КОНСТРУКТИВНЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Р. Габасов
Ф. М. Кириллова

2

Р. ГАБАСОВ,
Ф. М. КИРИЛЛОВА

КОНСТРУКТИВНЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Часть 2

ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

Минск
Издательство «Университетское»
1984

УДК 519.852+517.977.58

Рекомендовано
Советом факультета прикладной математики
Белгосуниверситета имени В. И. Ленина

Рецензент — Н. Е. Кирин,
доктор физико-математических наук

Габасов Р., Кириллова Ф. М. Конструктивные методы оптимизации. Ч. 2. Задачи управления.— Мн.: Изд-во «Университетское», 1984.—207 с.

Вторая часть книги посвящена развитию методов, изложенных в первой части, на задачи оптимального управления линейными динамическими системами. Рассматриваются два класса допустимых управлений, состоящих из импульсных и кусочно-непрерывных функций. В первом классе задачи оптимального управления сводятся к специальным конечномерным задачам линейного программирования. Для учета специфики этих задач разработаны новые конечные модификации методов первой части. Приводимые результаты численных экспериментов подтверждают эффективность предложенных алгоритмов. В классе кусочно-непрерывных функций задачи оптимального управления бесконечномерны. В книге разработаны алгоритмы решения задачи терминального управления, задачи быстродействия, задачи инерционного управления, задачи управления с фазовыми ограничениями. Изучены системы, не разрешенные относительно производных, регулярно возмущенные системы, системы с быстроменяющимися параметрами.

Библиогр. 14 назв. Табл. 4.

$\text{Г}\ \dfrac{1502000000-035}{\text{М}\,317-84}\ 22-84$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Задачи управления составляют один из наиболее сложных и актуальных разделов современной теории экстремальных задач. По результатам решения таких задач оцениваются достоинства большинства новых методов оптимизации. В данной части монографии излагаются алгоритмы решения только линейных задач оптимального управления системами с сосредоточенными параметрами (исследование распределенных систем и нелинейных задач содержится в последующих частях).

В монографии авторов «Оптимизация линейных систем» (Минск, 1973) указывалось, что многие задачи оптимизации нелинейных систем можно решить вполне удовлетворительно, если известны эффективные методы решения соответствующих задач для линейных систем. В теории оптимального управления за двадцать пять лет интенсивного развития получен ряд результатов качественного характера. Но до сих пор ни в рамках принципа максимума Л. С. Понтрягина (см. *Федоренко Р. П.* Приближенное решение задач оптимального управления.— М., 1978), ни в рамках динамического программирования Р. Беллмана (см. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Основы динамического программирования.— Минск, 1975), ни в рамках других подходов не создано эффективных алгоритмов решения линейных задач оптимального управления. Хотя эти задачи являются частными задачами линейного программирования (см. *Данциг Дж.* Линейное программирование.— М., 1966), применение к ним существующих мощных универсальных систем программирования или невозможно, или неэффективно в силу специфических свойств задач оптимального управления, из-за которых происходит зацикливание, теряется точность, резко замедляется процесс решения. В этой ситуации естественной является разработка специальных алгоритмов построения оптимальных управлений в линейных системах.

Алгоритмы, представленные в данной части монографии, получены на пути реализации алгоритмов первой части. При этом основные усилия направлялись на максимальный учет специфики задач управления. Все результаты монографии базируются на подходе, подробно описанном в предыдущей монографии авторов (*Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Методы линейного программирования. Ч. 1—3.— Минск, 1977, 1978, 1980), которая, напомним, возникла в связи с задачами оптимального управления.

Соавторами результатов, вошедших в данную монографию, являются следующие наши сотрудники: В. С. Глушенков (§ 3, 4 гл. 1), С. В. Гневко (гл. 2), В. З. Даукшас (гл. 3), О. И. Костюкова (§ 2 гл. 1, гл. 4, § 1—3 гл. 5), А. А. Сенько (§ 1, гл. 1, § 2 гл. 4), Фам Тхе Лонг (§ 5 гл. 1). Их помощь сильно облегчила работу над книгой, и мы выражаем им нашу глубокую признательность.

