39

FINANCE ET ÉCONOMIE APPLIQUÉE
Collection publiée sous la direction de Henri HIERCHE

Michel SIMONNARD

programmation linéaire

technique du calcul économique

avec la participation de Xavier CHOUTET

1

fondements

dunod

FINANCE
ET
ÉCONOMIE APPLIQUÉE

Volume 39

Collection publiée sous la direction de
Henri HIERCHE

PROGRAMMATION LINÉAIRE

TECHNIQUE DU CALCUL ÉCONOMIQUE

1. Fondements

COLLECTION FINANCE ET ÉCONOMIE APPLIQUÉE

Sous la direction de H. HIERCHE

Volumes publiés

1. H. ARDANT, *Introduction à l'étude des banques et opérations de banque* (épuisé).
2. P. DUPONT, *Le contrôle des banques et la direction du crédit en France* (épuisé).
3. B. OHLIN, *La politique du commerce extérieur.*
4. J. R. HICKS, *Valeur et capital* (Enquête sur divers principes fondamentaux de la théorie économique).
5. J. LESOURNE, *Technique économique et gestion industrielle* (2e édition).
6. P. MASSÉ, *Le choix des investissements* (critères et méthodes) (2e édition).
7. J. G. KEMENY, J. L. SNELL, G. L. THOMPSON, *Algèbre moderne et activités humaines* (3e édition française revue et augmentée).
8. R. FRISCH (avec la collaboration de L. NATAF), *Maxima et minima* (Théorie et applications économiques).
9. P. ROSENSTIEHL, A. GHOUILA-HOUIRI, *Les choix économiques* (décisions séquentielles et simulation).
10. J. TINBERGEN, *Techniques modernes de la politique économique.*
11. G. TINTNER, *Mathématiques et statistiques pour les économistes.* Tome 1 : *Méthodes élémentaires.*
13. J. MOTHES, *Prévisions et décisions statistiques dans l'entreprise* (2e édition).
14. R. FRISCH, *Lois techniques et économiques de la production.*
15. L. V. KANTOROVITCH, *Calcul économique et utilisation des ressources.*
16. E. MALINVAUD, *Méthodes statistiques de l'économétrie.*
17. J. G. KEMENY, A. SCHLEIFER, J. L. SNELL, G. L. THOMPSON, *Les mathématiques modernes dans la pratique des affaires.*
18. R. BELLMAN et S. E. DREYFUS, *La programmation dynamique et ses applications.*
19. J. DESROUSSEAUX, *L'évolution économique et le comportement industriel.*
20. S. Ch. KOLM, *Les choix financiers et monétaires* (Théorie et technique modernes).
21. Y. MAINGUY, *L'économie de l'énergie.*
22. A. COTTA, *Théorie générale du capital, de la croissance et des fluctuations.*
23. H. J. HENDERSON et R. E. QUANDT, *Microéconomie* (Formulation mathématique élémentaire).
24. G. PALMADE, *L'économique et les sciences humaines* (tome 1).
25. G. PALMADE, *L'économique et les sciences humaines* (tome 2).
26. L. STOLERU, *L'équilibre et la croissance économiques. Principes de macroéconomie* (3e édition).

