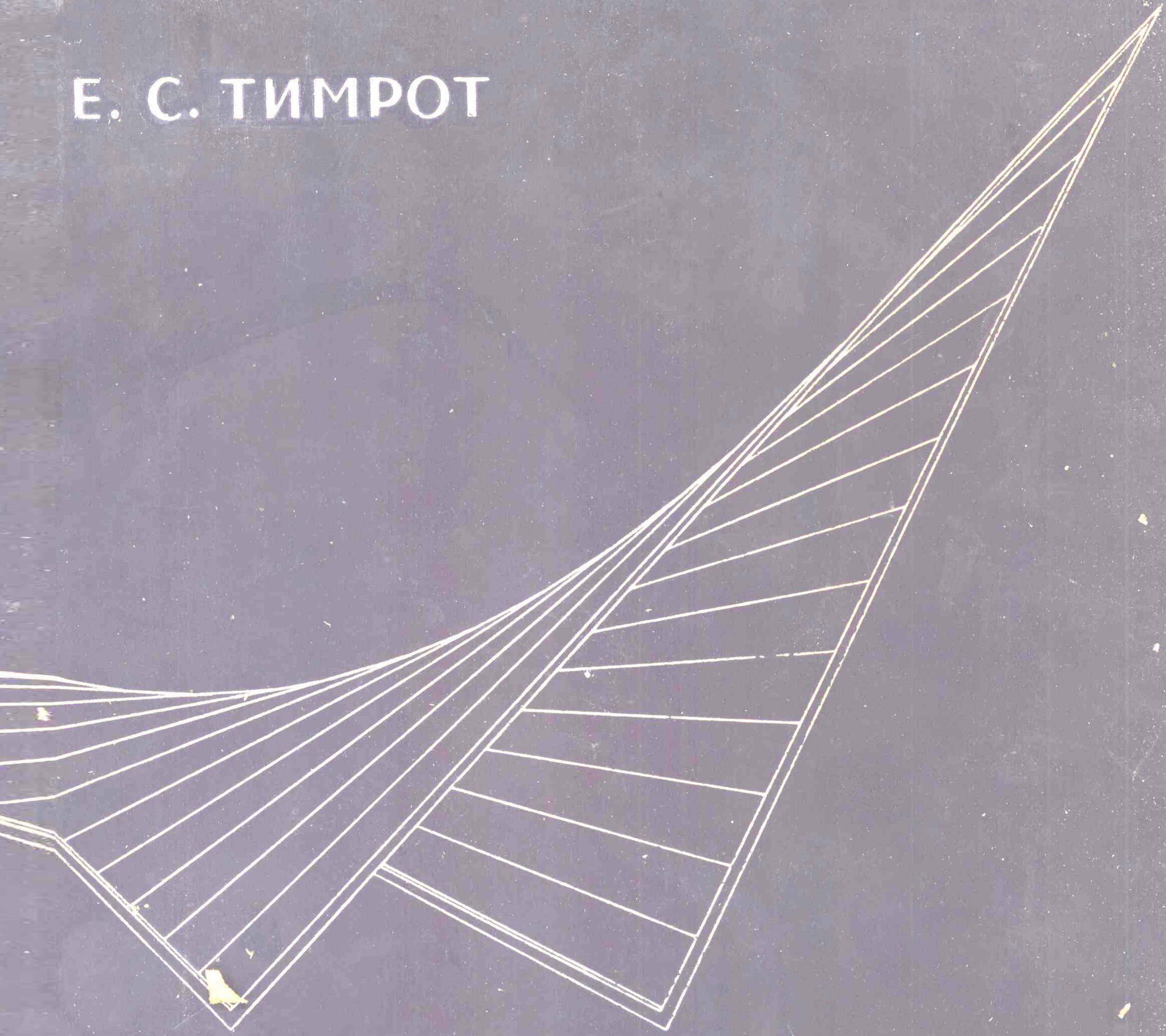
Е. С. ТИМРОТ



НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

МОСКОВСКИЙ АРХИТЕКТУРНЫЙ ИНСТИТУТ
Е. С. ТИМРОТ
КАНДИДАТ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

*Допущено
Министерством высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для архитектурных вузов*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛИТЕРАТУРЫ ПО СТРОИТЕЛЬСТВУ, АРХИТЕКТУРЕ
И СТРОИТЕЛЬНЫМ МАТЕРИАЛАМ
Москва — 1962

Редактор *Г. И. ФЕДОТОВ*

Курс начертательной геометрии составлен в соответствии с программой, утвержденной Министерством высшего и среднего специального образования СССР, и носит прикладной характер.

В книге изложены теоретические основы и практическое применение способов изображений, встречающихся в архитектурно-строительной практике: ортогональные проекции, аксонометрия, перспектива и проекции с числовыми отметками. В каждом способе изображения излагаются приемы построения контуров теней. Особое внимание уделено вопросам образования поверхностей-оболочек, применяющихся в покрытиях. Текст иллюстрирован примерами из современной строительной практики.

Книга рассчитана на студентов архитектурных вузов и факультетов, а также архитекторов и строителей.

Обозначения[1]

1. Точки в пространстве — в натуре — обозначаются прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, D, E и т. д.

2. Последовательность точек отмечается верхним индексом: A^1, A^2, A^3 и т. д.

3. Прямые и кривые линии в пространстве обозначаются строчными буквами латинского алфавита: a, b, c, d, e и т. д.

4. Плоскости в натуре обозначаются строчными буквами греческого алфавита: α, β, γ и т. д.

5. Углы обозначаются также греческими строчными буквами.

6. Плоскости проекций обозначаются буквой Π или K (перспектива). Последовательность плоскостей проекций обозначается буквой Π с нижним индексом: Π_1, Π_2, Π_3 и т. д.

7. Ортогональные проекции точек, прямых и плоскостей на комплексном чертеже обозначаются теми же буквами, что и в натуре с добавлением нижнего индекса, соответствующего индексу плоскости проекций: A_1; A_2; A_3 и т. д.

8. Оси проекции на комплексном чертеже обозначаются буквами x_{12}, x_{13}, z_{23} и т. д. Цифры индекса показывают, в результате пересечения каких плоскостей проекций образована данная ось.

9. Аксонометрические проекции точек прямых и плоскостей обозначаются теми же буквами, что и в натуре, с добавлением «штрих»: A', B', a', b' и т. д.

10. Вторичные проекции обозначаются A'_1, A'_2, B'_1, B'_2, b'_1, b'_2 и т. д.

11. Точка зрения или центр проекции обозначается буквой P.

12. Перспективы точек, прямых и плоскостей обозначаются теми же буквами, что и соответствующие элементы в натуре, с добавлением «штрих»: A', B', a', b' и т. д.

13. Проекции тени от точек, прямых и плоскостей на комплексном чертеже обозначаются теми же буквами, что и соответствующие элементы в натуре, с добавлением штриха или двух штрихов, в зависимости от того, на какой плоскости проекций Π_1 или Π_2 изображена проекция тени: A', A'', A''', b', b'', b''' и т. д.

14. Аксонометрические и перспективные проекции тени от точек прямых и т. д. обозначаются теми же буквами, что и соответствующие элементы в натуре с верхним индексом 0: A^0, B^0, a^0, b^0 и т. д.

15. Совпадение двух точек или прямых обозначается значком $\equiv$: $A \equiv B$, $C \equiv D$. Пересечение двух прямых, плоскостей и т. д. обозначается значком $\times$: $a \times b$; $\alpha \times d$.

Параллельность прямых и плоскостей обозначается знаком $/\!/$.

16. Прямой угол обозначается дугой с точкой внутри.

---

[1] В основу данной системы обозначений положены обозначения, разработанные в «Курсе начертательной геометрии» Н. Ф. Четверухина, В. С. Левицкого и др.