Авторы

Глава 1. АЛГОРИТМЫ ОПТИМИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В КЛАССЕ ИМПУЛЬСНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

Современная математическая теория оптимального управления динамическими системами [1] возникла в начале 50-х гг. на базе инженерных исследований по оптимальным системам автоматического регулирования. Первые ее результаты были получены для систем управления, описываемых линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \\
&\quad + b_{12}u_2 + \dots + b_{1r}u_r, \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \\
&\quad + b_{22}u_2 + \dots + b_{2r}u_r, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \\
&\quad + b_{n2}u_2 + \dots + b_{nr}u_r.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Подобные уравнения являются математическими моделями многих процессов в различных сферах человеческой деятельности. В них переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ представляют значения полного набора внутренних характеристик изучаемого процесса в момент времени t и называются фазовыми переменными или компонентами n-вектора состояния процесса $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Переменные $u_1, u_2, \dots, u_r$, также участвующие в описании (1), суть значения внешних целенаправленных воздействий в момент t. Их принято называть переменными управления или компонентами r-вектора управления $u=(u_1, u_2, \dots$ $\dots, u_r)$. Они отражают те существующие в реальной обстановке возможности и средства, с помощью которых можно воздействовать на течение исследуемого процесса.

В целом система (1) представляет собой дифференциальный закон поведения процесса управления. Получение и использование законов поведения в дифференциальной форме широко распространено в современных научных исследованиях, так как она компактно и адекватно выражает фундаментальные свойства многих явлений. В описании (1) числа a_{ij}, $i, j=\overline{1, n}$, характеризуют свойства собственно объекта управления, числа b_{ik}, $k=\overline{1, r}$,— свойства входного устройства, через которое управления воздействуют на объект. Объединяя указанные параметры в матрицы

$$A=\begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n1}\, a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} b_{11}\, b_{12} & \ldots & b_{1r} \\ b_{21}\, b_{22} & \ldots & b_{2r} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ b_{n1}\, b_{n2} & \ldots & b_{nr} \end{bmatrix}$$

и используя правила матричного исчисления, в теоретических исследованиях удобно перейти от (1) к компактной форме записи математической модели линейной системы управления:

$$\dot{x}=Ax+Bu, \tag{2}$$

где $\dot{x}\equiv dx/dt$.

Пусть начальное состояние системы управления

$$x(0)=x_0. \tag{3}$$

Тогда под воздействием управления $u=(u(t),\ t\geqslant 0)$ последующие состояния системы $x(t)$, $t\geqslant 0$, будут изменяться по конечному (не дифференциальному, интегральному) закону

$$x(t)=x(t/x_0,\ u),\ t\geqslant 0, \tag{4}$$

который получается после подстановки в (2) функции $u=u(t)$, $t\geqslant 0$, и интегрирования возникающей системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений (2) при начальном условии (3).

Построение закона поведения (4) исследуемой системы управления по ее дифференциальному закону (2) на математическом языке называется решением задачи Коши. Эта задача может быть решена для очень широкого класса функций $u(t)$, $t\geqslant 0$.

В данной части монографии в основном используются управления, не выходящие за класс кусочно-постоянных функций *). Под кусочно-постоянной r-вектор-функцией $u(t)$, $t \geqslant 0$, принято понимать функцию $u(t)$: $R_+ = [0, \infty[\to R^r$, компоненты которой на каждом ограниченном отрезке $T \subset R_+$ принимают конечное множество значений и меняют их в конечном числе точек, где они терпят разрыв первого рода. В точках разрыва τ кусочно-постоянная функция определяется по непрерывности справа: $u(\tau) = \lim u(t)$, $t \to \tau$, $t > \tau$. При расширении этого класса используется конечное число параметров.