27. J. C. Boot, *Programmation quadratique.*
28. B. de Finetti, *Leçons de mathématiques financières.*
29. C. W. J. Granger, *Analyse spectrale des séries temporelles en économie.*
30. J. Ullmo, *Le profit.*
31. B. Roy, *Algèbre moderne et théorie des graphes* — Tome 1 : *Notions et résultats fondamentaux.*
32. B. Roy, *Algèbre moderne et théorie des graphes* — Tome 2 : *Applications et problèmes spécifiques.*
33. S. C. Kolm, *L'Etat et le système des prix.*
34. S. C. Kolm, *Le service des masses.*
35. R. Harrod, *La monnaie.*
36. M. Albouy, *La régulation économique dans l'entreprise* — Tome 1 : *La régulation statique.*
37. M. Albouy, *La régulation économique dans l'entreprise* — Tome 2 : *La régulation dynamique.*
38. J. Lesourne, *Le calcul économique* (théorie et applications).
39. M. Simonnard, avec la participation de X. Choutet, *Programmation linéaire* (technique du calcul économique) — Tome 1 : *Fondements.*
40. M. Simonnard, avec la participation de X. Choutet, *Programmation linéaire* (technique du calcul économique) — Tome 2 : *Extensions.*
41. J. Lesourne, *Modèles de croissance des entreprises.*
42. Van Court Hare Jr., *L'analyse des systèmes. Outil moderne de gestion.*
43. H. Lévy-Lambert et J. P. Dupuy, *Les choix économiques dans l'entreprise et dans l'administration* — Tome 1 : *Principes de base.*
44. H. Lévy-Lambert et J. P. Dupuy, *Les choix économiques dans l'entreprise et dans l'administration* — Tome 2 : *Etudes de cas.*
45. J.-L. Guigou, *Analyse des données et choix à critères multiples.*
46. G. Worms, *Les méthodes modernes de l'économie appliquée* (2e édition).
47. R. Courbis, *Compétitivité et croissance en économie concurrencée* — Tome 1.
48. R. Courbis, *Compétitivité et croissance en économie concurrencée* — Tome 2.
49. J. Robinson, *L'économie de la concurrence imparfaite.*
50. F. Perroux, *Unités actives et mathématiques nouvelles.*
51. G. Rottier, *Economie appliquée : modèles de consommation.*
52. Jacquemin, *Economie industrielle européenne.*
53. P. A. Samuelson, *Les fondements de l'analyse économique* — Tome 1.
54. P. A. Samuelson, *Les fondements de l'analyse économique* — Tome 2.
55. R. Courbis, *Les modèles de prix pour la prévision et planification, étude comparative.*
56. J.-L. Guigou, *Méthodes multidimensionnelles.*

PROGRAMMATION LINÉAIRE

TECHNIQUE DU CALCUL ÉCONOMIQUE

PAR

Michel SIMONNARD
Ancien Élève de l'École Polytechnique

DEUXIÈME ÉDITION
REVUE ET AUGMENTÉE,
AVEC LA PARTICIPATION DE

Xavier CHOUTET
Ingénieur Civil des Mines

1. Fondements

dunod

ISBN : 2-04-002689-4

AVANT-PROPOS

Résoudre un problème de programmation mathématique, ou calculer un programme mathématique, c'est rechercher le maximum (ou le minimum) d'une fonction algébrique de variables liées par des équations ou/et inéquations algébriques de degré quelconque, appelées contraintes. Dans le cas simple où la fonction à maximiser (ou minimiser) et toutes les contraintes sont du premier degré, le problème prend le nom de *programmation linéaire*.

Les problèmes d'extrema liés ne sont pas nouveaux et une solution générale leur a été apportée par les grands mathématiciens des XVII[e] et XVIII[e] siècles (Newton, Leibniz, Lagrange, Bernouilli) qui ont développé le calcul infinitésimal et le calcul des variations. Certains auteurs [195], [272] ont montré qu'il était, en principe, possible d'appliquer les méthodes générales d'optimisation, en particulier la théorie des multiplicateurs de Lagrange, aux problèmes de programmation mathématique. Il est alors permis de se demander pourquoi ces problèmes ont, depuis 1950, attiré l'attention d'un si grand nombre de chercheurs et fait l'objet d'une littérature aussi abondante.

Un premier facteur expliquant l'essor de la programmation linéaire est le développement des *moyens de calcul électronique*. Des ordinateurs de plus en plus puissants ont permis de traiter avec succès des problèmes concrets de taille importante, traduisant, avec une fidélité suffisante, des situations économiques que leur complexité plaçait hors d'atteinte des solutions intuitives ou empiriques.

Alors que les premiers « codes » utilisés à la fin des années 50 ne permettaient généralement de prendre en compte que quelques dizaines de contraintes, il est maintenant possible de résoudre des problèmes ayant plusieurs milliers de contraintes et un nombre quasi illimité de variables. De plus, le calcul du programme optimal peut être complété par des traitements annexes (analyse de sensibilité, coûts marginaux, coûts de substitution, paramétrages, etc.) offrant un très grand intérêt pour la compréhension du problème et l'appréciation de la solution trouvée.