Введение

Начертательная геометрия дает возможность по изображениям изучать и воспроизводить пространственные формы. Она занимается разработкой способов построения изображений пространственных форм на плоскости и изучением способов решения пространственных задач с помощью изображений. В связи с этим изображения — чертежи — в начертательной геометрии должны удовлетворять ряду требований:

1) чертеж должен быть наглядным, чтобы по нему можно было представить, как будет выглядеть та или иная фигура в натуре;

2) чертеж должен быть «обратимым», т. е. давать возможность определения формы, размеров и положения в пространстве изображенного на нем объекта.

В соответствии с чертежом возводится здание в натуре, причем чертеж должен однозначно определять здание;

3) чертеж должен быть как можно более простым по построению, а графическое выполнение его должно обеспечивать достаточную для практики точность и т. д.

Требование обратимости особенно важно, так как по данным чертежа производится сооружение объекта. Не всякое изображение дает возможность определить по нему форму и размеры предмета, т. е. не всякое изображение обратимо. Чертеж должен строиться по строгим правилам, позволяющим переходить от плоских форм изображения к пространственным формам объекта. Для того чтобы плоский чертеж пространственной формы давал возможность воспроизвести эту форму в натуре, в начертательной геометрии применяется **метод проекций.** Чертежи, созданные на основе этого метода, называются **проекционными.**

1. Метод проекций

Рассмотрим способы построения проекционных чертежей.

а) **Центральная проекция.** На рис. 1 представлена плоскость Π', на которой строится изображение — чертеж. Эта плоскость называется *плоскостью проекций* или *картиной.* Произвольную точку пространства P, не лежащую на плоскости Π', называют *центром проекций* или *точкой зрения.* Прямые, проходящие через точку зрения, называются *проектирующими прямыми*, а плоскости, проходящие через точку зрения, называются *проектирующими плоскостями.*

Для того чтобы на плоскости картины найти центральную проекцию A' любой точки пространства A, следует провести через точку A проектирующую прямую AP. Пересечение прямой AP с картиной определит искомую точку A'.

Каждая точка пространства имеет одну единственную центральную проекцию, кроме точки зрения, проекция которой не определенна. Каждая точка плоскости картины совпадает со своей проекцией. Точки пространства, лежащие в проектирующей плоскости, параллельной картине, не имеют проекций, так как проектирующие прямые, проходящие через них, параллельны картине[1].

Проекцией прямой линии является прямая, так как проектирующие линии, проходящие через нее, образуют проектирующую плоскость, которая пересекается с картиной по прямой. Если прямая линия проходит через точку зрения, то она проектируется в точку. Если прямая линия лежит в плоскости картины, то она совпадает со своей проекцией. Так же, как центральные проекции точки и прямой, могут быть построены проекции любой плоской или пространственной фигуры.

Изображения, построенные с помощью центрального проектирования, максимально

[1] См. об этом более подробно стр. 198 и 254.

приближаются к восприятию человеческим глазом натуры и, следовательно, обладают хорошей наглядностью. Однако выполнение этих изображений сложно так же, как и определение натуральных размеров объекта по изображению.

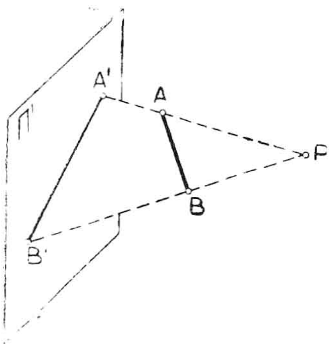


Рис. 1

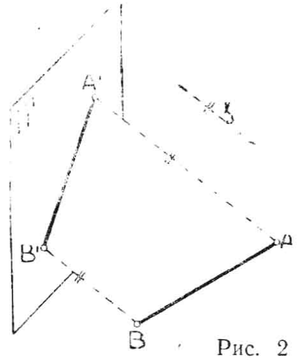


Рис. 2

б) **Параллельная проекция.** На рис. 2 показана плоскость проекций Π', а вместо центра проекций задано **направление проектирования** s, не параллельное плоскости Π'. Чтобы на плоскости Π' найти параллельную проекцию A' любой точки A пространства, следует провести через A проектирующую прямую, параллельную выбранному направлению проектирования s. Точка A' пересечения проектирующей прямой с плоскостью Π' является параллельной проекцией точки A. Параллельная проекция прямой будет прямая так же, как и в случае центральной проекции. Параллельная проекция обладает следующими важными свойствами.

1. **Прямые, параллельные в пространстве, имеют параллельные проекции,** так как проектирующие плоскости, проходящие через них, также параллельны (рис. 3).

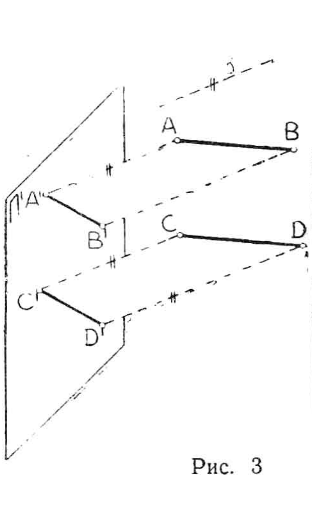


Рис. 3

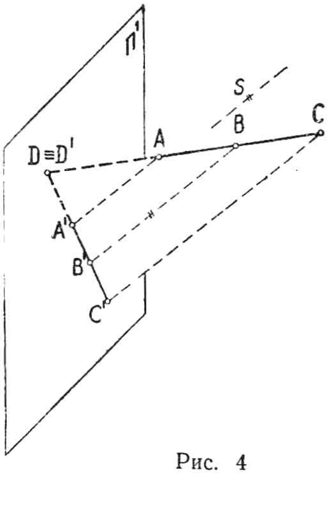


Рис. 4

2. **Отношение длин параллельных отрезков равно отношению длин их проекций.** Действительно, $\frac{AB}{A'B'} = K$; $\frac{CD}{C'D'} = K$, так как углы, образованные отрезками в пространстве с их проекциями, равны. Тогда $AB = A'B'K$; $CD = C'D'K$.

Разделив первое равенство на второе, получим $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$.

3. **Отношение длин отрезков на прямой в пространстве равно отношению длин проекций этих отрезков** (рис. 4), так как прямые AC и $A'C'$ образуют угол, стороны которого делятся проектирующими линиями на пропорциональные части.

Следует отметить, что операция проектирования устанавливает между прямыми AC и $A'C'$ взаимно-однозначное соответствие, при котором каждой точке B прямой AC соответствует единственная точка B' прямой $A'C'$, и наоборот. В этом соответствии точка D пересечения прямых является двойной точкой, т. е. соответствует сама себе.

Операция проектирования устанавливает взаимно-однозначное соответствие между двумя плоскостями α и Π' (рис. 5,*а*), при котором каждой точке A одной плоскости (плоскости объекта) соответствует единственная точка A' другой плоскости (плоскости проекций) и каждой прямой AB плоскости объекта (α) соответствует единственная прямая $A'B'$ плоскости проекции (Π'). В этом соответствии прямая m пересечения плоскостей α и Π' является двойной прямой, точки которой соответствуют сами себе. Ее называют осью соответствия. Каждая пара соответственных прямых, например AB и $A'B'$, лежит в проектирующей плоскости, которая пересекает прямую m в двойной точке $D \equiv D'$ прямых AB и $A'B'$. Таким образом, соответственные прямые пересекаются на оси соответствия плоскостей α и Π'. Каждой плоской фигуре одной плоскости соответствует единственная плоская фигура в другой плоскости.

