). Or on peut écrire

$$(1.42) \quad d\mathbf{E} = \text{Re } 2 \bar{\mathbf{E}} d^3\mathbf{k} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}$$

et, d'après (1.41),

$$(1.43) \quad d\mathbf{H} = (\mathbf{k}/k) \wedge d\mathbf{E}.$$

Il suffit de désigner par \mathcal{E}_0 le vecteur $2 \bar{\mathbf{E}} d^3\mathbf{k}$ et de rapprocher les formules ainsi obtenues des formules (1.13), pour constater qu'elles représentent une onde plane monochromatique à polarisation elliptique. Par conséquent :

Toute perturbation électromagnétique dans le vide peut être considérée comme la superposition d'ondes planes monochromatiques à polarisation elliptique.

Comme une telle onde peut toujours être décomposée en deux ondes à polarisation rectiligne ou en deux ondes à polarisation circulaire, toute perturbation électromagnétique dans le vide peut encore être considérée comme une superposition d'ondes planes monochromatiques, soit à polarisation rectiligne (¹), soit à polarisation circulaire.

1.4 GROUPES OU PAQUETS D'ONDES

L'onde plane monochromatique est une abstraction dépourvue de signification physique : une perturbation électromagnétique réelle ne s'étend pas dans tout l'espace et ne dure qu'un temps limité. Mais il existe des perturbations qui, dans un domaine borné d'espace-temps, ne diffèrent pas sensiblement d'une onde plane monochromatique. Une telle perturbation peut être considérée comme constituée par une superposition d'ondes planes monochromatiques pour lesquelles le vecteur \mathbf{k} diffère peu d'un vecteur moyen \mathbf{k}_0 . Les champs peuvent être représentés par des

(¹) Le fait que les ondes planes à polarisation rectiligne dépendent de six paramètres ne suffit pas à établir ce résultat, contrairement à ce qui est dit au chapitre V du tome III du Traité d'Electricité théorique (p. 154).