Mais la raison la plus importante de l'intérêt suscité par les programmes linéaires a été le développement de l'*économie appliquée* et des *techniques modernes de gestion*. Bien que la programmation mathématique soit définie en termes abstraits, bien qu'elle puisse trouver des applications intéressantes dans le domaine des mathématiques pures, ce sont essentiellement des préoccupations économiques, un désir de faire de la programmation linéaire un des plus remarquables outils du calcul économique et de la gestion scientifique des entreprises, qui ont été à l'origine des efforts des chercheurs et ont souvent motivé ces efforts de la façon la plus directe.

Ceci impose aux méthodes utilisées pour le calcul des programmes linéaires d'être *efficaces*. Savoir résoudre un problème en un nombre fini d'opérations n'est pas suffisant ; il faut encore que le temps nécessaire pour obtenir la solution et le coût de cette obtention puissent être approximativement prévus et soient inférieurs à des limites raisonnables. Ainsi, du point de vue théorique, le problème général de la programmation linéaire en variables continues est résolu à la fin du chapitre 1 de cet ouvrage, lorsqu'on a montré qu'il existe un programme optimal en l'un des sommets du polyèdre convexe des programmes, et qu'on a donné un moyen de calculer les coordonnées de tous ces sommets, qui sont en nombre fini ; au contraire, du point de vue du mathématicien appliqué, c'est à la fin du chapitre 1 que commencent les développements intéressants : ceux qui traitent des diverses méthodes pratiques de calcul.

D'ailleurs, si la *méthode du simplexe* (1) est seule donnée, dans cet ouvrage, comme méthode générale de calcul des programmes linéaires en variables continues, c'est parce qu'elle reste, de loin, la plus efficace (l'emploi des multiplicateurs de Lagrange, théoriquement possible, soulève en pratique des difficultés importantes [49]). Et assez curieusement, cette efficacité résulte d'un fait d'expérience, établi par la résolution de milliers de problèmes pratiques et permettant de prévoir, avec une approximation suffisante, le temps et, par suite, le coût de résolution d'un problème quelconque sur un calculateur donné : le nombre d'itérations nécessaires pour résoudre un problème est souvent compris entre une fois et demie et trois fois le nombre des contraintes linéaires du problème.

Du point de vue historique, sans parler des premiers travaux de Monge en 1776 sur un problème de ce genre [236], c'est en 1941-1942 que l'on trouve formulé, pour la première fois dans la littérature, un problème *particulier* de programmation linéaire : le problème de transport [180], [190], repris ensuite indépendamment par T. C. Koopmans [196] et souvent appelé depuis, pour cette raison, problème de Hitchcock-Koopmans-Kantorovitch. D'autre part, G. Stigler pose, en 1945, un autre problème particulier : celui du régime alimentaire optimal [280]. En 1947, *le problème général de programmation linéaire* est formulé en termes mathématiques précis par G. B. Dantzig et d'autres chercheurs du « U. S. Department of the Air Force » qui constituent alors une équipe baptisée « Project SCOOP (Scientific Computation of Optimum Programs) » ; les applications entrevues sont alors essentiellement d'ordre militaire. Les mots « linear programming » apparaissent pour la première fois en 1949 [72]. En même temps, G. B. Dantzig développe la *méthode du simplexe*, qui est exposée [74] dans un recueil d'articles de la « Cowles Commission for research in economics » publié sous la direction de T. C. Koopmans [197]. Des résultats théoriques importants sur la *dualité*, fondés sur des notes non publiées de J. Von Neumann, sont publiés dans le même recueil [143].

