

Л. Н. БОЛЬШЕВ, Н. В. СМИРНОВ

ТАБЛИЦЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
СТАТИСТИКИ

А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ *им. В. А. СТЕКЛОВА*

Л. Н. БОЛЬШЕВ и Н. В. СМИРНОВ

ТАБЛИЦЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА 1965

УДК 519.24(083.3)

Логин Николаевич Большев, Николай Васильевич Смирнов

Таблицы математической статистики

Утверждено к печати

Математическим Институтом им. В. А. Стеклова АН СССР

Редактор издательства Г. Г. Гуськова

Технический редактор В. Г. Лаут

Сдано в набор 7/VIII 1964 г. Подписано к печати 5/III 1965 г. Формат 84×108¹/₁₆.

Печ. л 29,0=47,56 усл. л. Уч.-изд. л. 47,2. Тираж 6500. Т-01899

Изд. № 3118/64. Тип. зак. № 1105. Темплан 1964 г. № 447

Цена 3 р. 50 к.

Издательство «НАУКА»

Москва, К-62, Подсосенский пер., 21

2 я типография издательства «НАУКА»

Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр поясни- тельной части	Стр таблиц
<i>Предисловие</i>	7	—
I Нормальное распределение	9	173
Таблица 1.1. Функция нормального распределения	9	174
Таблица 1.2. Плотность нормального распределения и ее пять производных	11	181
Таблица 1.3. Функция, обратная функции нормального распределения	17	198
Таблица 1.4. Отношение Милла	18	200
II Распределение χ^2	19	201
<i>Состав таблиц</i>	21	—
Таблица 2.1а. Интеграл вероятностей χ^2	21	202
Таблица 2.1б. Поправки для вычисления интеграла вероятностей χ^2	21	222
Таблица 2.2а. Процентные точки распределения χ^2	22	228
Таблица 2.2б. Поправки для вычисления процентных точек распределения χ^2	22	232
Таблица 2.3. Необходимый объем выборки для оценки квадратичного отклонения с заданной относительной погрешностью	22	234
<i>Интерполяция</i>	22	—
<i>Назначение таблиц распределения χ^2 и примеры их использования</i>	24	—
III Некоторые основные распределения, связанные с нормальным распределением	31	235
Таблицы 3.1. Функция распределения Стьюдента	31	—
<i>Состав таблиц</i>	32	—
Таблица 3.1а. Функция распределения Стьюдента	32	236
Таблица 3.1б. Поправки для вычисления функции распределения Стьюдента	32	239
<i>Интерполяция</i>	33	—
Таблицы 3.2. Процентные точки распределения Стьюдента	34	240
<i>Назначение таблиц и примеры их использования</i>	35	—
Таблицы 3.3. Функция В-распределения	38	—
<i>Состав таблиц</i>	40	—
Таблица 3.3а. В-распределение, функции $\varphi_1(u, v)$ и $\varphi_2(u, v)$	40	241
Таблица 3.3б. В-распределение, функция $\gamma(u, a)$	40	243
<i>Примеры</i>	41	—
Таблицы 3.4. Квантили В-распределения	42	244
<i>Состав таблиц. Интерполяция и экстраполяция</i>	44	—
Таблицы 3.5. Процентные точки F-распределения	46	262
<i>Состав таблиц. Интерполяция и экстраполяция</i>	48	—
<i>Назначение таблиц и их применения</i>	50	—
Таблицы 3.6. Функция распределения медианы в выборке из нормальной совокуп- ности.	53	—
<i>Состав таблиц. Интерполяция</i>	55	—

	Стр. поясни- тельной части	Стр. таблиц
Таблица 3.6а. Функция распределения медианы в выборке из нормальной совокупности. Поправки к нормальной аппроксимации $R_n(x) = P_n(x) - \Phi(x)$.	55	278
Таблица 3.6б. Функция распределения медианы в выборке из нормальной совокупности. Поправки к нормальной аппроксимации $r(x, t) = P_n(x) - \Phi(x)$.	56	280
Таблица 3.7. Процентные точки медианы в выборке из нормальной совокупности . . .	57	281
Таблицы 3.8. Распределение размаха выборки из нормальной совокупности	58	—
<i>Состав таблиц. Интерполяция</i>	59	—
Таблица 3.8а. Функция распределения размаха выборки из нормальной совокупности	59	282
Таблица 3.8б. Процентные точки размаха выборки из нормальной совокупности	59	288
Таблица 3.8в. Моменты размаха выборки из нормальной совокупности с параметрами (0, 1)	59	288
<i>Назначение таблиц и примеры их использования</i>	60	—
Таблицы 3.9. Критерий дисперсионного отношения, основанный на размахах . . .	62	—
Таблица 3.9а. Верхние критические значения для отношения размахов в двух выборках из нормальных совокупностей	62	289
Таблица 3.9б. Функция мощности критерия, основанного на отношении размахов	62	293
Таблицы 3.10. Модифицированный t -критерий	63	294
IV. Статистические оценки и критерии, связанные с нормальным распределением .	64	295
Таблицы 4.1. Точечные и интервальные оценки квадратичного отклонения нормальной совокупности	64	—
Таблица 4.1а. Моменты отношения s/σ	66	296
Таблица 4.1б. Наилучшие линейные оценки квадратичного отклонения	66	296
Таблица 4.1в. Множители для определения доверительных пределов квадратичного отклонения σ	66	297
Таблица 4.1г. Моменты отношения $\frac{m}{\sigma} = \frac{1}{n\sigma} \sum_{i=1}^n \xi_i - \bar{\xi} $	67	298
Таблица 4.1д. Квантили распределения арифметического среднего абсолютных отклонений $\frac{m}{\sigma} = \frac{1}{n\sigma} \sum_{i=1}^n \xi_i - \bar{\xi} $	67	298
Таблица 4.2. Множители для построения толерантных пределов в случае нормального распределения	67	299
Таблицы 4.3. Критерий равенства дисперсий	69	—
Таблица 4.3а. Критерий Бартлетта	70	301
Таблица 4.3б. Критерий Кочрена	72	304
Таблица 4.4. Критерий сравнения средних значений в двух нормальных совокупностях.	74	306
Таблицы 4.5. Нормальная корреляция	75	—
Таблица 4.5а. Процентные точки выборочного коэффициента корреляции r , когда $\rho = 0$	78	310
Таблица 4.5б. Преобразование Фишера $z = \arg \text{th } r$	79	311
Таблица 4.5в. Доверительные пределы для коэффициента корреляции ρ	79	312
Таблицы 4.6. Доверительные зоны для линии регрессии	81	—
Таблица 4.6а. Доверительные зоны для линии регрессии. Критические значения $u_v(\rho, \lambda)$	83	314
Таблица 4.6б. Доверительные зоны для линии регрессии. Критические значения $v_v(\rho, \lambda)$	83	317