Если одну из плоскостей α или Π' повернуть вокруг линии их пересечения до совмещения с другой плоскостью, то однозначное соответствие между совмещенными плоскостями не нарушится (рис. 5,*б*). Соответственные прямые будут по-прежнему пересекаться на оси соответствия, а прямые, соединяющие соответственные точки, будут параллельны между собой, так как отношение отрезков на соответственных прямых до поворота и после поворота остается тем же самым, а прямые,

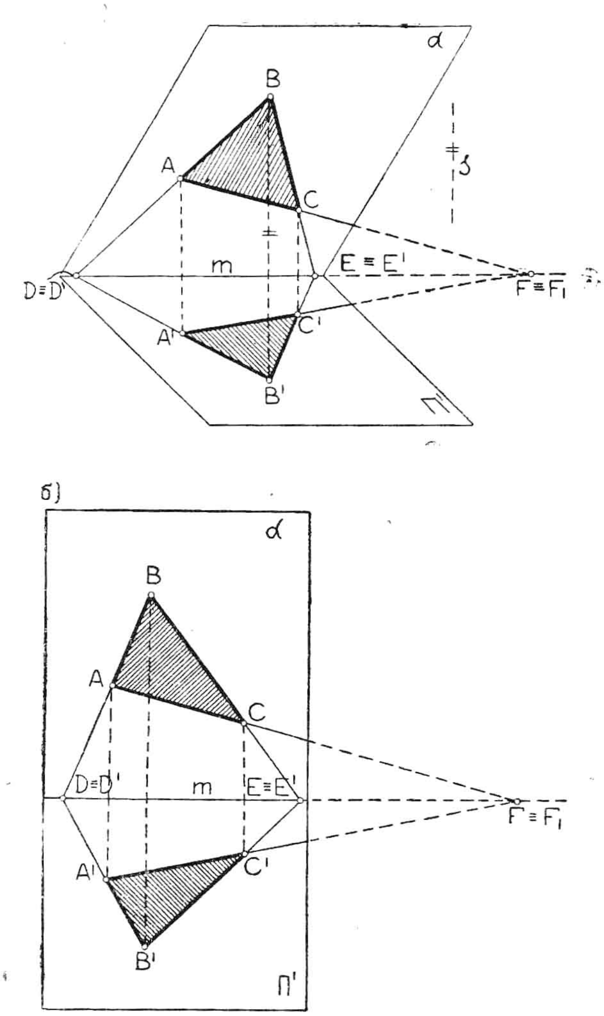


Рис. 5

соединяющие пропорциональные отрезки на сторонах угла, параллельны.

Соответствие двух совмещенных плоскостей установлено, если заданы ось соответствия и пара соответственных точек.

Центральная проекция также устанавливает взаимно-однозначное соответствие между прямыми и плоскостями.

в) **Ортогональная проекция.** В частном случае, когда за направление проектирования принята прямая, перпендикулярная к плоскости проекций, параллельная проекция называется ортогональной проекцией. Изображения пространственных форм строятся с помощью ортогональных проекций сравнительно просто и по ним легко судить о действительных размерах этих форм, но наглядность изображений значительно хуже, чем в центральной проекции.

2. Дополнения к проекционным чертежам

Основной практической задачей, связанной с использованием чертежей, является определение формы, размеров и положения в пространстве объекта по его чертежу. Одна проекция объекта ни размеров, ни формы, ни положения в пространстве не определяет. Например, проекция $A'B'$ отрезка AB не определяет его размеров, формы и положения в пространстве (рис. 6), так как в проектирующей плоскости $ABA'B'$ можно взять любой отрезок, например CD, или любую плоскую фигуру, например CDE, у которой та же проекция. Таким образом, каждый объект при заданном направлении проектирования и положении плоскости проекций имеет одно единственное изображение, но каждому изображению соответствует бесчисленное множество объектов. Рассмотрим, какие данные необходимо иметь в дополнение к чертежу, чтобы он стал обратимым, т. е. однозначно определял бы объект.

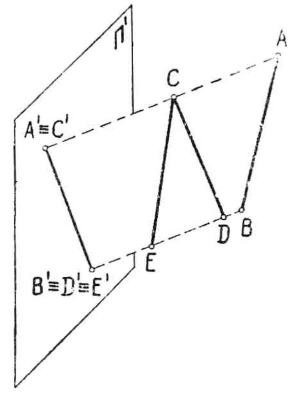


Рис. 6

На рис. 7,*а* дана центральная проекция $A'B'C'D'$ некоторого тетраэдра $ABCD$. Чтобы это изображение однозначно определяло объект (его форму, размеры и положение в пространстве), в дополнение к нему надо знать положение центра проекций P относительно плоскости проекций, определяемое, например, тремя координатами, и, кроме того, надо знать четыре расстояния от вершин тетраэдра до плоскости проекций, определяющие положения этих вершин на проектирующих прямых,

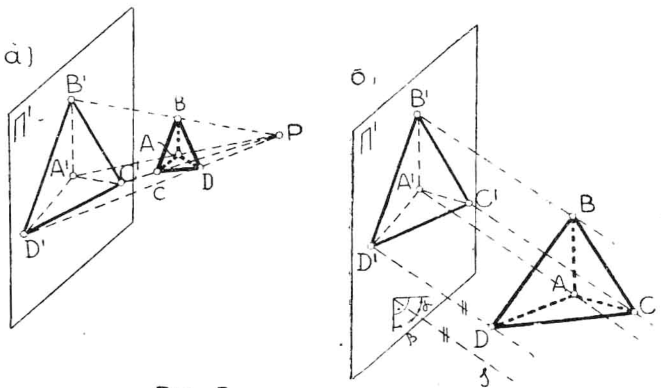


Рис. 7

т. е. всего семь дополнительных условий (параметров), независимых от чертежа. Эти условия — параметры — могут быть заданы различными способами. После их задания чертеж становится обратимым. Следует отметить, что прямые AB, AC, AD можно рассматривать как систему координатных осей, к которой можно «привязать» объект любой сложности, при этом проекция объекта будет привязана к проекциям осей. Таким образом, можно сказать, что изображение любого объекта, отнесенного к системе координатных осей, будет однозначно определять объект, если в дополнение к изображению известны семь дополнительных независимых параметров.

Установим, сколько независимых условий надо знать в дополнение к параллельной проекции для того, чтобы она однозначно определяла объект. На рис. 7,*б* дана параллельная проекция $A'B'C'D'$ некоторого тетраэдра $ABCD$. Чтобы эта проекция однозначно определяла объект, надо прежде всего знать направление проектирования s. Оно определяется двумя условиями (параметрами), например двумя углами α и β, которые прямая s составляет с координатными осями. После того, как направление проектирования задано, для определения положения вершин тетраэдра в пространстве достаточно знать четыре расстояния от плоскости проекций до вершин. Таким образом, для превращения параллельной проекции в обратимый чертеж необходимо в дополнение к ней знать еще шесть независимых от нее условий.

В том случае, когда направление проектирования известно, как, например, в ортогональных проекциях, в дополнение к изображению надо знать только четыре независимых условия.

В различных способах построения проекционных чертежей существуют различные варианты задания дополнительных условий. Эти варианты дополнения проекционных чертежей для превращения их в обратимые чертежи в каждом отдельном случае будут рассмотрены особо.

Часть I

Ортогональные проекции

Для создания обратимого чертежа в ортогональных проекциях строятся два изображения объекта на двух взаимно-перпендикулярных плоскостях. Одну плоскость проекций $П_1$ располагают горизонтально. Направление проектирующих линий перпендикулярно плоскости $П_1$. Вторую плоскость проекций $П_2$ располагают вертикально. Направление проектирующих линий перпендикулярно плоскости $П_2$. Расстояние от плоскости проекций до объекта может быть любым, так как параллельное перемещение плоскости проекций не влияет на форму и размер изображения объекта (рис. 8,*а*).

Объект по отношению к плоскостям проекций $П_1$ и $П_2$ располагают так, чтобы его основные плоскости и прямые были параллельны или перпендикулярны плоскостям проекций. После этого строятся два изображения объекта: горизонтальная проекция и фронтальная проекция. После построения проекций объект удаляется, а плоскости проекций вместе с изображениями объекта совмещаются. Плоскость проекций $П_2$ считают неподвижной, а плоскость проекции $П_1$ вращают вокруг линии пересечения плоскостей $П_1$ и $П_2$ до совмещения с плоскостью $П_2$. Полученные изображения объекта на совмещенных плоскостях проекций называют **ортогональными проекциями объекта** (рис. 8,*б*).