A partir de 1950, parallèlement à l'activité de la Cowles Commission, un nombre important de chercheurs (mathématiciens et économistes), isolés ou en groupes,

(1) Signalons dès maintenant que la *méthode* du simplexe (qui est unique) conduit à plusieurs *algorithmes* généraux (les algorithmes primal, dual, primal-dual), ces algorithmes pouvant être appliqués sous plusieurs *formes* (ordinaire, révisée, lexicographique).

contribue au développement des différentes ramifications de la programmation linéaire. Citons, en particulier, la « Rand Corporation » avec G. B. Dantzig et W. Orchard-Hays, puis L. R. Ford, D. R. Fulkerson et D. Gale, etc. ; le département de mathématiques de l'université de Princeton avec A. W. Tucker et H. W. Kuhn ; la « Graduate School of Industrial Administration » du « Carnegie Institute of Technology » avec A. Charnes et W. W. Cooper. Les deux premiers groupes travaillent essentiellement à la théorie mathématique des programmes et à la mise en œuvre sur calculateur ; les résultats sont jalonnés à la « Rand Corporation » par la série des « Rand notes on linear programming and extensions » (plus de soixante notes de 1953 à 1961), spécialement celles de G. B. Dantzig sur les développements théoriques, de W. Orchard-Hays sur la mise au point des codes, de L. R. Ford et D. R. Fulkerson sur les réseaux de transport ; à l'actif du groupe de Princeton il faut citer notamment, après la méthode « hongroise » de H. W. Kuhn pour les problèmes d'affectation, la publication du remarquable recueil « Linear Inequalities and Related Systems » [204] en 1956, et la méthode de R. E. Gomory pour le calcul des programmes linéaires en nombres entiers [159] en 1958. L'équipe du « Carnegie Tech », tout en s'intéressant à certains aspects théoriques particuliers (dégénérescence [46], erreurs d'arrondis et forme révisée du simplexe [64], variables bornées [65]), développe surtout les *applications industrielles* de la programmation linéaire.

A partir de 1960, les domaines d'application se multiplient et la dimension des problèmes dont la résolution devient possible augmente rapidement, suscitant un intérêt croissant de la part des spécialistes, des organismes publics ou privés et des entreprises industrielles, comme l'attestent les nombreuses références incluses dans la bibliographie. Les progrès des calculateurs électroniques permettent de passer progressivement à la prise en compte de plusieurs milliers de contraintes. En même temps, le traitement de systèmes linéaires de telles dimensions oblige à perfectionner les techniques de calcul numérique (notamment pour l'inversion des matrices de grande taille) et à créer des outils annexes facilitant l'exploitation, sur ordinateur, de « gros » modèles.

La plupart des travaux de 1960 à 1970 visent :

— d'une part à tirer parti des structures particulières rencontrées dans de nombreux problèmes pratiques, en développant les algorithmes spécifiquement applicables à ces structures [95], [96], l'objectif étant soit de réduire les temps de calcul, soit de permettre la résolution de problèmes de très grande taille ;

— d'autre part à améliorer la fidélité de représentation des problèmes réels par des modèles de programmation linéaire, soit en corrigeant le caractère obligatoirement partiel et peu nuancé de *la* solution optimale par une analyse post-optimale (voir Chap. 7), soit en permettant la prise en compte de fonctions non linéaires, de variables non certaines (Chap. 10) et, surtout, de variables astreintes à prendre des valeurs entières (Chap. 16 à 19). Les possibilités ouvertes par les problèmes de programmation linéaire en variables « entières » ou mixtes (c'est-à-dire dans lesquelles tout ou partie des variables doivent être entières) sont tellement vastes que plusieurs équipes, américaines et européennes, s'appliquent, après R. E. Gomory, et dans des voies quelquefois très différentes, à la mise au point d'algorithmes de résolution de ces problèmes. Les premiers résultats concrets sont obtenus en 1969 et les progrès sont ensuite assez rapides.

Cette deuxième édition en français du livre *Programmation Linéaire* publié en 1962 — et traduit depuis lors en anglais, en espagnol et en polonais — présente, par rapport à la première édition, des améliorations et additions considérables réalisées, en collaboration, par Xavier Choutet et l'auteur.

C'est ainsi que les chapitres 10, 11, 18, 19, les paragraphes 1.1 à 1.3, 4.11 et 4.12, 7.8 à 7.10, 9.7 à 9.10, 12.17 à 12.20, 13.7 à 13.9, et une grande part des chapitres 14, 15 et 16 sont entièrement nouveaux, et que tout le reste du texte a été refondu et réorganisé.