Функция (4) называется траекторией системы (2), соответствующей начальному состоянию (3) и управлению $u = (u(t),\ t \geqslant 0)$. В классе непрерывных кусочно-гладких функций каждым начальным моменту $\tau \geqslant 0$, состоянию $x(\tau)$ и управлению $u(t)$, $t \geqslant \tau$, соответствует единственная траектория $x(t)$, $t \geqslant \tau$, системы (2), которую можно построить по формуле Коши [2]:

$$x(t) = F(t)\, F^{-1}(\tau)\, x(\tau) + \int\limits_{\tau}^{t} F(t)\, F^{-1}(s)\, Bu(s)\, ds, \quad t \geqslant \tau, \qquad (5)$$

где $F(t)$ — $n \times n$-матричная функция, называемая фундаментальной матрицей решений однородной части $\dot{x} = Ax$ системы (2). Она является решением матричного дифференциального уравнения $\dot{F} = AF$ с начальным условием $F(0) = E$, где E — единичная диагональная $n \times n$-матрица.

В некоторых приложениях из-за специфики устройств, вырабатывающих управления, используются только импульсные функции $u(t)$, $t \geqslant 0$:

$$u(t) \equiv u(k),\ t \in [\tau_k, \tau_{k+1}[,\ k = 0, 1, \ldots,\ \tau_0 = 0, \qquad (6)$$

которые сохраняют свои значения $u(k)$ на заданных отрезках квантования $[\tau_k, \tau_{k+1}[$ и изменяют их только в моменты квантования τ_k. Периоды квантования часто являются постоянными:

$$h_k = \tau_{k+1} - \tau_k \equiv h > 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots. \qquad (7)$$

Класс импульсных функций составляет подкласс кусочно-постоянных функций. Это второй класс функций, из которого в данной работе будут выбираться управления.

Если состояния системы (2), находящейся под воздействием импульсной функции, измеряются (контролируют-

*) Для задач оптимизации систем (2) более широкие классы функций излишни.

ся) только в моменты квантования τ_k, то из (5) для состояний $x(\tau_{k+1}) \equiv x(k+1)$, $x(\tau_k) \equiv x(k)$ с учетом (6) получим

$$x(k+1) \equiv x(\tau_{k+1}) = F(\tau_{k+1}) F^{-1}(\tau_k) x(k) + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} F(\tau_{k+1}) F^{-1}(\tau) Bu(k)\, d\tau,$$

где $u(k) \equiv u(\tau_k)$. При выполнении (7) отсюда следует

$$x(k+1) = F(h)\, x(k) + \int_0^h F(h-\tau)\, Bu(k)\, d\tau.$$

Поскольку $F(t) = \exp(At) = E + At + \frac{1}{2!} At^2 + \ldots$, то $F(h) = \exp(Ah) = E + Ah + \ldots = E + A_h h$, $\int_0^h F(h-\tau) \times B\, d\tau = \left[Eh + \frac{1}{2!} A \frac{h^2}{2} + \frac{1}{3!} A^2 \frac{h^3}{3} + \ldots \right] B = B_h h$.

Таким образом, состояния $x(k) = x(\tau_k)$ непрерывной динамической системы (2), находящейся под воздействием импульсной функции, в моменты $\tau_k = (k-1)h$, $k = 1, 2, \ldots$, описываются рекуррентным уравнением $x(k+1) = (E + hA_h) x(k) + hB_h u(k)$, т. е. при указанных условиях непрерывная система эквивалентна дискретной. Следовательно, результаты данной главы могут быть использованы и для оптимизации дискретных систем.

§ 1. Адаптивный алгоритм

В данном параграфе адаптивный метод, разработанный в § 1 гл. 1 [3] для общей задачи линейного программирования, модифицируется для решения типичной задачи оптимального управления с краевыми условиями. Специфика проблемы состоит в том, что в рассматриваемой задаче основные ограничения своеобразны (динамичны) и в ней имеется много переменных. Формула Коши позволяет просто учесть динамичность ограничений, но возникающая при этом задача линейного программирования обладает особенностями, затрудняющими применение стандартных методов. Цель настоящего параграфа — построить такую модификацию адаптивного метода из [3], в которой максимально учитываются упомянутые особенности.