	Стр. поясни- тельной части	Стр таблиц
Таблицы 4.7. Критерии отклонения распределения от нормального	85	—
Таблица 4.7а. Процентные точки распределения статистики $d = \sum \xi_i - \bar{\xi} /ns^*$	86	320
Таблица 4.7б. Процентные точки распределения выборочного коэффициента асимметрии g_1	87	320
Таблица 4.7в. Процентные точки распределения выборочной характеристики экспесса b_2	87	321
Таблицы 4.8. Критерии исключения резко выделяющихся наблюдений	89	—
Таблица 4.8а. Критерии исключения резко выделяющихся наблюдений. Процентные точки наибольшего нормированного отклонения $\xi^+(a, \sigma) = (\eta_n - a)/\sigma$	92	322
Таблица 4.8б. Процентные точки наибольшего нормированного отклонения $\xi^+(\eta, \sigma) = (\eta_n - \eta)/\sigma$	92	323
Таблица 4.8в. Процентные точки наибольшего по абсолютной величине нормированного выборочного отклонения $\zeta(\eta, s^*) = \max_i \eta_i - \eta /s^*$	93	324
Таблица 4.8г. Процентные точки наибольшего нормированного отклонения $\zeta^+(\eta, s_v) = (\eta_n - \eta)/s_v$ (s_v^2 не зависит от $\eta_n - \eta$ и представляет собой несмещенную оценку для σ^2 с v степенями свободы)	93	325
Таблица 4.8д. Процентные точки отношений $\frac{\eta_n - \eta_{n-1}}{\eta_n - \eta_1}$, $\frac{\eta_n - \eta_{n-1}}{\eta_n - \eta_2}$ и $\frac{\eta_n - \eta_{n-2}}{\eta_n - \eta_1}$	93	328
Таблица 4.9. Критерий Аббе	95	329
Таблица 4.10. Функция мощности критерия χ^2 (нецентральное χ^2 -распределение)	97	330
Таблица 4.11. Функция мощности критерия Стьюдента (нецентральное t -распределение).	98	332
Таблица 4.12. Функция мощности F -критерия (нецентральное F -распределение)	99	333
Таблица 4.13. Графики для определения типа кривой К. Пирсона в зависимости от величин β_1 и β_2	101	340
Таблица 4.14. Квантили нормированных случайных величин, подчиняющихся распределениям К. Пирсона	103	344
V. Некоторые дискретные распределения	104	345
Таблица 5.1. Биномиальное распределение	104	346
Таблица 5.2. Доверительные пределы для параметра p биномиального распределения	107	348
Таблица 5.3. Распределение Пуассона	110	360
Таблицы 5.4. Доверительные пределы для параметра распределения Пуассона	111	—
Таблица 5.4а. Доверительные пределы для параметра распределения Пуассона	111	368
Таблица 5.4б. Доверительные пределы для параметра распределения Пуассона (поправки к приближенным формулам для λ_1 и λ_2 при $\xi > 50$)	111	369
Таблица 5.5. Доверительные пределы для отношения параметров двух распределений Пуассона	112	370
Таблица 5.6. Доверительные пределы для параметра гипергеометрического распределения, критерий значимости для таблиц сопряженности признаков 2×2 , критерий сравнения вероятностей	114	376
Процентные точки гипергеометрического распределения	117	—
Доверительные пределы для параметра M	117	—
Описание таблицы	118	—
Назначение таблицы и примеры ее применений	119	—
Приближенные критерии в случае больших выборок	122	—
«Отрицательное» гипергеометрическое распределение	124	—