L'importance des développements a conduit à présenter l'ouvrage en deux tomes. Le premier, *Fondements*, donne toutes les propriétés de base des programmes linéaires et les algorithmes généraux, ainsi que leurs interprétations économique et géométrique : théorème fondamental de la programmation linéaire, algorithme primal du simplexe, dualité, algorithmes dual, primal-dual, composites, traitement des variables bornées, techniques pratiques de calcul (réinversion), post-optimisation et paramétrage, application de la méthode du simplexe au problème de transport. Le second, *Extensions*, traite essentiellement des classes particulières de problèmes fréquemment rencontrés dans la pratique : grands problèmes à structures spéciales (algorithme de décomposition de Dantzig et Wolfe et algorithme des variables bornées généralisé), problèmes de flots et de transport dans les réseaux (résultats de Ford et Fulkerson), programmes partiellement (programmes mixtes) ou totalement en variables « entières » et leurs diverses méthodes de calcul, problèmes non linéaires dérivés de la programmation linéaire. L'ouvrage comprend également un chapitre relatif aux codes utilisés sur calculateurs, ainsi que trois appendices sur l'algèbre matricielle, les polyèdres convexes et les graphes.

Le but visé est essentiellement de donner aux utilisateurs, notamment aux économistes et aux ingénieurs, la description des *méthodes pratiques* de résolution des problèmes concrets, ce qui explique l'accent mis sur les procédures de calcul ou algorithmes.

Néanmoins, tous les développements théoriques nécessaires pour une justification rigoureuse des méthodes de calcul ont été inclus, faisant de ce livre un *ouvrage de référence* pour les spécialistes, en même temps qu'un *manuel* à l'usage des professeurs et des étudiants.

La matière du livre a été fournie en grande partie par les nombreuses publications qui ont jalonné, depuis 1949, le développement de la programmation linéaire et de ses applications. Les paragraphes qui précèdent, en énonçant les principales étapes de ce développement, donnent les noms des auteurs dont les travaux ont été les plus marquants, et au premier rang desquels il faut évidemment placer G. B. Dantzig ; le lecteur pourra aussi se reporter à l'abondante bibliographie placée en fin d'ouvrage et, spécialement, aux documents cités en référence dans le texte même.

C'est en suivant l'enseignement du professeur G. F. Hadley, en 1958, au Massachusetts Institute of Technology que l'auteur eut l'idée d'écrire ce livre. La SEMA lui procura, à son retour en France, l'environnement intellectuel favorable à la réalisation du projet, qui reçut les encouragements de J. Lesourne, R. Fortet, B. Roy et bien d'autres, auxquels l'auteur exprime ici sa plus vive gratitude.

La publication aux Etats-Unis, en 1966, donna à l'auteur une première occasion de revoir et d'améliorer l'ensemble du texte original et, notamment, de refondre complètement les chapitres 12 à 15.

Enfin et surtout, Xavier Choutet, spécialiste des développements récents et de l'utilisation de la programmation linéaire, a contribué de façon très importante à cette deuxième édition en français, par les chapitres 10, 11, 18 et 19, ainsi que par des parties de plusieurs autres, notamment 7, 9 et 16. Il a ainsi permis de faire de cette nouvelle version un ouvrage très complet, sans équivalent au moment de sa parution.

SOMMAIRE DU TOME 2

LISTE DES SYMBOLES ET NOTATIONS

Symboles :

$>$: supérieur à ; $\geqslant$: supérieur ou égal à ;
$\in$: appartient à ; $\notin$: n'appartient pas à ;
$\sum$: somme de (ex. : $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$) ;
$\prod$: produit de (ex. : $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1\, a_2 \ldots a_n$) ;
$\{ a, b, \ldots, k \}$: ensemble des éléments $a, b, \ldots, k$;
$\{ a \mid (p) \}$: ensemble des éléments a vérifiant la propriété (p) ;
$\{ a_i ; i \in E \}$: ensemble des éléments a_i dont les indices appartiennent à E ;
$\cap$: intersection de (ensemble des éléments communs à) ;
$\cup$: réunion de (ensemble des éléments, communs ou non, de) ;
$\subset$: contenu dans ;
$\varnothing$: ensemble vide ;
$\Rightarrow$: entraîne ;
$*$: symbole de transposition (d'une matrice ou d'un vecteur) ;
$\succ$: lexicographiquement supérieur à ; $\succcurlyeq$: lexicographiquement supérieur ou égal à ;
$| \mathbf{A} |$: déterminant de la matrice $\mathbf{A}$;
$n\,!$: factorielle n, soit $1 \times 2 \times \cdots \times n$;
C_n^m : nombre de combinaisons de n éléments m à m, soit $n\,!/m\,!(n - m)\,!$;
l-problème : problème lexicographique ; l-minimum : minimum lexicographique ;
C^+ : cône polaire de C ;