1. Постановка задачи. Рассмотрим линейную задачу оптимального управления дискретной системой:

$$J(u)=c'x(t_1)\to\max,\ x(t+h)=Ax(t)+bu(t),$$
$$x(0)=x_0,\ g_*\leqslant Hx(t_1)\leqslant g^*, \tag{1}$$
$$f_*(t)\leqslant u(t)\leqslant f^*(t),\ t\in T=\{0,\ h,\ \ldots,\ t_1-h\},$$

где $x(t)$ — n-вектор состояния системы в момент t; $u(t)$ — значение управляющего воздействия (входного сигнала) в момент t; $A=A(J,\ J)$ — $n\times n$-матрица, характеризующая динамику системы; b — n-вектор входного устройства; $H=H(I,\ J)$ — $m\times n$-матрица выходного устройства; $Hx(t_1)$ — m-вектор выходных сигналов; g_*, g^* — m-векторы; $f_*(t)$, $f^*(t)$, $t\in T$, — заданные функции; $I=\{1,\ 2,\ \ldots,\ m\}$, $J=\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$; $h=\mathrm{const}>0$.

Последовательность $u=(u(t),\ t\in T)$ управляющих воздействий, удовлетворяющих неравенствам $f_*(t)\leqslant u(t)\leqslant f^*(t)$, $t\in T$, назовем управлением. Каждому управлению соответствует траектория $x=(x(t),\ t\in T_1)$, $T_1=\{0,\ h,\ \ldots,\ t_1\}$, системы управления (1) — решение рекуррентного уравнения $x(t+h)=Ax(t)+bu(t)$, $x(0)=x_0$.

Управление u и соответствующая траектория x называются допустимыми, если для них выполняются неравенства $g_*\leqslant Hx(t_1)\leqslant g^*$. Оптимальными будем называть допустимые управление u^0 и траекторию x^0, на которых критерий качества $J(u)=c'x(t_1)$ задачи (1) достигает максимального значения: $J(u^0)=\max\limits_{u} J(u)$.

В конструктивной теории оптимального управления основную роль играют субоптимальные (ε-оптимальные) управления, под которыми понимаются допустимые управления u^ε, удовлетворяющие неравенству $J(u^0)-J(u^\varepsilon)\leqslant\varepsilon$.

Задача данного параграфа состоит в создании алгоритма, с помощью которого можно для каждого начального допустимого управления u и любого заданного $\varepsilon\geqslant 0$ через конечное число итераций допустимых управлений построить ε-оптимальное управление.

2. Опорные управления. Критерии оптимальности и субоптимальности.

Определение 1. Опорой задачи (1) назовем совокупность $K_{\text{оп}}=\{I_{\text{оп}},\ T_{\text{оп}}\}$ двух множеств $I_{\text{оп}}\subset I$, $T_{\text{оп}}\subset T$, $|I_{\text{оп}}|=|T_{\text{оп}}|$, для которой матрица $P_{\text{оп}}=(H(I_{\text{оп}},\ J)A^{(t_1-t)/h-1}b,\ t\in T_{\text{оп}})$ неособая.

Определение 2. Пара $\{u,\ K_{\text{оп}}\}$ из допустимого управления u и опоры $K_{оп}$ задачи (1) называется опорным управлением.

Определение 3. Опорными называются управляющие сигналы $u(t)$, $t \in T_{оп}$, и компоненты $H(s, J)x(t_1)$, $s \in I_{оп}$, выходных сигналов, где $H(s, J)$ — s-я строка матрицы $H(I, J)$. Неопорными — $u(t)$, $t \in T_н = T \setminus T_{оп}$, $H(s, J)\,x(t_1)$, $s \in I_н = I \setminus I_{оп}$, — управляющие и выходные сигналы соответственно.

Опорное управление $\{u, K_{оп}\}$ называется невырожденным, если все его опорные управляющие и неопорные выходные сигналы некритические: $f_*(t) < u(t) < f^*(t)$, $t \in T_{оп}$; $g_*(I_н) < H(I_н, J)\,x(t_1) < g^*(I_н)$.

Пусть $\{u, K_{оп}\}$ — опорное управление. Вычислим нижний $\omega_* = g_* - Hx(t_1)$ и верхний $\omega^* = g^* - Hx(t_1)$ векторы невязок выходных сигналов, вектор потенциалов $v'(I_{оп}) = (c' A^{(t_1-t)/h-1} b,\ t \in T_{оп})' P_{оп}^{-1}$, $v'(I_н) = 0$.