Для того чтобы по двум проекциям определить форму, размеры и положение в пространстве объекта, следует плоскости $П_1$ и $П_2$ привести во взаимно-перпендикулярное положение, вращая плоскость $П_1$ вокруг линии пересечения плоскостей проекций, после чего через горизонтальную и фронтальную проекции каждой точки объекта надо провести проектирующие прямые, перпендикулярные плоскостям проекций, до взаимного пересечения.

Объект в пространстве имеет три измерения: высоту, глубину и длину — *l, m, n*. При данном положении объекта относительно плоскостей проекций на каждой проекции отсут-

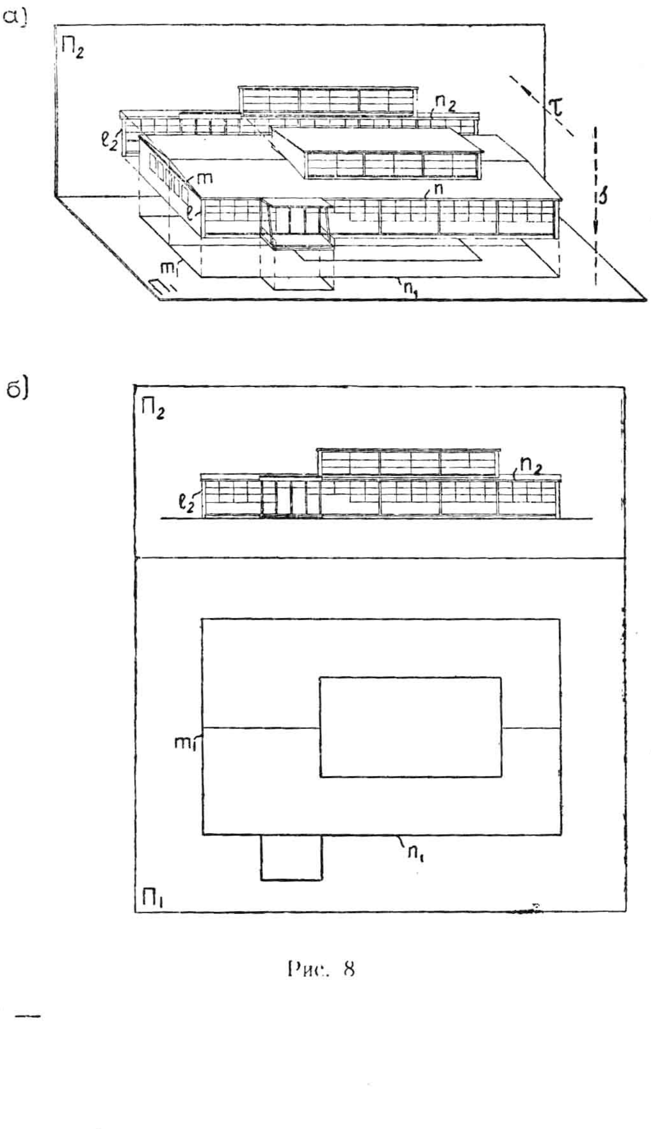


Рис. 8

ствует одно измерение. На горизонтальной проекции не отражены высоты, а изображения двух других размеров объекта, его глубины и длины равны натуральной величине этих размеров: $m_1=m$, $n_1=n$. На фронтальной проекции отсутствуют глубины, а изображения высот и длин равны натуральным величинам этих размеров объекта: $l_2=l$, $n_2=n$. Два изображения объекта отражают все три его измерения. При этом одно измерение изображается дважды.

То положение, что на каждой проекции объекта отсутствует одно измерение, а проекции двух других измерений отражают натуральные размеры объекта, создает, с одной стороны, относительно плохую наглядность изображений, а с другой стороны, удобоизмеряемость этих изображений.

Последнее свойство ортогональных проекций — их удобоизмеряемость — является причиной самого широкого их распространения в архитектурно-строительной практике. Все чертежи, по которым возводят сооружения, выполняются в системе ортогональных проекций.

Перейдем к рассмотрению построения ортогональных проекций точек, линий и поверхностей.

I. Точка, прямая и плоскость на комплексном чертеже

1. Проекции точки

Как уже отмечалось, для создания обратимого чертежа в ортогональных проекциях условились проектировать объект на две взаимно-перпендикулярные плоскости: горизонтальную Π_1 и фронтальную Π_2, приняв за направление проектирования направление прямых, перпендикулярных к плоскостям проекций (рис. 9,*а*). Плоскости Π_1 и Π_2, пересекаясь, образуют ось проекций x. Ортогональная проекция A_1 точки A на плоскости Π_1 называется горизонтальной проекцией. Ортогональная проекция A_2 точки A на плоскость Π_2 называется фронтальной проекцией точки. Все прямые и плоскости, перпендикулярные к плоскостям проекций, называются **проектирующими** прямыми и плоскостями. Прямая AA_1 — горизонтально-проектирующая прямая, прямая AA_2 — фронтально-проектирующая. Плоскость AA_1A_2 является одновременно горизонтально- и фронтально-проектирующей плоскостью.

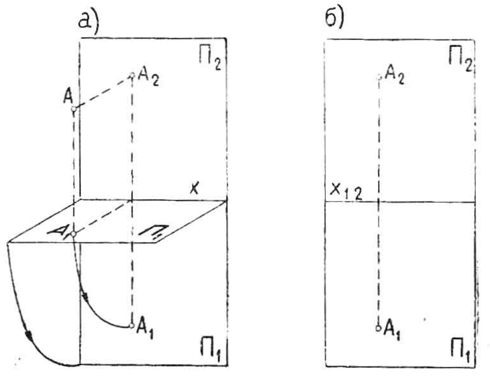


Рис. 9

Расстояние AA_1 от точки A до плоскости Π_1 называется ее высотой. Расстояние AA_2 от точки A до плоскости Π_2 называется ее выносом.

Две проекции точки A — горизонтальная A_1 и фронтальная A_2 — определяют положение точки в пространстве относительно плоскостей проекций. Действительно, если через проекции точки A_1 и A_2 провести проектирующие линии, перпендикулярные к плоскостям проекций, то они, как лежащие в одной проектирующей плоскости, при пересечении определят точку A.

Перейдем к чертежу на совмещенных плоскостях проекции. Для этого прежде всего удалим объект — точку A — и сохраним лишь ее проекции, после чего повернем плоскость Π_1 вокруг оси x до совмещения с плоскостью проекций Π_2 (рис. 9,*б*). При этом проекции точки A расположатся на одном перпендикуляре к оси проекций x_{12}*, так как до поворота обе проекции точки лежали в плоскости, перпендикулярной к оси проекций. Прямая A_1A_2, соединяющая проекции точки, называется линией **связи**[1].

Две проекции объекта на совмещенных плоскостях в общем случае представляют обратимый чертеж, по которому можно определить форму, размеры и положение в пространстве объекта относительно плоскостей проекций. На горизонтальной проекции отсутствуют высоты, но они отражены на фронтальной проекции; на фронтальной проекции отсутствуют выносы — глубины, но они отражены на

* В дальнейшем ось проекций будем обозначать буквой x с индексом, состоящим из цифр, соответствующих номерам плоскостей проекций, образующих эту ось.

[1] Во многих чертежах во избежание их усложнения линии связи между проекциями точек не проведены.