	Стр поясни тельной части	Стр таблиц
VI. Таблицы непараметрической статистики.	125	407
<i>Критерии, основанные на разностях функций эмпирического и теоретического распределений.</i>	125	—
Критерии Колмогорова и Смирнова	126	—
Критерии Реньи	128	—
Критерии ω^2	130	—
Критерии однородности двух выборок	131	—
Критерии однородности двух выборок (продолжение)	135	—
Таблица 6.1. Функция распределения Колмогорова	136	408
Таблица 6.2. Критические значения для наибольшего отклонения эмпирического распределения от теоретического (критерий Колмогорова)	136	409
Таблица 6.3. Функция распределения Реньи	137	410
Таблица 6.4а. Критерий ω^2 . Функция распределения $a_1(x)$	137	410
Таблица 6.4б. Критерий ω^2 . Функция распределения $a_2(x)$	138	411
Таблица 6.5а. Критерий однородности двух выборок (критерий Смирнова)	138	412
Таблица 6.5б. Критерий однородности двух выборок. Значения функций b и b^*	140	414
<i>Критерии, основанные на простейших функциях от порядковых статистик</i>	140	—
Таблица 6.6. Критерий знаков. Доверительные пределы для медианы	140	415
Таблица 6.7. Критические значения для количества серий	143	416
Таблица 6.8. Критические значения статистики W критерия Вилкоксона	147	419
Таблица 6.9а. Критические значения статистики X критерия Ван дер Вардена	149	423
Таблица 6.9б. Вспомогательная таблица для вычисления дисперсии статистики X критерия Ван дер Вардена	151	424
<i>Другие ранговые критерии</i>	151	—
Таблицы 6.10. Ранговая корреляция	152	—
Таблица 6.10а. Распределение коэффициента ранговой корреляции ρ Спирмена.	153	425
Таблица 6.10б. Распределение коэффициента ранговой корреляции τ Кендалла	154	425
Таблица 6.10в. Распределение коэффициента согласованности W	154	426
VII. Вспомогательные таблицы	156	427
Таблица 7.1а. Равномерно распределенные случайные числа	156	428
Таблица 7.1б. Нормально распределенные случайные числа	156	433
Таблица 7.2. Ортогональные многочлены Чебышева	157	438
Таблица 7.3. Степени целых чисел	159	448
Таблица 7.4. Суммы степеней чисел натурального ряда	160	450
Таблица 7.5. Квадраты целых чисел	160	452
Таблица 7.6. Факториалы, десятичные логарифмы факториалов, квадратные корни и обратные величины	161	454
Таблицы 7.7. Г-функция, ее десятичный логарифм и некоторые вспомогательные функции	161	460
Таблица 7.8. Натуральные логарифмы	162	462
Таблица 7.9. Постоянные	164	464
<i>Литература</i>	165	—

ПРЕДИСЛОВИЕ

Из года в год наблюдается все усиливающийся интерес к математико-статистическим методам со стороны представителей почти всех опытных наук и технических дисциплин, а также со стороны работников производства, медицины, сельского хозяйства и т. д. Эти лица большей частью нуждаются в указании рационального способа обработки имеющихся у них результатов наблюдений или специальных экспериментов для получения по возможности надежных и обоснованных заключений на основе информации, доставляемой опытом. Но как раз эта конечная цель статистической обработки, принимаемой ради решения определенных познавательных задач или руководства последующей деятельностью, требует применения вероятностных оценок, делающих выводы, сопоставления или прогнозы оправданными и надежными в той мере, в какой это вообще возможно в данной ситуации. Этот заключительный и наиболее ответственный момент приложения статистических методов технически должен быть, как правило, обслужен надлежащими таблицами функций распределения используемых статистических критериев.

Необходимость специальных таблиц для полноценной методики статистических выводов была осознана уже давно, и в настоящее время работа над созданием весьма разнотипных по своему составу таблиц математической статистики ведется довольно широко. Наибольшей популярностью в международной статистической практике пользуется сборник ¹, оразивший, с одной стороны, основные достижения английской школы Р. Фишера, и с другой — школы Неймана — Пирсона. Эти таблицы взяты за основу при составлении настоящего сборника. Был использован ряд таблиц, опубликованных в различных математических журналах и книгах; соответствующие литературные ссылки даны в описании каждой таблицы, обнаруженные ошибки исправлены. Приблизительно четвертая часть всех таблиц различных функций (их в сборнике около 100), необходимых для приложения вероятностных и статистических методов, вычислена целиком или частично в Математическом институте АН СССР и публикуется впервые.

Каждой таблице предпослано специальное описание. В разделах I — III сосредоточены таблицы, наиболее часто встречающиеся в статистической практике (таблицы нормального распределения, χ^2 -распределения, Стюдента и т. д.). В подробных описаниях таблиц этих разделов рассмотрены различные примеры их статистических

¹ Pearson E. S. and Hartley H. O. Biometrika tables for statisticians, v. I. Cambridge University Press, 1954.

приложений и приемы интерполирования. Остальные таблицы разделов IV — VI имеют более специальное назначение и снабжены поэтому лишь краткими замечаниями.

Предполагается, что читатель владеет основными понятиями теории вероятностей и математической статистики. Введение к таблицам не может заменить изложение соответствующих вопросов в том или ином учебнике: оно предназначено лишь для ориентировки читателя в способах применения таблиц для решения наиболее типичных задач статистической практики. С целью осуществления возможности вычисления значений табулированных функций во всей естественной области их определения некоторые из имевшихся ранее таблиц расширены, что в ряде случаев потребовало уточнения асимптотических формул и разработки специальных приемов интерполяции и экстраполяции.

Таким образом, по сравнению с указанным выше сборником Пирсона и Хартли, предлагаемый сборник содержит не только более обширный по своему составу, но и в ряде случаев более полный (в смысле охвата естественной области определения) комплекс табулированных функций. Там, где это представилось возможным, наряду с функциями распределений приводятся таблицы соответствующих процентных точек или квантилей. Значения некоторых функций даны с количеством десятичных знаков, иногда превышающим запросы обычных статистических приложений. Это сделано в расчете на решение других задач, возникающих в математической статистике и требующих повышенной точности. Например, вычисление критических значений для резко выделяющихся наблюдений требует знания квантилей распределения Стюдента с несколькими запасными десятичными знаками. Точно так же квантили В-распределения можно оценить по квантилям Г-распределения, вычисленным с большой точностью (см. описания таблиц 3.4 и 4.8в).