Наряду с опорным управлением $\{u, K_{оп}\}$ рассмотрим допустимое управление u^*. Вычислим приращение целевой функции задачи (1):

$$\Delta J(u) = J(u^*) - J(u) = -\sum_{t \in T_н} \Delta(t)\, \Delta u(t) + \sum_{s \in I_{оп}} v(s)\, \omega(s), \tag{2}$$

где $\omega(I_{оп}) = H(I_{оп}, J)\,(A^{(t_1-t)/h-1}b,\ t \in T_{оп})\,(\Delta u(t),\ t \in T_{оп}) + H(I_{оп}, J)\,(A^{(t_1-t)/h-1}b,\ t \in T_н)\,(\Delta u(t),\ t \in T_н)$; $\omega_*(I_{оп}) \leqslant \omega(I_{оп}) \leqslant \omega^*(I_{оп})$; $\Delta u(t) = u^*(t) - u(t)$, $t \in T$,— приращение управления; $-\Delta(t) = \psi'(t)\,b$, $t \in T$,— коуправление; $\psi(t)$, $t \in T$,— решение сопряженного уравнения (котраектория)

$$\psi'(t-h) = \psi'(t)\,A,\quad t \in T, \tag{3}$$

с начальным условием

$$\psi'(t_1-h) = c' - v'(I_{оп})\,H(I_{оп}, J). \tag{4}$$

Из формулы приращения (2) целевой функции следует неравенство

$$J(u^0) - J(u) \leqslant \beta, \tag{5}$$

где

$$\beta = \sum_{\Delta(t)>0,\ t \in T_н} \Delta(t)\,[u(t) - f_*(t)] + \sum_{\Delta(t)<0,\ t \in T_н} \Delta(t)\,[u(t) - f^*(t)] + \sum_{v(s)<0,\ s \in I_{оп}} v(s)\,\omega_*(s) + \sum_{v(s)>0,\ s \in I_{оп}} v(s)\,\omega^*(s).$$

Из (5) получается

Теорема 1 (критерий оптимальности). Соотношения $\Delta(t)=0$ при $f_*(t)<u(t)<f^*(t)$; $\Delta(t)\geqslant 0$ при $u(t)=f_*(t)$; $\Delta(t)\leqslant 0$ при $u(t)=f^*(t)$, $t\in T_н$; $v(s)=0$ при $g_*(s)<H(s, J)x(t_1)<g^*(s)$; $v(s)\leqslant 0$ при $H(s, J)x(t_1)=g_*(s)$; $v(s)\geqslant 0$ при $H(s, J)x(t_1)=g^*(s)$, $s\in I_{оп}$, достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности опорного управления $\{u, K_{оп}\}$.

Сформулируем критерий оптимальности в терминах дискретного принципа максимума.

Следствие 1. Для оптимальности опорного управления $\{u, K_{оп}\}$ достаточно, чтобы существовали векторы $\lambda_*=(\lambda_*(s)\geqslant 0, s\in I)$, $\lambda^*=(\lambda^*(s)\geqslant 0, s\in I)$ такие, что выполняются следующие условия:

а) дополняющей нежесткости для выходных сигналов:

$$\lambda'_*[g_*-Hx(t_1)]=0,\ \lambda^{*\prime}[Hx(t_1)-g^*]=0; \tag{6}$$

б) максимума для управления:

$$\psi'(t)\,bu(t)=\max_{f_*(t)\leqslant\tilde{u}\leqslant f^*(t)}\psi'(t)\,b\tilde{u},\ t\in T, \tag{7}$$

где $\psi(t)$, $t\in T$,— решение уравнения (3) с начальным условием (4) и $v=\lambda^*-\lambda_*$.

Для невырожденного оптимального опорного управления $\{u^0, K^0_{оп}\}$ существуют m-векторы $\lambda_*\geqslant 0$, $\lambda^*\geqslant 0$ такие, что выполняются условия (6), (7).