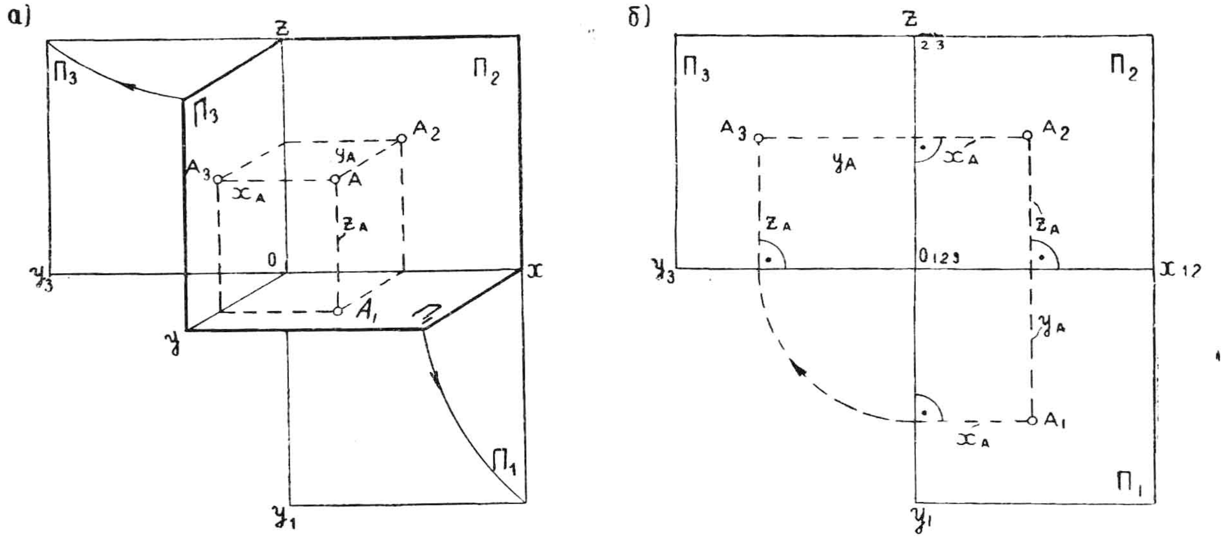


Рис. 10

горизонтальной проекции. Таким образом, совокупность двух проекций в общем случае является обратимым чертежом.

Чертеж, состоящий из нескольких связанных между собой проекций объекта, называется **комплексным чертежом.**

В отдельных частных случаях, а иногда для придания большей наглядности, пользуются еще третьей проекцией на профильную плоскость $П_3$ (рис. 10,*а*), перпендикулярную к первым двум плоскостям $П_1$ и $П_2$. За направление проектирования принимается направление прямой, перпендикулярной к плоскости $П_3$. Профильная плоскость проекций может располагаться как слева от объекта, так и справа, в зависимости от того, что удобнее для данной конкретной задачи. Три взаимно-перпендикулярные плоскости проекций $П_1$, $П_2$ и $П_3$, пересекаясь, образуют три оси проекций Ox, Oy и Oz.

Если установить некоторый масштаб для измерения отрезков на осях, приняв за начало отсчета точку O, то плоскости проекций $П_1$, $П_2$ и $П_3$ можно принять за координатные плоскости, а оси проекции Ox, Oy и Oz — за координатные оси, при этом длины отрезков прямых, проектирующих точку A, измеренные в выбранном масштабе, будут численно равны координатам точки. Точка A в пространстве определяется тремя координатами x_A, y_A и z_A. Каждая проекция точки определяется двумя координатами. Горизонтальную проекцию A_1 точки A определяют координаты x_A и y_A; фронтальную проекцию A_2 определяют x_A и z_A; профильную проекцию A_3 определяют координаты y_A и z_A. При переходе к чертежу на совмещенных плоскостях проекций (рис. 10,*б*) плоскость $П_3$, совмещается с плоскостью $П_2$ путем вращения вокруг оси Oz. Ось Oy при этом как бы раздваивается. Расстояния проекций A_1, A_2 и A_3 от осей Ox, Oy и Oz, измеренные в определенном масштабе, численно равны координатам точки A. Так как в построении любой пары проекций участвуют все три координаты, то по заданной паре проекций можно найти третью. Так, например, для нахождения точки A_3 достаточно через точку A_1 провести прямую, перпендикулярную к оси y_1 и отсекающую на ней отрезок, равный y_A, перенести этот отрезок на второе положение оси — y_3, и через полученную точку провести прямую, параллельную оси z_{23}, которая при пересечении с прямой, проходящей через точку A_2 перпендикулярно к z_{23}, определит искомую точку A_3. Так как каждая пара проекций определяет положение точки в пространстве, то в дальнейшем будем пользоваться в основном двумя проекциями.

На рис. 11,*а* даны две плоскости проекций $П_1$ и $П_2$. Они делят пространство на четыре части — четыре четверти *I, II, III, IV*. Точка A находится в первой четверти пространства, точка B — во второй, точка C — в третьей, точка D — в четвертой. Точки E, M, N, R расположены на плоскостях проекций, а точка K находится на оси проекций. Проекции всех этих точек построены.

Для перехода от наглядного изображения к чертежу на совмещенных плоскостях проекций удалим точки пространства A, B, C, D, E,

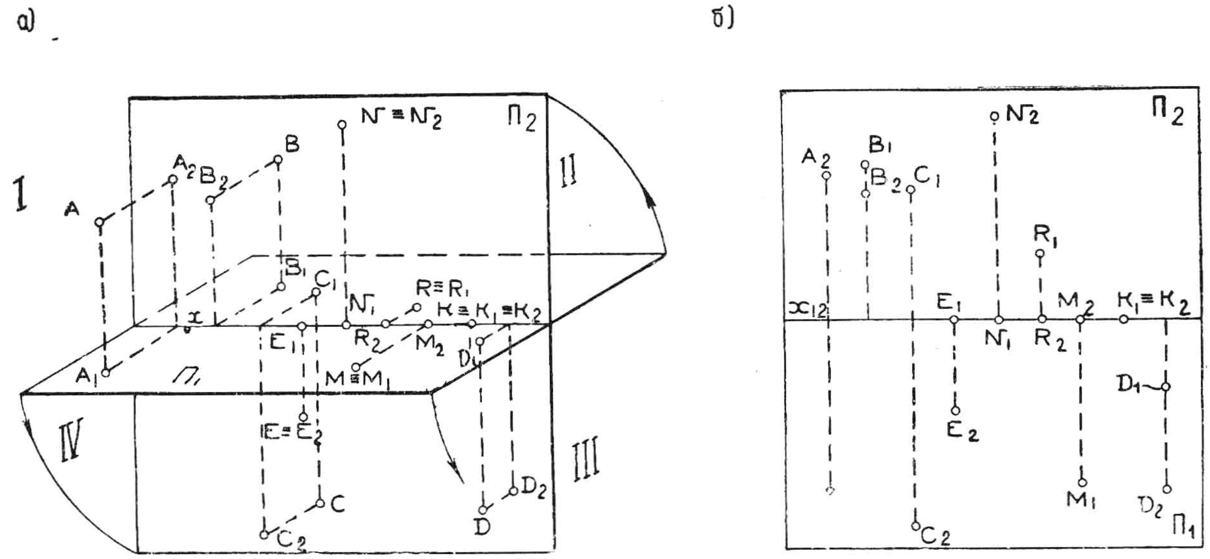


Рис. 11

M, N, R, K, а оставим только их проекции. После чего повернем плоскость проекций Π_1 вокруг оси проекций x до совмещения с плоскостью Π_2, так чтобы передняя половина плоскости Π_1 опустилась вниз, при этом часть плоскости Π_1, лежащая за плоскостью Π_2, поднимется кверху. После совмещения плоскостей проекций фронтальные проекции точек не изменят своего положения в пространстве, а горизонтальные проекции точек займут новое положение. Будут ли горизонтальные проекции точек находиться выше или ниже оси проекций, зависит только от того, в какой четверти пространства находилась точка до совмещения плоскостей проекций.

Горизонтальные проекции точек, лежащих в I четверти, после совмещения плоскостей Π_1 и Π_2 расположатся ниже оси проекции, а фронтальные проекции — выше оси x_{12}. Например, проекции точки $A - A_1$ и A_2 (рис. 11,*б*). Горизонтальные и фронтальные проекции точек, лежащих во II четверти, после совмещения плоскостей расположатся выше оси x_{12}. Например, проекции точки $B - B_1$ и B_2. Горизонтальные проекции точек, расположенных в III четверти пространства, после совмещения плоскостей проекции разместятся выше оси x_{12}, а фронтальные их проекции останутся ниже оси. Например, проекции точки $C - C_1$ и C_2. Горизонтальные и фронтальные проекции точек, лежащих в IV четверти пространства, после совмещения плоскостей расположатся ниже оси x_{12}. Например, проекции точки $D - D_1$ и D_2.