Notations :

Les lettres majuscules italiques désignent (sauf rares exceptions) des *ensembles* (ex.: M, N, I, J, P, U, E, T).

Les lettres majuscules grasses désignent des *matrices* (ex. : $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{L}_j$, $\mathbf{A}_j$).

Les lettres minuscules grasses désignent des *vecteurs* (ex.: $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}_j$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{a}_j$, $\boldsymbol{\alpha}_i$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{p}_j$).

Les lettres minuscules italiques désignent des *scalaires* (ex. : a_{ij}, x_j, d_i, c_j, z, z_j, u_i, p_{ij}, k_{ij}), et aussi des *points* (sommets de graphes) dans les chapitres 12 à 15 (ex. : p_i).

Pour la commodité de l'écriture, les vecteurs sont presque toujours écrits *en ligne* ; le contexte (ou, lorsqu'il y a risque d'ambiguïté, l'astérisque de transposition) indique clairement s'il s'agit, en fait, d'un vecteur-ligne ou d'un vecteur-colonne.

Une matrice étant désignée par une majuscule grasse, ses colonnes sont désignées par la même lettre minuscule grasse, et ses lignes généralement par la lettre grecque correspondante minuscule grasse ;
ex. : matrice **A**, de colonnes $\mathbf{a}_j$ et de lignes $\boldsymbol{\alpha}_i$.

Les notations suivantes sont valables dans tout l'ouvrage :
$\mathbf{e}_i$: i-ième vecteur-unité ou unitaire,
$\mathbf{I}^{(m)}$: matrice-unité d'ordre m,
R^n : espace vectoriel (euclidien) à n dimensions.

Les notations suivantes sont utilisées dans les chapitres 1 à 11 et 16 à 19 :
I : ensemble des indices des vecteurs (ou variables) de base,
J : ensemble des indices des vecteurs (ou variables) hors base,
s : indice courant d'une variable de base,
j : indice courant d'une variable hors base,
i : indice courant d'une contrainte (au départ),
A : matrice des coefficients des variables (au départ),
d : vecteur des coefficients du second membre du primal,
c : vecteur des coefficients de la fonction économique primale,
x : vecteur-variable primal,
u : vecteur-variable dual,
$\mathbf{y}_j$: vecteur des coefficients de x_j dans les contraintes après élimination des variables de base,
$z_j - c_j$: coefficient de x_j dans la fonction économique après élimination des variables de base.

Les notations suivantes sont utilisées dans les chapitres 12 à 15 :
I, J : sous-ensembles de sommets du réseau,
P : ensemble des sommets du réseau,
U : ensemble des arcs du réseau,
V : ensemble des routes du réseau,
p_i : sommet du réseau,
(p_i, p_j) : arc du réseau,
$[p_i, p_j]$: route du réseau,
c_{ij} (ou l_{ij}) : « pénalité » dans l'arc (i, j),
k_{ij} : capacité de l'arc (i, j),
r_{ij} : capacité résiduelle de l'arc (i, j),
$f(p_i, p_j)$: flot algébrique dans la route $[i, j]$,
x_{ij} ou $x(p_i, p_j)$: flot (arithmétique) dans l'arc (i, j),
(A, B) : ensemble des arcs ayant leur origine dans A et leur extrémité dans B.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 3

ALGORITHME (PRIMAL) DU SIMPLEXE, II, programme initial, convergence.

CHAPITRE 4

COMPLÉMENTS SUR LES TECHNIQUES DE CALCUL.