Теорема 2 (критерий субоптимальности). Для ε-оптимальности допустимого управления u необходимо и достаточно, чтобы при некоторой опоре $K_{оп}$ на опорном управлении $\{u, K_{оп}\}$ выполнялось неравенство $\beta\leqslant\varepsilon$.

Основываясь на критерии субоптимальности, сформулируем аналог следствия 1 для случая ε-оптимального управления $u^\varepsilon(t)$, $t\in T$.

Следствие 2. Для ε-оптимальности допустимого управления $u(t)$, $t\in T$, необходимо и достаточно, чтобы при некоторой опоре $K_{оп}$ выполнялись следующие условия:

а) $\lambda_*(s)[g_*(s)-H(s, J)x(t_1)]+\varepsilon_*(s)=0,$
$\lambda^*(s)[H(s, J)x(t_1)-g^*(s)]+\varepsilon^*(s)=0,\ s\in I;$

б) $\max\limits_{f_*(t)\leqslant\tilde{u}\leqslant f^*(t)}\psi'(t)\,b\tilde{u}=\psi'(t)\,bu(t)+\varepsilon(t),\ t\in T;$

в) $\varepsilon(t)\geqslant 0,\ t\in T,\ \varepsilon_*(s)\geqslant 0,\ \varepsilon^*(s)\geqslant 0,\ s\in I,$

$$\sum_{t\in T}\varepsilon(t)+\sum_{s\in I}[\varepsilon_*(s)+\varepsilon^*(s)]\leqslant\varepsilon.$$

Здесь $\psi(t)$, $t\in T$,— решение задачи (3), (4); $\lambda_*\geqslant 0$, $\lambda^*\geqslant 0$, $v=\lambda^*-\lambda_*$.

3. Алгоритм. Предположим, что опорное управление $\{u,\ K_{\text{оп}}\}$ не удовлетворяет критерию оптимальности и оценка β его отклонения от оптимального управления превышает заданную точность приближения ε. В дискретных задачах (1), полученных из непрерывных с помощью квантования времени, число t_1/h моментов квантования (при точной аппроксимации) значительно превосходит число m выходных сигналов ($t_1/h\gg m$).

По построению, компоненты коуправления $\Delta(t)$, $t\in T_{\text{оп}}$, соответствующие опорным сигналам, равны нулю. При $t_1/h\gg m$ среди неопорных векторов $(c'A^{(t_1-t)/h-1}b,\ HA^{(t_1-t)/h-1}b)$, $t\in T_{\text{н}}$, в общем случае найдется много таких, которые почти коллинеарны некоторым опорным векторам $(c'A^{(t_1-t)/h-1}b,\ HA^{(t_1-t)/h-1}b)$, $t\in T_{\text{оп}}$. Компоненты коуправления $\Delta(t)$, $t\in T_{\text{н}}$, соответствующие таким векторам, будут равны нулю или мало отличаться от нуля и поэтому трудно распознаваемы ЭВМ, что может привести к ложным итерациям (и зацикливанию).

По коуправлению $\Delta(t)$, $t\in T$, и заданному числу $\alpha\geqslant 0$ построим множества $T_{\text{м}}=\{t\colon|\Delta(t)|\leqslant\alpha\}$, $T_{\text{нб}}=\{t\colon|\Delta(t)|>\alpha\}$, $T_{\text{нм}}=T_{\text{м}}\cap T_{\text{н}}$. Из физического смысла компонент коуправления $\Delta(t)$, $t\in T$, следует, что вариации управляющих сигналов $u(t)$, $t\in T_{\text{нб}}$, оказывают на критерий качества больше влияния, чем вариации управляющих сигналов $u(t)$, $t\in T_{\text{нм}}$. Поэтому в предлагаемом алгоритме будем по множеству $T_{\text{нб}}$ строить направление подъема, а множество $T_{\text{м}}$ использовать для обеспечения максимального приращения критерия качества задачи (1) вдоль этого направления.