Точки E, M, N, R лежат на плоскостях проекций. У этих точек либо высота, либо вынос равны нулю (рис. 11,*а*). Одна из проекций этих точек совпадает с самой точкой в пространстве, а другая проекция располагается на оси x_{12}. Например, проекции точки $E - E_1$ и E_2 (рис. 11,*б*). Точка K лежит на оси x и совпадает с обеими своими проекциями $K \equiv K_1 \equiv K_2$.

Положение точек объекта в различных четвертях пространства усложняет построение его проекций. Поэтому обычно объект располагают в I четверти пространства.

2. Проекции прямой

На рис. 12,*а* прямая задана точками A и B. Построив проекции A_1, B_1 и A_2, B_2 этих точек и соединив одноименные проекции прямыми, получим проекции прямой AB. Проектирующие линии AA_1 и BB_1 определяют горизонтально-проектирующую плоскость, в которой лежит прямая AB. Линии AA_2 и BB_2 определяют фронтально-проектирующую плоскость. Если плоскости проекций совмещены (рис. 12,*б*) и на них построены две проекции A_1B_1 и A_2B_2 прямой, то, вернув эти плоскости в исходное взаимно-перпендикулярное положение, можно через проекции прямой провести проектирующие плоскости, которые при пересечении определят прямую в пространстве. Чтобы задать на комплексном чертеже точку, принадлежащую прямой AB, следует произвольно выбрать одну проекцию точки, например горизонтальную C_1, и провести через нее линию связи, которая при пересечении с фронтальной проекцией прямой определит точку C_2. Проекции C_1 и C_2 определяют точку C, лежащую в пространстве на прямой AB. Определим, через какие четверти пространства проходит прямая AB. Для этого продолжим ее до пересечения с плоскостями проекций (рис. 12,*а*). Точки пересечения прямой с плоскостями проекций называются **следами**. Точка M пересечения прямой с горизонтальной плоскостью $П_1$ называется **горизонтальным следом**. В этой же точке M прямая AB пересекается со своей горизонтальной проекцией A_1B_1. Фронтальная проекция M_2 горизонтального следа M лежит на оси, так как высота точки M равна нулю. Точка N — **фронтальный след прямой**. В этой точке прямая AB пересекается со своей фронтальной проекцией A_2B_2. Так как вынос точки N равен нулю, то ее горизонтальная проекция N_1 лежит на оси x_{12}. Имея две проекции отрезка AB, можно определить следы прямой. **Для построения проекций горизонтального следа M прямой AB найдем его фронтальную проекцию M_2, продолжив фронтальную проекцию A_2B_2 отрезка AB до пересечения с осью x_{12}. Через точку M_2 проведем линию связи до пересечения с горизонтальной проекцией A_1B_1 в искомой точке M_1** (рис. 12,*б*). Точно так же для нахождения проекций фронтального следа достаточно горизонтальную проекцию A_1B_1 отрезка AB продолжить до пересечения с осью x_{12} и через полученную точку N_1 провести линию связи до пересечения с фронтальной проекцией A_2B_2 в искомой точке N_2. Как видно по наглядному изображению (рис. 12,*а*), прямая проходит через *I*, *II* и *IV* четверти пространства. Это можно установить и по комплексному чертежу.

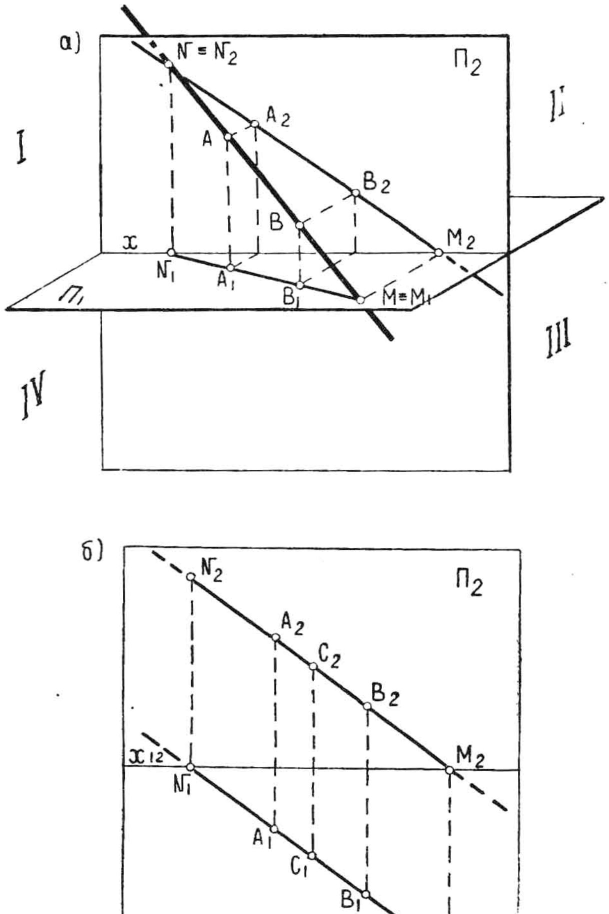


Рис. 12

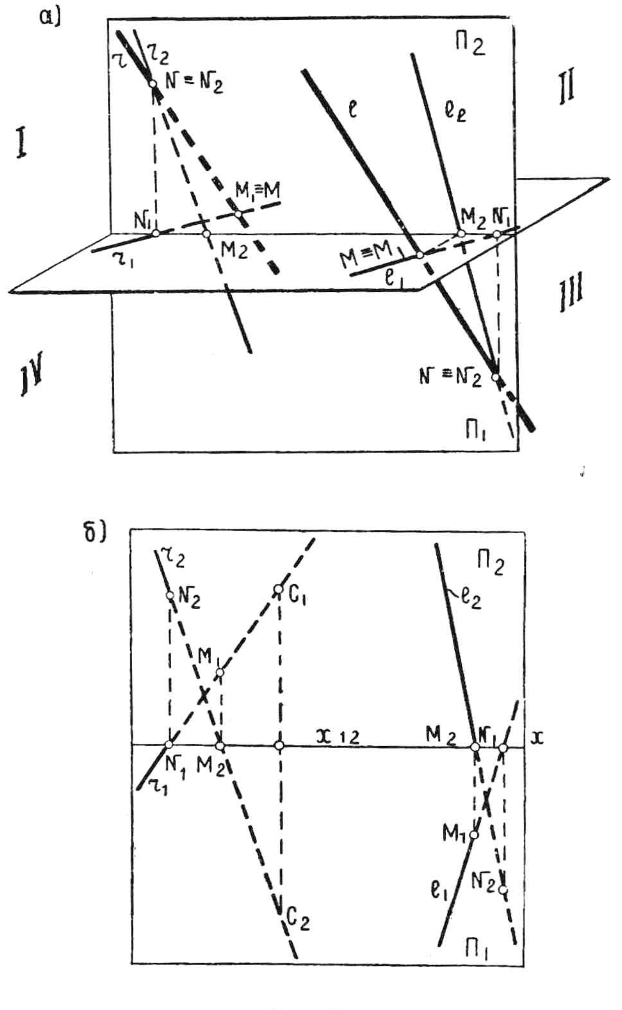


Рис. 13

Проекции прямой слева от точки N (N_1, N_2) лежат выше оси, что характерно для II четверти (см. точку В на рис. 11), а справа от точки M (M_1, M_2) лежат ниже оси x_{12}, что характерно для IV четверти (см. точку D на рис. 11). Между точками (M_1, M_2) и (N_1, N_2) фронтальная проекция прямой лежит выше оси, горизонтальная проекция — ниже оси, что характерно для I четверти. На рис. 13, *а*, *б* даны проекции двух прямых r и l. Определены их следы. Прямая r проходит через I, II и III четверти пространства, а прямая l — через I, IV и III. Рассмотренные выше прямые имеют произвольное расположение по отношению к плоскостям проекций.