Таблицы занумерованы двойной нумерацией. Первое число указывает номер раздела, а второе — номер таблицы этого раздела. В пределах каждого раздела во введении формулы имеют самостоятельную нумерацию с помощью лишь одного числа. В ссылках на формулы других разделов принята двойная нумерация; например, (3.2) означает формулу (2) из раздела III. Способ интерполяции указывается, как правило, для каждой таблицы отдельно, чтобы по возможности свести к минимуму ссылки на описание других таблиц.

Ссылки на литературу даются числами, заключенными в квадратные скобки. Каждое число указывает номер статьи или книги в списке литературы, приложенном к таблицам. В ссылках на таблицы перед числом поставлена буква Т (например, [Т5]).

П р и н я т ы е о б о з н а ч е н и я. В тех случаях, где это представлялось возможным, случайные величины обозначались *греческими буквами*, остальные величины — *латинскими*. Иногда в *разных* по содержанию таблицах можно встретить *одинаковые* обозначения для *разных* величин (например, W — статистика критерия Вилкоксона, W — количество серий и W — выборочный размах). Однако в пределах каждой таблицы одинаковых обозначений нет.

$P\{A\}$ — вероятность события A ,

$M\xi$ — математическое ожидание случайной величины ξ ,

$D\xi$ — дисперсия случайной величины ξ .

В работе по вычислению таблиц, по подготовке рукописи к печати принимали участие сотрудники отдела математической статистики МИ АН СССР: Б. И. Девятов, Е. С. Кедрова, В. Ф. Котельникова, Н. К. Печенкова, М. А. Рыбинская.

I. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Т а б л и ц а 1.1. Функция нормального распределения

Распределение случайной величины ξ называется нормальным, если соответствующая ей функция распределения выражается формулой

$$P\{\xi < x\} = N(x; a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt, \quad (1)$$

в которой x может принимать все действительные значения и где a и σ — параметры распределения ($|a| < \infty$, $\sigma > 0$). Функция нормального распределения $N(x; a, \sigma)$ удовлетворяет равенству

$$N(x; a, \sigma) = N\left(\frac{x-a}{\sigma}; 0, 1\right), \quad (2)$$

поэтому для вычисления ее значений достаточно иметь таблицу функции $N(x; 0, 1)$ (далее условимся для краткости обозначать $N(x; 0, 1) = \Phi(x)$). Таким образом,

$$\Phi(x) = N(x; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt. \quad (3)$$

Формулой (3) функция $\Phi(x)$ определяется при всех действительных x и представляет собой непрерывную, монотонно возрастающую функцию, изменяющуюся от 0 до 1 (график функции $\Phi(x)$ изображен на рис. 1); легко можно убедиться в справедливости формул

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x) - \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 2\Phi(x) - 1.$$

Так как при всех действительных значениях x имеет место тождество

$$\Phi(x) + \Phi(-x) \equiv 1, \quad (4)$$

то для вычисления интеграла (3) достаточно иметь таблицы функции $\Phi(x)$ лишь для $x \geq 0$.

В таблице 1.1 указаны значения функции $\Phi(x)$ с шестью значащими цифрами для $x = 0,000$ (0,001) 3,000 и с пятью значащими цифрами для $x = 3,00$ (0,01) 5,00 (в данном случае значащими называются все разряды десятичной дроби, начиная с первого,

отличного от девятки; например, если $\Phi(x) = 0,99976737$, то значащими цифрами будут 76737). Каждая табличная строка представляет собой таблицу функции $\Phi(x)$, в которой последний десятичный знак аргумента x меняется от 0 до 9, причем в столбцах с первого по девятый указаны лишь последние цифры значений $\Phi(x)$, отличные от

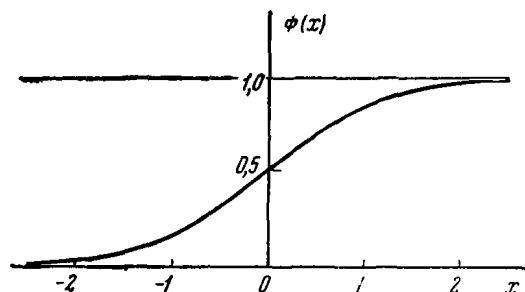


Рис. 1

цифр в «нулевом» столбце (табличные значения функции $\Phi(x)$, у которых несколько первых цифр одинаковы, выделены «зонами»).

Пусть, например, требуется определить $\Phi(0,055)$ и $\Phi(3,73)$. На пересечении строки «с номером» 0,05 и столбца «с номером» 5 расположено число 1931; это число находится в той «зоне», где первые две цифры в «нулевом» столбце есть 52, поэтому окончательно $\Phi(0,055) = 0,521931$. Во втором случае на пересече-

нии строки «с номером» 3,7 и столбца «с номером» 3 находим число 04260; так как первые цифры в соответствующей «зоне» есть 9^4 (т. е. 9999), то $\Phi(3,73) = 0,999904260$.

При $x \leq 3$ таблица 1.1 допускает линейную интерполяцию, а при $x > 3$ — квадратичную¹ (соответственно на шесть и на пять значащих цифр). Пусть, например, требуется определить $\Phi(\pi/2)$ и $\Phi(\pi)$. Так как $1,570 < \pi/2 < 1,571$, $3,14 < \pi < 3,15$ и по таблице 1.1

$$\begin{aligned} \Phi(1,570) &= 0,94\ 17924, & \Phi(1,571) &= 0,94\ 19087, \\ \Phi(3,14) &= 0,9^3\ 15526, & \Phi(3,15) &= 0,9^3\ 18365, & \Phi(3,16) &= 0,9^3\ 21115, \end{aligned}$$

то, сохраняя только значащие цифры, получаем:

$$\Delta\Phi(1,570) = 1163, \quad \Delta\Phi(3,14) = 2839, \quad \Delta^2\Phi(3,14) = -89,$$