Рассмотрим задачу

$$-\Theta\sum_{t\in T_{\text{н}}}\Delta(t)\,\Delta u(t)+\Theta\sum_{s\in I_{\text{оп}}}v(s)\,\omega(s)\to\max,$$

$$x(t+h)=Ax(t)+b\Theta\Delta u(t),\ t\in T,\ x(0)=0;$$

$$\omega_*\leqslant Hx(t_1)\leqslant\omega^*,\ f_*(t)-u(t)\leqslant\Theta\Delta u(t)\leqslant f^*(t)-u(t),$$

$$t\in T_{\text{м}},\ 0\leqslant\Theta\leqslant 1;$$

$$\Delta u(t)=f^*(t)-u(t),\ \text{если}\ \Delta(t)<-\alpha;$$

$$\Delta u(t)=f_*(t)-u(t),\ \text{если}\ \Delta(t)>\alpha,\ t\in T_{\text{нб}};$$
$$\omega(s)=\omega_*(s),\ \text{если}\ v(s)<0;\ \omega(s)=\omega^*(s),\ \text{если}\ v(s)>0;$$
$$\omega(s)=0,\ \text{если}\ v(s)=0,\ s\in I_{\text{оп}}.$$

Эта задача эквивалентна следующей интервальной задаче линейного программирования:

$$-\sum_{t\in T_{\text{нм}}}\Delta(t)\,\Delta u(t)-\Theta\Big[\sum_{t\in T_{\text{нб}}}\Delta(t)\,\Delta u(t)-$$
$$-\sum_{s\in I_{\text{оп}}}v(s)\,\omega(s)\Big]\to\max_{\Delta u(t),\ t\in T_{\text{м}};\ \Theta}, \tag{8}$$

$$b_*\leqslant\sum_{t\in T_{\text{м}}}HA^{(t_1-t)/h-1}\,b\Delta u(t)+\Theta\tilde b\leqslant b^*,\ f_*(t)-u(t)\leqslant$$
$$\leqslant\Delta u(t)\leqslant f^*(t)-u(t),\ t\in T_{\text{м}},\ 0\leqslant\Theta\leqslant 1,$$

где $\tilde b=(\tilde b(I_{\text{оп}}),\ \tilde b(I_{\text{н}}))=\Big(\sum_{t\in T_{\text{нб}}}H(I_{\text{оп}},\ J)\,A^{(t_1-t)/h-1}b\Delta u(t)-$

$-\omega(I_{\text{оп}}),\ \sum_{t\in T_{\text{нб}}}H(I_{\text{н}},\ J)\,A^{(t_1-t)/h-1}\,b\,\Delta u(t)\Big);\ b_*=(b_*(I_{\text{оп}}),$

$b_*(I_{\text{н}}))=(0,\ \omega_*(I_{\text{н}}));\ b^*=(b^*(I_{\text{оп}}),\ b^*(I_{\text{н}}))=(0,\ \omega^*(I_{\text{н}})).$

Число Θ^0 в решении $(\Delta u^0(t),\ t\in T_{\text{м}};\ \Theta^0)$ задачи (8) равно максимально допустимому шагу вдоль построенного направления $\Delta u=(\Delta u^0(t)/\Theta^0,\ t\in T_{\text{м}};\ \Delta u(t),\ t\in T_{\text{нб}})$.

Задачу (8) будем решать в два этапа. На первом этапе решаем задачу

$$-\sum_{t\in T_{\text{нм}}}\Delta(t)\,\Delta u(t)\to\max_{\Delta u(t),\ t\in T_{\text{м}}},$$
$$b_*-\Theta^1\tilde b\leqslant\sum_{t\in T_{\text{м}}}HA^{(t_1-t)/h-1}\,b\Delta u(t)\leqslant b^*-\Theta^1\tilde b, \tag{9}$$
$$f_*(t)-u(t)\leqslant\Delta u(t)\leqslant f^*(t)-u(t),\ t\in T_{\text{м}}.$$