Прямые частного положения. К прямым частного положения относятся прямые, параллельные и перпендикулярные к плоскостям проекций. Прямые, параллельные плоскостям проекций, называются прямыми уровня. Прямая AB (рис. 14, *а*, *б*), параллельная плоскости Π_1, называется горизонталью; так как высоты всех ее точек равны, то ее фронтальная проекция параллельна оси. Горизонтальная проекция отрезка такой прямой равна его натуральной величине. Горизонталь с плоскостью Π_1 не пересекается, поэтому она имеет только фронтальный след. Ее угол наклона α по отношению к плоскости Π_2 проектируется без искажения на горизонтальную плоскость проекций Π_1. Прямая CD, параллельная плоскости Π_2, называется фронталью. Выносы всех ее точек равны, поэтому ее горизонтальная проекция параллельна оси, а фронтальная проекция отрезка такой прямой равна его натуральной величине. Фронталь с плоскостью Π_2 не пересекается; она имеет только горизонтальный след. Угол наклона β фронтали к плоскости Π_1 на фронтальной проекции изображается без искажения. Прямая AB (рис. 15, *а*, *б*), параллельная плоскости Π_3, называется профильной прямой. Так как расстояния всех точек этой прямой от плоскости Π_3 равны, то ее фронтальная и горизонтальная проекции соответственно параллельны осям Oz и Oy и перпендикулярны к оси Ox. Ее углы наклона α

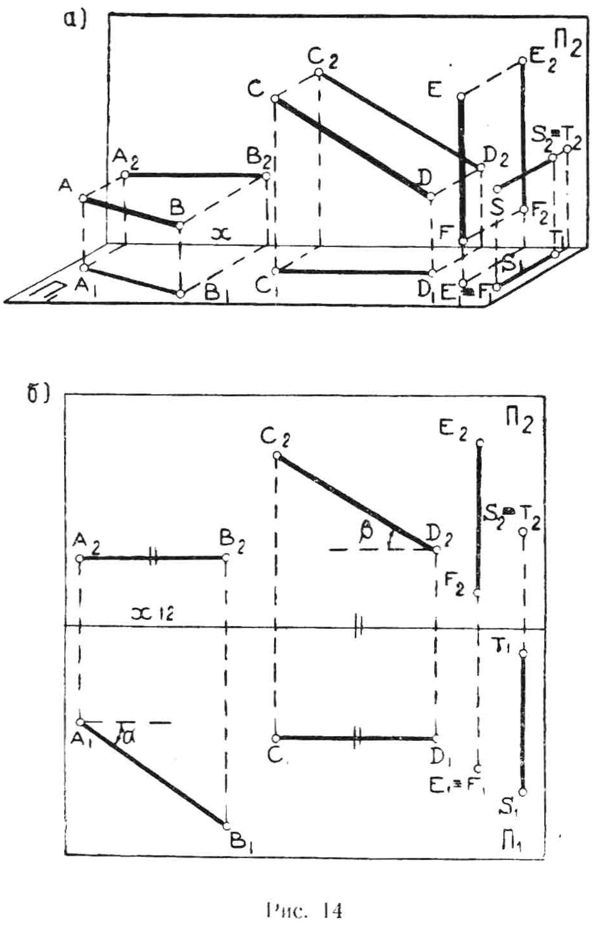


Рис. 14

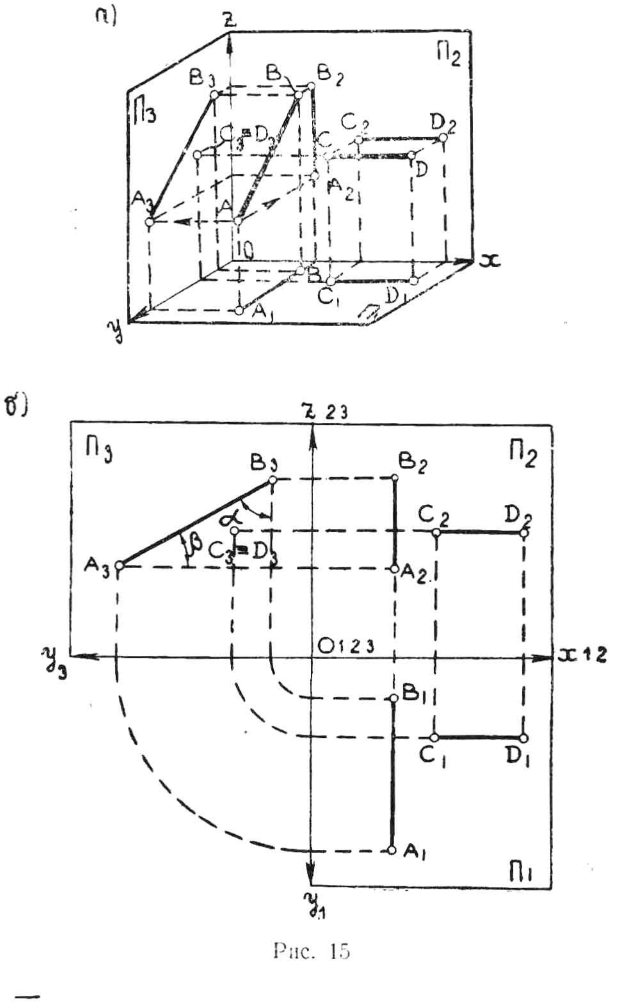


Рис. 15

и β к плоскостям проекций $П_2$ и $П_1$ на плоскости $П_3$ изображаются в натуральную величину, как и отрезок самой прямой.

Если прямая лежит в плоскости проекции, то одна из ее проекций совпадает с осью.

Отрезки, принадлежащие прямым уровня, на одной из плоскостей проекций изображаются в натуральную величину, а на второй плоскости проекций изображаются отрезками, параллельными оси. Угол наклона прямой уровня к одной из плоскостей проекций на другой плоскости проекций изображается в натуральную величину.

Прямые, перпендикулярные к плоскостям проекций, как уже отмечалось, называются проектирующими. Одна из проекций этих прямых является точкой, а другая располагается перпендикулярно к оси (рис. 14, прямые *ST* и *EF*; рис. 15, прямая *CD*).

3. Взаимное расположение двух прямых

Прямые в пространстве могут пересекаться, скрещиваться и быть параллельными.

1. Если две прямые *AB* и *AC* (рис. 16, *а*, *б*) в пространстве пересекаются, то проекции точки их пересечения совпадают с пересечением одноименных проекций прямых, т. е. точки пересечения проекций прямых лежат на одном перпендикуляре к оси x_{12} на одной линии связи.

2. Прямые *l* и *n* в пространстве скрещиваются. Проекции их могут пересекаться. Но точке пересечения проекций соответствуют две точки на скрещивающихся прямых в пространстве, имеющие разные высоты или разные выносы. Следовательно, точки пересечения одноименных проекций скрещивающихся прямых не лежат на одной линии связи.

Условия видимости на примере скрещивающихся прямых. Для улучшения наглядности чертежей прибегают к условной видимости. Точки *K* и *T* скрещивающихся прямых в натуре находятся на одной проектирующей прямой (рис. 16, *а*). Поэтому их горизонтальные проекции совпадают $K_1 = T_1$. Если считать, что луч зрения совпадает по направлению с этой проектирующей прямой, то видимой будет точка *K*, лежащая дальше от плоскости $П_1$, т. е. имеющая большую высоту, чем точка *T*. Точка *T* будет невидима, она закрыта точкой *K*.

Условились считать горизонтальную проекцию K_1 точки *K* видимой, а горизонтальную проекцию T_1 точки *T* невидимой. На этой основе определяется видимость горизонтальных проекций линий и фигур.