где $\Delta\Phi$ и $\Delta^2\Phi$ — первая и вторая разности функции $\Phi(x)$, вычисляемые для равноотстоящих значений аргумента x_0 , x_1 и x_2 по формулам

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(x_0) &= \Phi(x_1) - \Phi(x_0), \\ \Delta^2\Phi(x_0) &= \Delta\Phi(x_1) - \Delta\Phi(x_0) = \Phi(x_2) - 2\Phi(x_1) + \Phi(x_0). \end{aligned}$$

Согласно интерполяционной формуле Ньютона имеем (квадратичная интерполяция):

$$\Phi(x) = \Phi(x_0) + u \cdot \Delta\Phi(x_0) - \frac{u(1-u)}{2} \Delta^2\Phi(x_0),$$

где $x_0 \leq x < x_1$, $u = (x - x_0)/h$ — фаза интерполяции и h — табличный шаг аргумента, т. е. $h = x_1 - x_0$. В обоих случаях первые разности $\Delta\Phi$ имеют четыре значащих цифры, поэтому фазу интерполяции u следует вычислить не менее чем с четырьмя верными знаками: в первом случае $u = 0,7963$, а во втором $u = 0,1593$ и $u(1-u)/2 = 0,067$.

¹ Для интерполяции в пределах шести десятичных знаков можно воспользоваться формулой $\Phi(x) = \Phi(x_0) + (x - x_0) \Phi'(x_0)$, где x_0 — ближайшее к x табличное значение аргумента и $\Phi'(x) = d\Phi(x)/dx$ (значения производной $\Phi'(x)$ даны в таблице 1.2).

Таким образом, с погрешностью, не превышающей единицы последнего десятичного знака, находим:

$$\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 10^{-7} (9417924 + 0,7963 \cdot 1163) = 0,9418850,$$

$$\Phi(\pi) = 10^{-8} [99915526 + 0,1593 \cdot 2839 - 0,067 (-89)] = 0,99915984.$$

Для вычисления функции $\Phi(x)$ при $x > 5$ можно воспользоваться асимптотическим рядом:

$$\Phi(x) = 1 - \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1 \cdot 3}{x^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{x^6} + \dots \right).$$

Таблица 1.1 составлена по пятнадцатизначным таблицам [Т 36]. Более подробные сведения о функции нормального распределения можно найти в учебниках [38, 68, 115, 128, 137].

Т а б л и ц а 1.2. Плотность нормального распределения и ее пять производных

Плотность нормального распределения с параметрами (a, σ) представляет собой первую производную по x от функции нормального распределения $N(x; a, \sigma)$:

$$n(x; a, \sigma) = \frac{\partial}{\partial x} N(x; a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2};$$

в частности,

$$n(x; 0, 1) = \frac{d}{dx} N(x; 0, 1) = \frac{d\Phi}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Поэтому

$$n(x; a, \sigma) = \frac{1}{\sigma} n\left(\frac{x-a}{\sigma}; 0, 1\right),$$

значит, для вычисления значений плотности нормального распределения достаточно иметь таблицу функции $n(x; 0, 1)$ (далее условимся для краткости обозначать $n(x; 0, 1) = \varphi(x)$). Таким образом, при всех действительных значениях x функция $\varphi(x)$ определяется формулой

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

График $\varphi(x)$ изображен на рис. 2.

Легко можно убедиться, что любая производная плотности $\varphi(x)$ представима в виде произведения некоторого многочлена на плотность $\varphi(x)$:

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{d^n \varphi(x)}{dx^n} = (-1)^n H_n(x) \varphi(x)$$

($H_n(x)$ называют многочленами Чебышева — Эрмита). Например,

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}(x) &= -x\varphi(x), \\ \varphi^{(2)}(x) &= (x^2 - 1)\varphi(x), \\ \varphi^{(3)}(x) &= -(x^3 - 3x)\varphi(x), \\ \varphi^{(4)}(x) &= (x^4 - 6x^2 + 3)\varphi(x), \\ \varphi^{(5)}(x) &= -(x^5 - 10x^3 + 15x)\varphi(x) \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Многочлены $H_n(x)$ и производные $\varphi^{(n)}(x)$ при $n \geq 1$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\left. \begin{aligned} H_{n+1}(x) - xH_n(x) + nH_{n-1}(x) &= 0, \\ \varphi^{(n+1)}(x) + x\varphi^{(n)}(x) + n\varphi^{(n-1)}(x) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где при $n = 1$ следует положить $\varphi^{(0)}(x) \equiv \varphi(x)$ и $H_0(x) \equiv 1$.

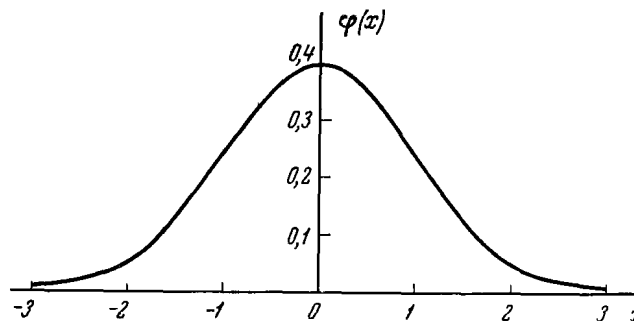


Рис. 2

В таблице 1.2 даны значения плотности $\varphi(x)$ и ее первых пяти производных с шестью десятичными знаками для

$$x = 0,000 \ (0,004) \ 3,00 \ (0,02) \ 4,00 \ (0,04) \ 5,0 \ (0,1) \ 6,0$$

(эта таблица заимствована из сборника [Т 42]).