Для решения задачи (9) в качестве начального возьмем опорный план $\{\Delta u^1(t),\ t\in T_{\text{м}};\ K_{\text{оп}}\}$, где $\Delta u^1(t)=\Theta^1\Delta\tilde u(t)$, $t\in T_{\text{м}}$;

$$\Delta\tilde u(t)=\begin{cases} f^*(t)-u(t), & \text{если}\ \Delta(t)<0,\\ f_*(t)-u(t), & \text{если}\ \Delta(t)>0,\ t\in T_{\text{нм}};\\ 0, & \text{если}\ \Delta(t)=0,\end{cases}$$

$$\Delta\tilde u(T_{\text{оп}})=-P_{\text{оп}}^{-1}\Big[\tilde b(I_{\text{оп}})+\sum_{t\in T_{\text{нм}}}H(I_{\text{оп}},\ J)\,A^{(t_1-t)/h-1}b\Delta\tilde u(t)\Big];$$

$$\Theta^1=\min\{1,\ \Theta(t^0),\ \Theta(s^0)\};\ \Theta(t^0)=\min\Theta(t),\ t\in T_{\text{оп}};$$

$$\Theta(t)=\begin{cases}[f_*(t)-u(t)]/\Delta\tilde{u}(t), & \text{если } \Delta\tilde{u}(t)<0,\\ [f^*(t)-u(t)]/\Delta\tilde{u}(t), & \text{если } \Delta\tilde{u}(t)>0,\\ \infty, & \text{если } \Delta\tilde{u}(t)=0;\end{cases}$$

$$\Theta(s^0)=\min\Theta(s),\ s\in I_{\text{н}};$$

$$\Theta(s)=\begin{cases}b_*(s)/\gamma(s), & \text{если } \gamma(s)<0,\\ b^*(s)/\gamma(s), & \text{если } \gamma(s)>0,\\ \infty, & \text{если } \gamma(s)=0,\end{cases}$$

где

$$\gamma(s)=\sum_{t\in T_{\text{м}}}H(s,\ J)\,A^{(t_1-t)/h-1}\,b\Delta\tilde{u}(t)+\tilde{b}(s).$$

Ясно, что при $\Theta^1=1$ план $\Delta u(t)=\Delta\tilde{u}(t)$, $t\in T_{\text{м}}$, является решением задачи (9), а управление $\bar{u}=u+\Delta u$, где $\Delta u=(\Delta\tilde{u}(t),\ t\in T_{\text{м}};\ \Delta u(t),\ t\in T_{\text{нб}})$,— оптимальным управлением задачи (1).

Пусть $\Theta^1<1$. Задачу (9) решаем адаптивным методом с длинным шагом [3]. С помощью оптимального опорного плана $\{\Delta u^*(t),\ t\in T_{\text{м}};\ K^*_{\text{оп}}\}$ задачи (9) строим начальный опорный план $\{\Delta u^*(t),\ t\in T_{\text{м}};\ \Theta^1,\ K^*_{\text{оп}}\}$ задачи (8) и решаем ее адаптивным методом с коротким шагом (см. [4]). Процесс решения задачи (8) не обязательно вести до конца. Его можно остановить, если текущий план $\{\Delta\bar{u}(t),\ t\in T_{\text{м}};\ \bar{\Theta};\ \bar{K}_{\text{оп}}\}$ этой задачи достигает заданной окрестности ε оптимального значения целевой функции.

Пусть $\{\Delta\bar{u}(t),\ t\in T_{\text{м}};\ \bar{\Theta};\ \bar{K}_{\text{оп}}=\{\bar{I}_{\text{оп}},\ \bar{T}_{\text{оп}}\}\}$ — опорный план задачи (8), на котором было остановлено решение. Управление $\bar{u}=u+\Delta\bar{u}$ с $\Delta\bar{u}=(\Delta\bar{u}(t),\ t\in T_{\text{м}};\ \bar{\Theta}\Delta u(t),\ t\in T_{\text{нб}})$ является допустимым в задаче (1), причем $\Delta J(u)=J(\bar{u})-J(u)=-\sum_{t\in T_{\text{нм}}}\Delta(t)\Delta\bar{u}(t)-\bar{\Theta}\sum_{t\in T_{\text{нб}}}\Delta(t)\,\Delta u(t)+$ $+\bar{\Theta}\sum_{s\in I_{\text{оп}}}v(s)\,\omega(s)\geqslant 0$ (в невырожденном случае строго больше нуля). Для управления $\bar{u}$ справедливо неравенство $I(u^0)-I(\bar{u})\leqslant\bar{\beta}$, где