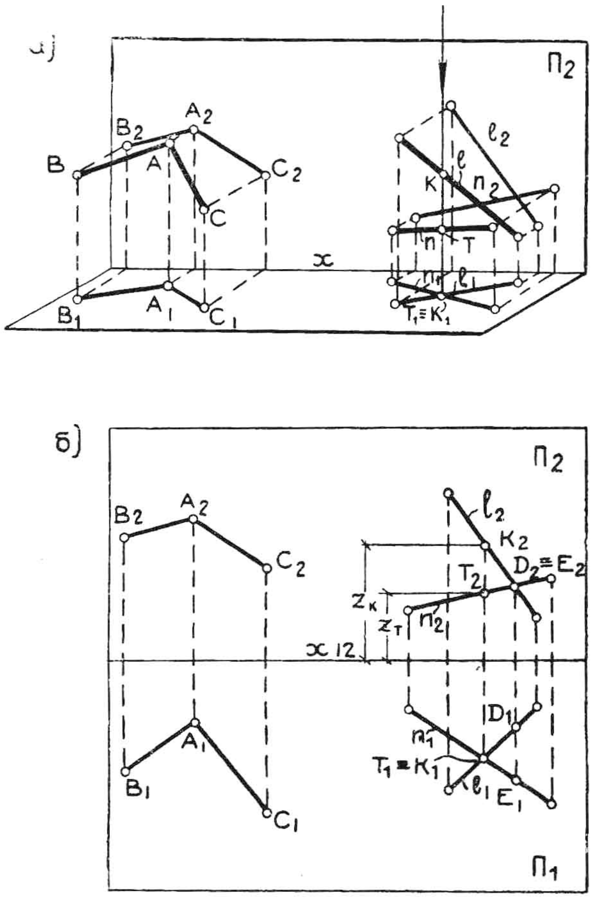


Рис. 16

Видимость горизонтальных проекций точек устанавливается непосредственно на комплексном чертеже (рис. 16, *б*). Линия связи, проходящая через точку $K_1 \equiv T_1$, при пересечении с фронтальными проекциями прямых определит точки K_2 и T_2. Расстояния $Z_к$ и $Z_т$ от точек K_2 и T_2 до оси x_{12} равны высотам точек *K* и *T*. Так как $Z_к > Z_т$, то точка K_1 видима, а точка T_1 невидима. Следовательно, если горизонтальные проекции двух точек совпадали, то для определения видимости следует по фронтальной проекции точек установить, какая из точек в натуре имеет большую высоту, проекция той точки будет видима.

Условия видимости по отношению к другим плоскостям проекций аналогичны: если проекции двух точек совпали, то видима проекция той точки, которая находится дальше от плоскости проекции, считая, что луч зрения совпадает с проектирующей прямой.

а)

б)

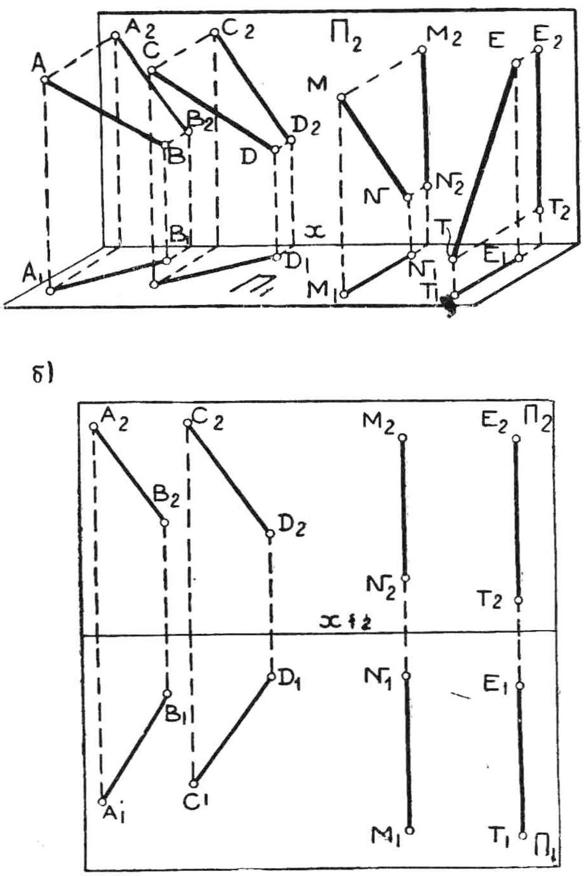


Рис. 17

Можно установить, какая из точек D_2 или E_2 фронтальной проекции прямых будет видима. Для этого достаточно через точку $D_2 \equiv \equiv E_2$ провести линию связи до пересечения с горизонтальными проекциями прямых в точках D_1 и E_1. Из чертежа видно, что точка E_1 имеет вынос больше, чем точка D_1. Следовательно, фронтальная проекция точки E, принадлежащей прямой n, будет видима, а проекция точки D, принадлежащая прямой l, находится за ней и невидима.

3. В том случае, когда прямые параллельны, их одноименные проекции также параллельны (рис. 17, *а*, *б*, прямые AB и CD параллельны). Обратное утверждение верно не всегда. Так, параллельные проекции профильных прямых могут определить в пространстве не параллельные, а скрещивающиеся прямые, например MN и ET. Для определения того, будут ли параллельны между собой профильные прямые, AB, CD и EF проекции которых параллельны, или же эти прямые скрещиваются (рис. 18), следует отрезки AB, CD и EF этих прямых спроектировать на плоскость $П_3$. Если проекции отрезков на этой плоскости параллельны ($A_3B_3 \parallel D_3C_3$), то и прямые в пространстве параллельны; если же проекции отрезков пересекаются ($A_3B_3 \times E_3F_3$), то прямые в пространстве скрещиваются.

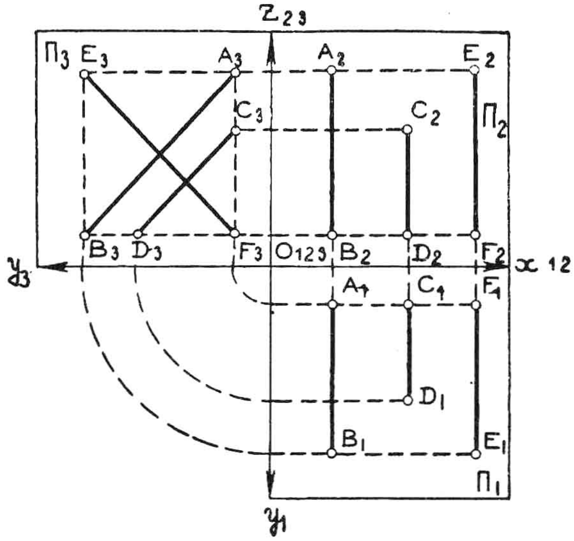


Рис. 18

4. Проекции плоскости

Плоскость в пространстве может быть задана тремя точками A, B и C, не лежащими на одной прямой (рис. 19, *а*), двумя пересекающимися прямыми (AB и AC, рис. 16), двумя параллельными прямыми AB и CD, рис. 17) и т. д. На комплексном чертеже плоскость может быть задана проекциями этих элементов. Задание проекций трех произвольных точек (или другой вариант здания плоскости) определяет на чертеже проекции всех остальных точек этой плоскости. Например, если произвольно выбранную точку E_2 (рис. 19, *б*) принять за фронтальную проекцию некоторой точки плоскости и провести через эту точку фронтальную проекцию прямой, лежащей в данной плоскости, например A_2D_2, после чего найти горизонтальную проекцию A_1D_1 этой прямой, то горизонтальная проекция E_1 точки E будет лежать на пересечении проекции прямой A_1D_1 с линией связи, проходящей через точку E_2. При этом точки E_1 и E_2 определят в пространстве точку E принадлежащую плоскости ABC.

Линии пересечения данной плоскости с плоскостями проекций называются с л е д а м и. Плоскость может быть задана двумя