Так как производные четного порядка $\varphi^{(2m)}(x)$ — четные функции, а производные нечетного порядка $\varphi^{(2m+1)}(x)$ — нечетные функции аргумента x , то для отыскания значений $\varphi^{(n)}(x)$ при отрицательных x следует пользоваться формулой

$$\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n \varphi^{(n)}(-x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Для интерполяции табличных значений на шесть десятичных знаков рекомендует ся применять формулу Тейлора:

$$\varphi^{(n)}(x) = \varphi^{(n)}(x_0) + (x - x_0) \varphi^{(n+1)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} \varphi^{(n+2)}(x_0),$$

где x_0 — ближайшее к x табличное значение аргумента. При $n = 4$ или 5 результат интерполяции по формуле Тейлора зависит от производных шестого порядка и выше, которые не охватываются таблицей 1.2. Эти производные можно выразить через производные низших порядков с помощью второго рекуррентного соотношения (5). В результате получаются формулы

$$\begin{aligned} \varphi^{(4)}(x) &= \varphi^{(4)}(x_0) + (x - x_0) \varphi^{(5)}(x_0) - \frac{(x - x_0)^2}{2} [x_0 \varphi^{(5)}(x_0) + 5\varphi^{(4)}(x_0)], \\ \varphi^{(5)}(x) &= \varphi^{(5)}(x_0) - (x - x_0) [x_0 \varphi^{(5)}(x_0) + 5\varphi^{(4)}(x_0)] + \\ &+ \frac{(x - x_0)^2}{2} [(x_0^2 - 6) \varphi^{(5)}(x_0) + 5x_0 \varphi^{(4)}(x_0)]. \end{aligned}$$

Если в интерполяционной формуле пренебречь последним слагаемым, то результат будет иметь пять верных десятичных знаков.

Последовательность многочленов Чебышева — Эрмита $\{H_n(x)\}$ представляет

собой полную систему функций, ортогональных на всей действительной оси с весом $\varphi(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi^{(m)}(x) \varphi^{(n)}(x)}{\varphi(x)} dx = \begin{cases} n! & \text{при } m = n, \\ 0 & \text{при } m \neq n. \end{cases}$$

Всякой функции распределения $F(x)$, для которой существуют моменты всех порядков, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = 0 \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) = 1,$$

можно поставить в соответствие ряд

$$\Phi(x) - \varphi(x) \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{c_n}{n!} H_{n-1}(x) = \Phi(x) + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \varphi^{(n-1)}(x),$$

где

$$c_n = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) dF_1(x).$$

Если $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(x^2/4) dF(x) < \infty$, то этот ряд сходится к $F(x)$ во всех точках непрерывности функции $F(x)$; если же это условие не выполнено, то ряд может расходиться (см. [68], гл. 17).

«Однако в практических приложениях в большинстве случаев знание свойств сходимости нашего разложения не имеет большого значения. В действительности интересно знать, *дает ли небольшое число слагаемых* (обычно не более двух или трех) *достаточно хорошее приближение к функции распределения* $F(x)$? Если это имеет место, то нас не интересует больше вопрос, сходится или расходится наш бесконечный ряд. Более того, если мы знаем, что ряд сходится, то это не принесет практической пользы, если для того, чтобы получить частную сумму ряда, дающую достаточно хорошее приближение, необходимо вычислить большое число коэффициентов c_n » (Г. Крамер [68], стр. 249).

Указанный вопрос приобретает особое значение тогда, когда функция распределения $F(x; t)$ зависит от параметра t , причем $F(x; t) \rightarrow \Phi(x)$ при $t \rightarrow 0$. И хотя в большинстве практически важных случаев ряд, соответствующий $F(x; t)$, расходится, однако с помощью этого ряда обычно удается построить некоторый другой ряд, который может быть истолкован как асимптотическое разложение функции распределения $F(x; t)$ по степеням малого параметра t .

Пусть, например, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ — последовательность независимых и одинаково непрерывно распределенных случайных величин, у которых существуют все моменты. Положим $t = 1/\sqrt{n}$, и пусть $F(x; t)$ — функция распределения нормированной суммы

$$\eta_n = \frac{1}{\sqrt{nm_2}} \sum_{i=1}^n (\xi_i - a),$$

где $a = M\xi_1$, $m_2 = M(\xi_1 - a)^2$ и, вообще, $m_k = M(\xi_1 - a)^k$ для $k = 2, 3, \dots$. Согласно центральной предельной теореме случайная величина η_n распределена асимптотически нормально с параметрами

(0, 1), т. е. при $n \rightarrow \infty$ (или в наших обозначениях при $t \rightarrow 0$)

$$F(x; t) \rightarrow \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}u^2} du.$$

С помощью формального разложения в ряд, указанный выше, последнее соотношение можно уточнить. А именно, как показал Крамер (см. [67] и [68]), существует последовательность многочленов $\{P_k(x)\}$ такая, что

$$F(x; t) \sim \Phi(x) + \varphi(x) \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x) t^k,$$

причем, если $t \rightarrow 0$, то

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |F(x; t) - \Phi(x) - \varphi(x) \sum_{k=1}^n P_k(x) t^k| \leq C t^{n+1},$$

где C — некоторая абсолютная постоянная. Первые три слагаемых асимптотического ряда для $F(x; t)$ имеют вид

$$F(x; t) = \Phi(x) - \frac{m_3}{6m_2^{3/2}} \varphi^{(2)}(x) t + \left[\frac{m_3^2}{72m_2^3} \varphi^{(5)}(x) + \frac{m_4 - 3m_2^2}{24m_2^2} \varphi^{(3)}(x) \right] t^2 + O(t^3). \quad (6)$$

Аналогичная асимптотическая формула имеет место и для функции $G(p; t)$, обратной $F(x; t)$ по аргументу x (функция G определяется тождеством $F[G(p; t); t] \equiv p$ для $0 < p < 1$). Как показано в статье [9], существует последовательность многочленов $\{Q_k(x)\}$ такая, что

$$\Phi[G(p; t)] \sim p + \varphi[\Psi(p)] \sum_{k=1}^{\infty} Q_k[\Psi(p)] t^k,$$

где $\Psi(p)$ — функция, обратная $\Phi(x)$ (см. таблицы 1.3). Если $t \rightarrow 0$, то на любом фиксированном отрезке $[c, d]$, расположенном внутри интервала (0, 1),

$$\sup_{c < p < d} |G(p; t) - \Psi\{p + \varphi[\Psi(p)] \sum_{k=1}^n Q_k[\Psi(p)] t^k\}| \leq D t^{n+1},$$

где D зависит лишь от c и d . Первые три слагаемых асимптотического ряда для сложной функции $\Phi[G(p; t)]$ имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi[G(p; t)] &= p + \frac{m_3}{6m_2^{3/2}} \varphi^{(2)}(x) t + \\ &+ \left\{ \frac{m_3^2}{72m_2^3} [\varphi^{(5)}(x) + 12\varphi^{(3)}(x) + 12\varphi^{(1)}(x)] - \frac{m_4 - 3m_2^2}{24m_2^2} \varphi^{(3)}(x) \right\} t^2 + O(t^3), \end{aligned}$$

где $x = \Psi(p)$.

Практически для вычисления $G(p, t)$ при малых t удобнее пользоваться следствием этой асимптотической формулы (ряд Корниша — Фишера):

$$\varphi(x) [G(p; t) - x] = \frac{m_3}{6m_2^{3/2}} \varphi^{(2)}(x) t + \left\{ \frac{m_3^2}{36m_2^3} [2\varphi^{(3)}(x) + \varphi^{(1)}(x)] - \frac{m_4 - 3m_2^2}{24m_2^2} \varphi^{(3)}(x) \right\} t^2 + O(t^3). \quad (7)$$

Правые части формул (6) и (7) представляют собой линейные комбинации производных $\varphi^{(n)}(x)$ не выше пятого порядка, поэтому для вычисления приближенных значений функций $F(x; t)$ и $G(p; t)$ по этим формулам можно непосредственно воспользоваться таблицами 1.2 и 1.1.

Производные $\varphi^{(n)}(x)$ могут быть использованы также и для вычисления значений функции двумерного нормального распределения по формуле (см., например, [68])

$$\frac{1}{2\pi \sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a_1}{\sigma_1}} \int_{-\infty}^{\frac{y-a_2}{\sigma_2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2-2\rho uv+v^2)} dudv = \Phi\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right) \Phi\left(\frac{y-a_2}{\sigma_2}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right) \varphi^{(n)}\left(\frac{y-a_2}{\sigma_2}\right)}{(n+1)!} \rho^{n+1}. \quad (8)$$

Ряд в правой части (8) сходится в интервале $-1 < \rho < 1$.

Члены этого ряда можно выразить через так называемые «тетрахорические» функции $\tau_k(x)$, которые связаны с производными $\varphi^{(k-1)}(x)$ равенством $\tau_k(x) = (-1)^k \varphi^{(k-1)}(x) / \sqrt{k!}$. В [Т 38] даны семизначные таблицы функций $\tau_k(x)$ для $k = 1$ (1) 21.

Пример 1. Рассмотрим последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ взаимно независимых и одинаково нормально распределенных случайных величин с параметрами (0, 1). Пусть

$$\chi_n^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2.$$

Легко можно убедиться, что в данном случае

$$a = M\xi_1^2 = 1, \quad m_2 = M(\xi_1^2 - 1)^2 = 2, \quad m_3 = M(\xi_1^2 - 1)^3 = 8, \quad m_4 = M(\xi_1^2 - 1)^4 = 60,$$

поэтому согласно (6)

$$\begin{aligned} P\{\chi_n^2 < n + x\sqrt{2n}\} &\equiv F\left(x; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \Phi(x) - \frac{2}{3}\varphi^{(2)}(x)\frac{1}{\sqrt{2n}} + \\ &+ \left[\frac{2}{9}\varphi^{(5)}(x) + \varphi^{(3)}(x)\right]\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Положим в этой формуле $n = 72$ и вычислим приближенное значение вероятности $P\{\chi_{72}^2 < X\}$ при $X = 84,03$. Так как $X = n + x\sqrt{2n}$, то в данном случае $x = 1,0025$.

По таблице 1.1 линейной интерполяцией получаем:

$$\Phi(1,0025) = \Phi(1,002) + 0,5 \Delta\Phi(1,002) = 0,841828 + 0,5 \cdot 0,000242 = 0,841949.$$

Далее из таблицы 1.2 при $x - x_0 = 1,0025 - 1,004 = -0,0015$ линейной интерполяцией по формуле Тейлора находим:

$$\begin{aligned} \Phi(1,0025) &= 0,241003 + 0,0015 \cdot 0,2420 = 0,241366, \\ \varphi^{(1)}(1,0025) &= -0,241967 - 0,0015 \cdot 0,0019 = -0,241970, \\ \varphi^{(2)}(1,0025) &= 0,001932 - 0,0015 \cdot 0,4820 = 0,001209, \\ \varphi^{(3)}(1,0025) &= 0,481994 + 0,0015 \cdot 0,4897 = 0,482729, \\ \varphi^{(5)}(1,0025) &= -1,436300 - 0,0015(1,004 \cdot 1,4363 + 5 \cdot 0,4897) = -1,442136. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} P\{\chi_{72}^2 < 84,03\} &\approx 0,841949 - \frac{2}{3} \cdot 0,001209 \cdot \frac{1}{12} + \left(-\frac{2}{9} \cdot 1,442136 + 0,482729\right) \frac{1}{144} = \\ &= 0,841949 - 0,000067 + 0,001127 \approx 0,84301. \end{aligned}$$

По таблице 2.16 $P\{\chi_{72}^2 < 84,03\} = 0,84289$ (с абсолютной погрешностью не более 10^{-5}). Следовательно, вычисленное приближенное значение этой вероятности имеет относительную погрешность менее 0,08%.

Пример 2. Условия те же, что и в предыдущем примере. Требуется вычислить такие значения X' и X'' , для которых $P\{\chi_{72}^2 < X'\} = 0,025$ и $P\{\chi_{72}^2 < X''\} = 0,975$.

Согласно (7) имеем:

$$\Phi(x) \left[G\left(p; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - x \right] \approx \frac{1}{18} \varphi^{(2)}(x) - \frac{1}{1296} [\varphi^{(3)}(x) - 4\varphi^{(1)}(x)],$$

где (см. таблицу 1.3) следует положить $p = 0,025$ и $0,975$, $x = \Psi(p) = -1,959964$ и $+1,959964$ соответственно. Искомые величины X' и X'' связаны с заданными значениями вероятностей p соотношениями

$$X' = 72 + 12 \cdot G\left(0,025; \frac{1}{6\sqrt{2}}\right) \text{ и } X'' = 72 + 12 \cdot G\left(0,975; \frac{1}{6\sqrt{2}}\right).$$

В таблице 1.2 ближайшее к $x > 0$ табличное значение аргумента есть $x_0 = 1,960$, поэтому в данном случае $x - x_0 = -0,000036$. Как и в предыдущем примере, по формуле Тейлора получаем:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= 0,058441 + 0,000036 \cdot 0,115 = 0,058445 = \varphi(-x), \\ \varphi^{(1)}(x) &= -0,114544 - 0,000036 \cdot 0,166 = -0,114550 = -\varphi^{(1)}(-x), \\ \varphi^{(2)}(x) &= 0,166066 + 0,000036 \cdot 0,096 = 0,166069 = \varphi^{(2)}(-x), \\ \varphi^{(3)}(x) &= -0,096400 + 0,000036 \cdot 0,309 = -0,096389 = -\varphi^{(3)}(-x).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$G\left(0,025; \frac{1}{6\sqrt{2}}\right) \approx -1,797328 \text{ и } G\left(0,975; \frac{1}{6\sqrt{2}}\right) \approx 2,113048,$$

$$X' \approx 72 - 12 \cdot 1,797328 = 50,432 \text{ и } X'' \approx 72 + 12 \cdot 2,113048 = 97,357.$$

По таблице 2.2а $X' = 50,428$ и $X'' = 97,353$ (с абсолютной погрешностью не более 0,001). Таким образом, относительные ошибки вычисленных приближенных значений X' и X'' не превосходят 0,01%.

П р и м е р 3. Пусть (ξ_1, ξ_2) — двумерная, нормально распределенная случайная величина с параметрами

$$\begin{aligned}a_1 &= M\xi_1 = 0, \quad a_2 = M\xi_2 = 0, \quad \sigma_1^2 = D\xi_1 = 1, \quad \sigma_2^2 = D\xi_2 = 1, \\ \rho &= \frac{M[(\xi_1 - a_1)(\xi_2 - a_2)]}{\sigma_1\sigma_2} = M(\xi_1\xi_2) = 0,6,\end{aligned}$$

и пусть требуется вычислить вероятность одновременного осуществления событий: $\xi_1 < -1,1$ и $\xi_2 < -1,2$. Согласно (8) имеем:

$$\begin{aligned}P\{\xi_1 < -1,1; \xi_2 < -1,2\} &= \frac{1}{1,6\pi} \int_{-\infty}^{-1,1} \int_{-\infty}^{-1,2} e^{-\frac{u^2-1,2uv+v^2}{1,28}} dudv = \\ &= \Phi(-1,1)\Phi(-1,2) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(-1,1)\varphi^{(n)}(-1,2)}{(n+1)!} (0,6)^{n+1}.\end{aligned}$$

Так как $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ и $\varphi^{(n)}(-x) = (-1)^n \varphi^{(n)}(x)$, то искомая вероятность равна

$$[1 - \Phi(1,1)][1 - \Phi(1,2)] + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(1,1)\varphi^{(n)}(1,2)}{(n+1)!} (0,6)^{n+1}.$$

Если ограничиться частной суммой этого ряда, в которой n изменяется от 0 до 5, то по таблицам 1.1 и 1.2 можно будет вычислить приближенное значение искомой вероятности:

$$\begin{aligned}P\{\xi_1 < -1,1; \xi_2 < -1,2\} &\approx 0,13567 \cdot 0,11507 + \frac{0,21785 \cdot 0,19419}{1} 0,6 + \frac{0,23964 \cdot 0,23302}{2} (0,6)^2 + \\ &+ \frac{0,04575 \cdot 0,08544}{6} (0,6)^3 + \frac{0,4290 \cdot 0,3635}{24} (0,6)^4 + \frac{0,609 \cdot 0,693}{120} (0,6)^5 + \frac{1,05 \cdot 0,62}{720} (0,6)^6 = 0,05233.\end{aligned}$$

С точностью до единицы пятого знака точное значение искомой вероятности, вычисленное по таблицам [Т34], равно 0,05247. Следовательно, относительная ошибка в данном случае менее 0,3%.

Более подробные и обстоятельные сведения о применениях таблицы 1.2 можно найти в монографиях [52] и [68].